

## INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

## CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

This material contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, U.S.C. Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

PROCESSING COPY

C-O-N-F-I-D-E-N-T-I-A-L

COUNTRY	USSR	REPORT	
SUBJECT	Publications of the USSR Academy of Science	DATE DISTR.	16 July 1957
	re: 1. Bulletin of the Institute of Theoretical Astronomy.	NO. PAGES	1
	2. "Stratigraphic Significance of pollen of Gymnospermaeic Cenozoic deposits in the Pavlodarsk, Irtysh, and Aral regions."	REQUIREMENT NO.	RD
DATE OF INFO.		REFERENCES	25X1
PLACE & DATE ACQ.			25X1

Reel # 190

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE

unclassified Russian language  
Soviet publications published in 1957 by the USSR Academy of Science:

1. Byulleten Instituta Teoreticheskoy Astronomii (Bulletin of the Institute of Theoretical Astronomy) Volume 6, Number 7, and Volume 6, Number 8.
2. Stratigraficheskoye Znachenie Pyl'tsy Golosemennykh Kaynozoysskikh Otlozheniy Pavlodarskogo Priirtyshya i Severnogo Priaralya (Stratigraphic Significance of Pollen of Gymnospermaeic Cenozoic Deposits in the Pavlodarsk Irtysh and the northern Aral regions) by E.D. Zaklinskaya.

25X1

C-O-N-F-I-D-E-N-T-I-A-L

Batch # 7 17 77

STATE	<input checked="" type="checkbox"/>	ARMY	<input checked="" type="checkbox"/>	NAVY	<input checked="" type="checkbox"/>	AIR	<input checked="" type="checkbox"/>	FBI	<input checked="" type="checkbox"/>	AEC				
-------	-------------------------------------	------	-------------------------------------	------	-------------------------------------	-----	-------------------------------------	-----	-------------------------------------	-----	--	--	--	--

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#".)

INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT

ТРУДЫ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ВЫПУСК 6

**АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ТРУДЫ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**

**Выпуск 6**

**Е. Д. ЗАКЛИНСКАЯ**

**СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ  
ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ  
КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ  
ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ  
И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА**

2-я ТИПОГРАФИЯ  
Издательства Академии Наук СССР  
Москва, Шубинский пер., д. 10

При обнаружении недостатков  
в книге просим вернуть книгу  
вместе с этим ярлыком для обмена

А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р

---

ТРУДЫ ГЕОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Выпуск 6

Е. Д. ЗАКЛИНСКАЯ

**СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ  
ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ  
КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ  
ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ  
И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ**



---

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА · 1957



Ответственный редактор

*В. П. Гричук*

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время метод спорово-пыльцевого анализа прочно завоевал положение в науке как один из палеоботанических методов исследования.

Ископаемые пыльца, споры, семена, отпечатки листьев и древесина растений в одинаковой мере интересуют палеоботаников и как документы для восстановления картины последовательного развития флоры и растительности и как материал для обоснования стратиграфического расчленения осадочных отложений морского и континентального происхождения.

По мере изучения ископаемых растительных остатков (как микроскопических, так и макроскопических) постепенно находятся звенья, связующие отдельные этапы истории формирования флоры, а также намечаются пути к познанию происхождения и становления современной растительности различных ботанических областей.

В литературе в настоящее время известно немало работ, затрагивающих в той или иной степени вопросы методики изучения пыльцы и спор и спорово-пыльцевых спектров третичных отложений, хотя у нас в Советском Союзе третичные отложения методом спорово-пыльцевого анализа стали систематически изучаться лишь с начала 40-х годов.

В настоящее время опыт широкого применения спорово-пыльцевого анализа в области изучения третичных отложений оправдал себя для стратиграфических и палеофлористических целей. Построение схем стратиграфического расчленения третичных отложений в их континентальных, солончатоводных и морских фациях уже не мыслится без биостратиграфической основы, для которой материал по ископаемым спорам и пыльце является одним из основных.

Метод комплексного исследования опорных разрезов третичных и четвертичных отложений становится обязательным в научно-исследовательских работах, так как только детальное изучение опорных разрезов (стратиграфия которых фаунистически обоснована), вскрытых на территориях, располагавшихся в третичный период в различных ботанико-географических областях, а в четвертичный период — в различных физико-географических зонах, позволяет установить последовательность становления флоры и растительности во времени и пространстве.

Одним из наиболее важных вопросов в области спорово-пыльцевого анализа в настоящее время является разработка метода сопоставления спорово-пыльцевых спектров, выделенных из разновозрастных отложений в районах, значительно удаленных один от другого и находящихся в различных современных ботанических областях, а в третичное время располагавшихся в различных ботанических областях или ботанико-географических провинциях, в понимании А. Н. Криштофовича.

Выделенные А. Н. Криштофовичем (1941, 1946) ботанико-географические области и провинции палеогена, значительно различающиеся по

характеру флоры, достаточно ясно указывают на то, что в пределах северного полушария палеогеновая флора не была одинаковой на различных территориях в одни и те же отрезки геологического времени, и что поэтому прямое сопоставление флороносных горизонтов по составу обнаруженных в них растительных остатков может привести к ошибочным выводам.

Последними работами в области спорово-пыльцевого анализа (Покровская, 1954; Заклинская, 1953<sub>1</sub>) намечена первоначальная схема примерного расположения различных флористических провинций на территории СССР, а также первоначальная схема вертикального распределения руководящих спорово-пыльцевых спектров в различных регионах на территории СССР в палеогене и неогене. И. М. Покровская (1954) на основании обобщения данных спорово-пыльцевого анализа предположительно выделяет, например, Европейскую, Урало-Западносибирскую, Казахстанскую Восточносибирскую и Дальневосточную геоботанические провинции, отличающиеся одна от другой характером спектров и флористической принадлежностью их.

Автор настоящей работы в докладе на Второй Всесоюзной конференции по спорово-пыльцевому анализу отмечал значительные флористические различия разновозрастных палеогеновых спектров из опорных разрезов различных районов юга Европейской части СССР и Казахстана: нижние палеогеновые спектры юга Европейской части СССР отражают флору тропическую, в основном древнесредиземноморскую, казахстанские же разновозрастные спектры уже в середине палеогена характеризуются флорами смешанными, включающими элемент северо-восточных азиатских умеренных компонентов. Среднепалеогеновые спектры юга Европейской части СССР характеризуют флору в основном древнесредиземноморскую, с небольшой примесью умеренной тургайской, казахстанские же среднепалеогеновые спектры почти полностью представлены пылью и спорами растений умеренной тургайской флоры, т. е. флоры, весьма близкой к нижне-неогеновой флоре юга Европейской части СССР.

Таким образом, в настоящее время достаточно ясно представляется вся сложность вопроса сопоставления разновозрастных отложений по флористическим данным и выявляется необходимость разработки детальных местных палеофлористических схем, которые в дальнейшем могут послужить основой для создания общей палеофлористической шкалы в целях корреляции разновозрастных отложений из удаленных территорий.

Попытка И. М. Покровской выделить геоботанические провинции в пределах крупных флористических областей является большим шагом вперед в области палеоботанических исследований. Выявление различий флористических провинций палеогена и неогена, по-видимому, — один из правильных путей к разрешению задачи сопоставления разновозрастных горизонтов по флористическим данным, тогда, когда эти горизонты охарактеризованы спорово-пыльцевыми спектрами различного состава.

К сожалению, несмотря на то, что сама жизнь подсказала пути развития спорово-пыльцевого анализа как научной области палеоботаники, состояние методики и техники определения ископаемых форм еще не всегда позволяет полностью использовать все собранные материалы. До сих пор мы располагали и, по-видимому, еще много лет будем располагать лишь весьма ограниченными возможностями для определения ископаемых пыльцы и спор до вида. Происходит это от того, что пыльца современных растений, в особенности субтропических и тропических, изучена еще очень слабо. Между тем правильность определений ископаемых пыльцы и спор третичных и четвертичных растений почти целиком зависит именно от этого обстоятельства.

На основании многолетних исследований А. Н. Криштофовича, Е. В. Вульфа, В. Н. Сукачева, М. М. Ильина и других ученых установ-

лено, что элементы современной флоры имеют чрезвычайно много общих форм с третичными и даже верхнемеловыми комплексами. В особенности это относится к области палеотропиков, где, по мнению наших крупных палеоботаников и флористов, третичная флора по настоящее время осталась почти без изменений. В умеренных широтах в течение всего кайнозоя под влиянием изменений общей физико-географической обстановки и флора неоднократно менялась наряду с перераспределением границ растительных провинций и зон. Становление современной флоры происходило не одновременно в различных регионах. В северном полушарии основной комплекс третичных субтропических семейств, родов и видов растений, теснимый общим похолоданием, частичной аридизацией, а затем увеличением континентальности климата, отступал к южным широтам, уступая место умеренным северо-восточным флорам. В то же время постепенное сокращение площади, занятой морскими водами, изменение конфигурации материков и их рельефа, происходящее постепенно и неодинаково в различных районах, создавало специфические условия для развития ландшафтных зон. Например, территория Казахстана уже в среднем олигоцене представляла собой сушу, на которой развивалась растительность, отчасти лесная, листопадная, или полупустынная и сухостепная на участках с выровненной поверхностью и с песчаным, щебнистым грунтом (возможно, с солонцовыми почвами).

На юге же Европейской части СССР, например на территории Азово-Кубанской впадины, в это время было еще глубокое море, в котором отлагались мощные осадки. Море окончательно регрессировало отсюда лишь в конце плиоцена, после неоднократных возвратных движений. Естественно, что лишь к этому времени могло относиться заселение данной территории растительностью, которая в связи с пульсацией границ мелеющего моря неоднократно меняла свой состав и только в конце плиоцена, когда общие физико-географические условия приблизились к современным, стала приобретать состав так же, близкий к современному.

Несмотря на то, что состав растительности и границы распространения различных фитоценологических единиц неоднократно изменялись в течение кайнозоя, сохранились до наших дней те основные роды растений, которые входили в состав тургайской умеренной флоры и новой средиземноморской флоры, сформировавшейся в течение кайнозоя путем смешения древнесредиземноморской, восточноазиатской, китайской и других флор.

Таким образом, определение родов ископаемых пыльцы и спор может и должно производиться путем сравнения с пыльцой и спорами современных родов, точно так же, как это делается при определении ископаемых листовых отпечатков и остатков растений или морской фауны.

При сопоставлении ископаемых видов пыльцы и спор с эталонными сравнительными коллекциями пыльцы и спор современных видов растений мы наблюдаем, что эти виды в подавляющем большинстве случаев имеют общие морфологические черты, что указывает на их близкое родство.

В то же время относительная бедность наших лабораторий сравнительными коллекциями и ограниченность нашей литературы по морфологии пыльцы не позволяют исследователям в ряде случаев довести определение ископаемого материала не только до вида, но и до рода. Иногда же выделенные формы остаются определенными только до семейства или даже до класса. Некоторые формы приходится группировать лишь по морфологическим признакам. Такие условно определенные формы уже не могут быть использованы для флористических реконструкций и имеют лишь стратиграфическую ценность, характеризуя отдельные горизонты разновозрастных отложений в пределах только одной и той же физико-географической области, провинции или подобласти.

Не так давно В. А. Вахрамеев в своей работе о состоянии советской палеоботаники (1953) высказал мысль о том, что списки спорово-пыльцевых спектров, составленные из родовых названий, совершенно недостаточны для характеристики отдельных слоев и свит и что использование таких списков для характеристики флоры отдельных отрезков геологического времени нецелесообразно, так как большинство растительных видов этих родов обладает широким горизонтальным и вертикальным распространением. Это не совсем так. Безусловно, видовое определение пыльцы и спор необходимо при изучении молодых кайнозойских и тем более четвертичных отложений. Не вызывает также сомнения и то, что недостаточно точно определенное систематическое положение той или иной ископаемой формы лишает возможности использовать данные анализа для реконструкции мелких элементов ландшафта. Но все же спорово-пыльцевые спектры, представленные родовыми названиями или включающие компоненты, систематическое положение которых определено лишь до семейства, пригодны для стратиграфических целей.

Ботаникам хорошо известно, что основной единицей для характеристики флористических подразделений принимается семейство (Алехин, 1950). Изучая ареалы различных семейств и родов, удалось установить границы современных ботанических областей. Известно, например, что часть семейств, таких как *Palmae*, *Anonaceae*, *Ebenaceae*, *Cactaceae*, *Cephalotaxaceae* и др., являются чисто тропическими, и некоторые роды этих семейств приурочены к тропическим же широтам различных стран. Так, например, некоторые роды семейств *Cactaceae*, *Bromeliaceae* встречаются только в Южной Америке, отдельные же роды семейства *Cephalotaxaceae* приурочены только к Австралии. Такие роды семейства *Podocarpaceae*, как *Dacrydium*, *Phyllocladus*, или семейство *Araucariaceae* известны только в западной части Австралийской ботанической области и т. д. Семейство миртовых во всем его многообразии приурочено в основном к Австралийской области, а обширный род этого семейства — *Eucalyptus* чуть ли не эндемичен для Австралии.

Таким образом, определенное сочетание группы семейств характеризует ботаническую область или подобласть, а следовательно, характеризует и общую физико-географическую обстановку какой-то определенной территории. Следовательно, спорово-пыльцевой спектр, включающий большое число компонентов, определенных лишь в пределах семейств, может служить и для флористических целей и для стратиграфического подразделения.

Очевидно, что чем менее схематично определение, тем ценнее данные спорово-пыльцевого анализа для подробного стратиграфического подразделения, так как определение пыльцы и спор до рода или вида позволяет охарактеризовать не только флору, но и сумму ценоотических единиц, составляющих эту флору. Приуроченность определенных родов отдельных семейств к различным широтам земного шара позволяет выделить флористические подобласти, а распространение различных видов этих родов характеризует группы или отдельные ценозы в этих подобластях. Последнее подводит нас к возможности судить о составе растительности определенных элементов рельефа и выделить отдельные ландшафтные единицы.

В применении к спорово-пыльцевому анализу определение родов дает возможность реконструировать флористический состав растительного покрова для сравнительно крупных стратиграфических интервалов (ярус), определение же видовое может дать возможность выделить коррелирующие спектры для деления на свиты и слои. Такое подробное подразделение будет в каждом отдельном случае применимо лишь для местного стратиграфического расчленения тогда как спектры, охарактеризованные определением

до семейства или рода, могут иметь гораздо более широкое значение, но для обоснования менее подробного расчленения.

Примером могут служить следующие схемы распределения спорово-пыльцевых спектров.

1. Спектры представлены голосеменными (20%), покрытосеменными (45%), спорами папоротников (35%). Голосеменные в основном представлены пыльцой растений, принадлежащих к семействам *Araucariaceae*, *Podocarpaceae*, *Cupressaceae*, *Gnetales*, единично *Pinaceae* (преимущественно архаичные формы родов *Pinus* и *Picea*). Покрытосеменные представлены семействами *Myrtaceae*, *Proteaceae*, *Goodeniaceae*, *Leguminosae*, *Casuarinaceae*. Споры принадлежат растениям семейств *Cyatheaceae*, *Dicksoniaceae* и др. Такой спектр указывает на тропический облик флоры и характеризует нижнепалеогеновые отложения Приаралья, Казахстана, Западной Сибири, Тургайской впадины, отчасти южных районов Европейской части СССР.

2. Спектры представлены покрытосеменными (60%), голосеменными (25%) и спорами (15%). Покрытосеменные принадлежат к родам *Juglans*, *Pterocarya*, *Liquidambar*, *Nyssa*, *Betula*, *Alnus*, *Acer*, *Quercus*, *Ulmus*. Голосеменные преимущественно представлены пыльцой растений родов *Picea*, *Pinus*, *Taxodium*, с небольшой примесью *Cedrus*, сем. *Cupressaceae*, *Tsuga*. Споры в основном принадлежат родам *Dryopteris*, *Alsophylla*, *Gleichenia*, сем. *Polypodiaceae* и в небольшом количестве — *Sphagnum* (?). Эти спектры характерны для среднего олигоцена в Северном Приаралье и Северном Прииртышье (первая и вторая свиты континентального олигоцена), для Европейской же части СССР спектры, подобные этим, характеризуют миоцен.

3. Спектры в основном представлены покрытосеменными (88%), голосеменными (10%), спорами (2%). Для покрытосеменных характерно присутствие *Artemisia* cf. *dracunculus*, *A.* cf. *pectinata*, *A.* cf. *sublessingiana*, *Calligonum* cf. *paletzianum*, *Atriplex* cf. *cana*, *Kochia* cf. *scoparia*, *Salsola* aff. *soda*, *Ferula* aff. *assa foetida*, *Nitraria* cf. *Schoberi* при участии *Rhus* sp., *Proteaceae*, *Betula* sp., *Pinus* cf. *silvestris*, *Cotinus* и др. Такие спектры принадлежат ассоциациям полупустынных местообитаний верхнеолигоценового времени и характерны только для отложений песчано-алевритовой свиты верхнего олигоцена, на границе с нижним миоценом в Северном Прииртышье. Эти спектры по своему составу близки к спектрам четвертичных отложений этого района. Но современные спектры не имеют примеси тургайской флоры и гораздо беднее примесью пыльцы древесных пород, потому что в четвертичное время древесная растительность в Северном Прииртышье была представлена лишь галерейными лесами или рощами вдоль некоторых рек.

Приведенные спектры резко отличны от верхнеолигоценовых спектров южной части СССР (верхний майкоп Северного Кавказа), которые имеют ничтожную примесь пыльцы трав, а в основном состоят из пыльцы древесных пород. Среди небольшого количества пыльцы трав обычно присутствуют некоторые роды сем. *Chenopodiaceae*, но в основном пыльца трав принадлежит луговому комплексу.

Таким образом, мы на наглядном примере можем убедиться в том, что спорово-пыльцевые спектры; при большей или меньшей детальности определений, представляют для целей стратиграфии большую, а порой незаменимую, ценность, так как во многих случаях данные спорово-пыльцевого анализа являются единственной палеонтологической основой, при помощи которой можно синхронизировать отложения, определить стратиграфическое положение их и восстановить примерные черты растительного элемента ландшафта окружающей суши в период формирования изучаемых осадков.

Необходимо упомянуть о ландшафтных зонах и о растительности и флоре, восстановленной по данным спорово-пыльцевых анализов. В литературе, посвященной спорово-пыльцевым исследованиям и флористическим построениям, мы неоднократно встречаем такие выражения, как: «...в течение олигоценового времени на территории южной зоны Европейской провинции были распространены широколиственные леса» или «...на территории Казахстанской провинции произрастали широколиственные леса...» (Покровская, 1954, стр. 246). Это не точно! И вот почему. Анализируя спорово-пыльцевые спектры третичных отложений (или отложений иных эпох), мы в ряде случаев имеем дело с морскими осадками, формировавшимися в продолжение десятков тысячелетий на дне обширных морских бассейнов. Именно с такими морскими осадками связаны спорово-пыльцевые спектры олигоценового времени южной зоны Европейской провинции (майкопское море) и большей части Казахской провинции (чеганское море). Никакой растительности, разумеется, на этих пространствах в то время не было. Пыльца же и споры, обнаруженные в морских отложениях, принадлежали растениям, произраставшим на территориях материков или островов, берега которых омывались этими морями.

Таким образом, анализируя спорово-пыльцевые спектры из морских отложений, мощность которых на Кавказе, в Крыму и Приазовье достигает нескольких сотен метров, а в Северном Прииртышье и в Западной Сибири — нескольких десятков метров, следует учитывать, что флора, восстанавливаемая по этим спектрам, относится не к точкам находок, а к участкам суши, расположенным на расстоянии десятков, а может быть, и сотен километров от этих точек. Это следует учитывать при составлении карт распределения растительности, хотя бы и схематических, которые должны соответствовать общей палеогеографической схеме изучаемого района. Анализируя спорово-пыльцевые спектры, полученные из фашиально различных континентальных отложений, мы имеем дело с комплексами пыльцы и спор растений, произраставших в основном вблизи от места формирования этих отложений. В этих случаях спорово-пыльцевые спектры более или менее точно отражают не только характер флоры, но и состав растительности территорий, ближайших к пунктам исследования.

Анализируя же морские отложения, особенно глубоководных фаций, мы выделяем спектры, дающие суммарное отражение характера растительного покрова суши, омываемой морем. При этом пыльца и споры, принесенные в море водным и воздушным путем, могут принадлежать растениям, входящим в состав самых разнообразных ценозов или групп их. Поэтому спектры из морских отложений обычно содержат наиболее богатые в видовом отношении комплексы пыльцы и спор, смешанный состав которых не дает твердых оснований к реконструкции растительности. Такие спектры дают в основном лишь флористические характеристики. На основании анализа спектров из глубоководных отложений сделать вывод относительно состава растительности ближайших территорий можно лишь в предположительной форме, и то имея материал по спорово-пыльцевым спектрам или по макроскопическим остаткам из одновозрастных континентальных отложений ближайших территорий. Параллельные исследования растительных остатков из одновозрастных континентальных или прибрежноводных отложений ближайших территорий могут помочь в отыскании источников сноса пыльцы и спор на место морских отложений.

Опыт таких параллельных исследований был произведен Н. А. Болховитиной (1953) для меловых отложений и автором настоящей работы, совместно с В. И. Барановым, — по району Северного Приаралья и западных склонов Мугоджар. Автор производила спорово-пыльцевой анализ отложений морского палеогена (тасаранская свита), В. И. Баранов — анализ отпечатков листьев и сохранившихся древесных остатков, а также

пыльцы и спор из континентальной фации этой же свиты. По флористической близости и по совпадению отдельных родов, к которым принадлежали растительные остатки в том и другом случае, можно было убедиться, что одним из основных источников сноса пыльцы в тасаранское море Северного Приаралья были отроги Мугуджар, которые в то время были сушей (Баранов, 1953).

Вторая конференция по спорово-пыльцевому анализу 1953 г. показала, насколько продвинулось вперед изучение спор и пыльцы кайнозойских отложений вообще и, в частности, третичных. Огромный фактический материал, содержащийся в докладах представителей геологических научно-исследовательских институтов Академии наук СССР, Министерства геологии, Министерства нефтяной промышленности, университетов и др., может уже служить основой для больших сводных работ. Общим недостатком большинства исследований кайнозойских спорово-пыльцевых спектров является отсутствие морфологических описаний ископаемых пыльцы и спор. В этом отношении работы в области спорово-пыльцевого анализа несколько отстают от общей системы палеонтологических исследований. Между тем, занимаясь палеофлористическими реконструкциями, специалисты по спорово-пыльцевому анализу обязаны фиксировать и документировать свои находки, не ограничиваясь словесным перечнем обнаруженных форм, и создавать, таким образом, фонд для справочного материала.

Изучение растительных остатков в районах, соседних с Северным Приаралем и Павлодарским Прииртышьем, ведется в течение многих десятилетий. Еще в 1858 г. Г. В. Абих опубликовал материал по растительным отпечаткам из киргизских степей, собранным А. И. Антиповым из углистых отложений у источника Жар-Кие и определенным О. Геером. Последующими работами в Приарале, Казахстане, Тургае, Прииртышье, в Средней Азии (Геер, 1858; Берг, обработка Палибина, 1906; Криштофович и Палибин, 1915; Нейбург, 1928<sub>2</sub>; Боярунус, обработка Поярковой, 1932, 1935; Борсук, 1935; Узнадзе-Дгебуадзе, 1948; Мchedlishvili, 1948 и 1949<sub>1,2</sub>; Корнилова, 1950<sub>1,2</sub>, 1952<sub>1,2</sub>, 1955; и др.) было открыто большое разнообразие умеренно листопадных и жестколистных субтропических флор. Этими работами установлено бесспорное существование двух типов флор палеогена на территории Северного Приаралья, Тургаи и Зайсана и отчасти Центрального Казахстана. Более древний комплекс флор, по сходству их с жестколистной субтропической древней палеогеновой флорой Украины, А. Н. Криштофович (1946) назвал полтавской флорой, или аналогичной ей. Более молодую умеренно листопадную, не включающую элемента тропических жестколистных флор, А. Н. Криштофович назвал тургайской флорой на основании главных находок этой флоры в Тургае.

К сожалению, не всегда было надежно стратиграфическое положение находок, и поэтому долгое время эти флоры имели проблематический возраст. В основном определение находок велось по сравнению с известными и хорошо изученными флорами Западной Европы, и только А. Н. Криштофович неоднократно отмечал различие в составе одновозрастных флор из далеко отстоящих одно от другого местонахождений. Однако и к А. Н. Криштофовичу не всегда попадал надежно датированный материал. Обилие растительных остатков в отложениях континентальных фаций верхних горизонтов палеогена и многочисленные находки отпечатков растений в песчано-кварцитовых фациях его нижних горизонтов привлекали и привлекают по сию пору внимание многих палеоботаников, которые в большинстве случаев (по крайней мере так было до 40-х годов) полагались на определения возраста флороносных горизонтов, данные геологами, собравшими материал, а определения эти были не всегда точны.

Примером может служить не разрешенный до сих пор вопрос о соотно-



шении различных горизонтов континентальных отложений Тургай и соседних с ним районов. Некоторые геологи разделяют вторую свиту континентального олигоцена (индрикотериевую свиту) на три подсвиты (Лавров, 1951; Абузярова, 1954<sub>1</sub>), другие приходят к выводу о возможности двучленного деления этой же свиты (Бойцова и Покровская, 1954).

Критический разбор различных схем стратиграфического расчленения континентальных отложений требует особого внимания, и ему будет посвящен специальный раздел в общей сводной работе, здесь же автор остановился на нем лишь для демонстрации неосторожного применения палеонтологического метода обоснования стратиграфии, когда флористические данные привязываются к заранее составленной схеме. Схемы же эти еще требуют доработки.

Во всяком случае не будет ошибочным считать, что в 40—50-х годах началось систематическое изучение классических местонахождений флоры и появилось стремление к более точному определению ее стратиграфического положения, для того чтобы эта флора могла в дальнейшем быть действительно руководящей при расчленении осадочных отложений.

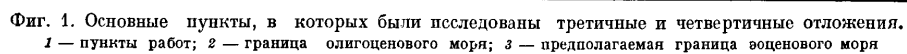
Систематическое изучение ископаемых растительных остатков совпадает с периодом развертывания работ по детальному изучению континентальных и морских отложений Тургай, Северного Приаралья, Северного и Центрального Казахстана и Западной Сибири, где ставятся поиски и ведется разведка полезных ископаемых, связанных с этими отложениями. В этот период, период наших дней, широко применяется метод спорово-пыльцевого анализа. Существующие в настоящее время схемы распределения руководящих спорово-пыльцевых спектров палеогена Тургай (Бойцова и Покровская, 1954; Абузярова, 1954<sub>1,2</sub>; Ржанникова, 1956) касаются в основном континентальных отложений и ставят перед собой задачу обоснования детального их расчленения.

В 1953 г. появляется первая работа автора о результатах спорово-пыльцевых анализов морских и континентальных отложений Павлодарского Прииртышья (Заклинская, 1953<sub>1</sub>), а затем — работа о спорово-пыльцевых спектрах морских отложений палеогена Северного Приаралья (Заклинская, 1953<sub>3,4</sub>). В этих работах автор делает попытку выделить характерные спорово-пыльцевые спектры, которые могли бы служить для характеристики изменения флоры в течение палеогена и отчасти неогена и для корреляции разновозрастных отложений Арало-Тургайской и Прииртышской впадин.

В процессе дальнейших исследований автор пришел к выводу, что флористически близкие спектры Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья в ряде случаев разнятся по своему составу. Корреляция таких спектров возможна лишь при тщательном изучении видового состава ископаемых спор и пыльцы и лишь путем сопоставления массового материала, собранного из различных фаций разновозрастных отложений. Такая работа автором ведется. В процессе ее вылилось в самостоятельный раздел изучение пыльцы голосеменных, которая, как это будет видно из дальнейшего изложения, может применяться для целей корреляции разновозрастных осадочных отложений.

Имея в своем распоряжении местные схемы стратиграфического положения свит морского и континентального палеогена, используя полевые наблюдения и откинув на время определение возраста этих свит, автор попробовал произвести анализ последовательного распространения голосеменных, входящих в состав спорово-пыльцевых спектров, полученных в результате обработки опорных и сводных разрезов.

Проследив от горизонта к горизонту состав голосеменных, автор поставил своей целью наметить первоначальную схему типов спектров, характерных для времени формирования отложений каждой из исследованных



свит. В выделенных типах или группах спектров интересно было выявить роды или, где это было возможно, виды или секции голосеменных, которые играли роль руководящих в общей флоре и в растительном покрове различных ценозов. Таким представлялся путь, которым можно подойти к выделению видов и родов голосеменных, могущих иметь коррелирующее значение для стратиграфического расчленения кайнозойских, в данном случае — палеогеновых отложений.

В 1950 г. Отделом четвертичной геологии Института геологических наук Академии наук СССР под руководством К. В. Никифоровой было начато детальное изучение геоморфологии и геологического строения Прииртышской впадины. Геология Северного Приаралья представлена в монографической сводке А. Л. Яншина (1953), очерки геологического строения и палеогеографии Тургая даны в статьях В. В. Лаврова (Лавров и Соболева, 1948; Лавров, 1949; Овечкина 1954, 1955).

Спорово-пыльцевые анализы велись по материалам, собранным К. В. Никифоровой, А. Л. Яншиным, В. И. Самодуровым и автором. Описания и разрезы обнажений и выработок, из которых серийно отбирались пробы для анализов, и данные по цифровым подсчетам в настоящем сообщении не приводятся, так как этому отведена специальная глава в сводной работе. Описание же сводного опорного разреза, суммарные данные по распределению спорово-пыльцевых спектров в различных горизонтах этого разреза и основные палеофлористические выводы приводятся ниже для Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья, а также отчасти для некоторых пунктов Тургайской впадины.

Всего исследовано 42 естественных обнажения, 8 скважин и 5 зачисток; проанализировано 700 проб, из которых большинство оказались в той или иной мере пыльценосными. Дополнительно были проделаны единичные анализы из обнажений, расположенных по восточному борту Тургайского прогиба; на р. Джилаңчик (у могилы Рахмет) — материалы В. И. Самодурова; уроч. Амангельды — материалы Н. А. Лисицыной; из месторождения Ашу-Тасты — материалы В. Н. Разумовой; оз. Ашу-Таса — материалы М. Ф. Нейбург. Перечисленным коллегам приношу большую благодарность за интересный и ценный материал.

Все эти материалы были технически обработаны в лаборатории спорово-пыльцевого анализа Отдела четвертичной геологии Института геологических наук Академии наук СССР лаборантом Н. П. Звездиной<sup>1</sup> при помощи сепарационного и ангидридного метода В. П. Гричука. Фотографирование объектов произведено заведующим фотолабораторией Отдела стратиграфии ИГН АН СССР А. И. Никитиным и техником Гидропроекта Н. В. Смирновым. Все определения, подсчеты, описания и зарисовки произведены автором за время трехгодичной обработки материалов.

В Павлодарском Прииртышье изучены спорово-пыльцевые спектры из разрезов на оз. Селеты-Тениз (обн. 42, 1952 г.), оз. Кызыл-Как (обн. 44, 47, 48, 1952 г.), оз. Жалаулы (обн. 15, 16, 43, 1952 г.), оз. Кудай-Куль (шурф 1, скв. 1, 1951 г.), оз. Алтыбай-Сор (обн. 102, 1953 г.), оз. Кемир-Туз (обн. 128, 129, 1326, 1951 г. и обн. 6, 6а, 7, 1952 г.), пос. Кайнама (скв. 181, 1951 г.), пос. Подпуск (скв. 3, 4, 5, 1950 г.), пос. Парамоновка (скв. 1 и 2, 1951 г.), г. Павлодар (скв. 3, 1951 г.), оз. Маралды (обн. 177, 1951 г. и 66, 66а, 1952 г.), пос. Майское-Семиярское (обн. 182, 1951 г.), р. Чидерты (обн. 55, 1951 г.), правый берег р. Иртыша (обн. 4, 10 и 12, 1952 г.) и ряд мелких обнажений, зачисток и шурфов в промежуточных пунктах между этими обнажениями (фиг. 1).

<sup>1</sup> Дополнительную серию анализов по Приаралью производила старший лаборант Г. М. Братцева.

## **1. КРАТКИЙ ОЧЕРК ГЕОЛОГИИ И ПАЛЕОГЕОГРАФИИ ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ И НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОЛОГИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ ТУРГАЙСКОЙ ВПАДИНЫ**

Павлодарское Прииртышье, так же как Тургайское плато и Северное Приаралье, было областью широкого развития осадочных отложений различного генезиса, с которыми связан ряд полезных ископаемых.

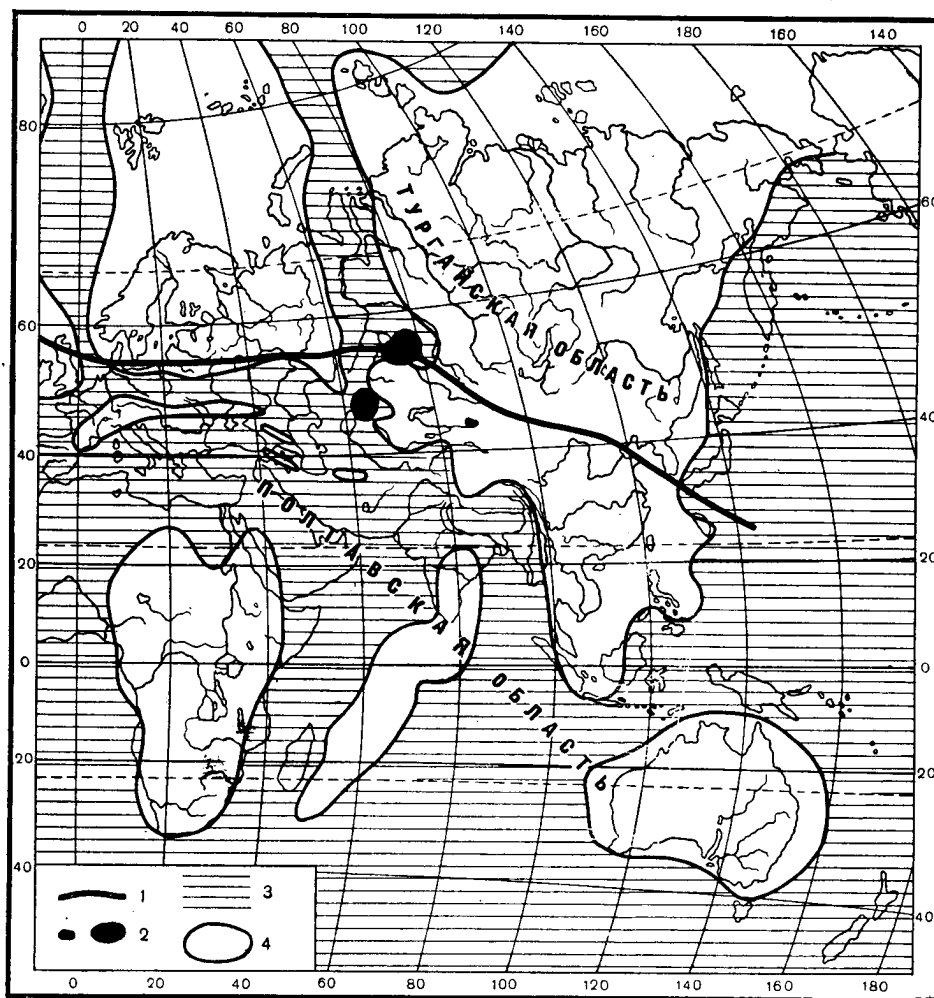
Общее направление в истории формирования осадочных толщ, связь районов с единым палеогеновым морским бассейном, а также широкое развитие тектонических движений, синхронно развивавшихся во всех этих районах, позволяет проводить корреляцию осадочных отложений.

В нижнем палеогене перечисленные районы представляли в большей своей части дно обширных морей — эоценового, а затем нижнеолигоценового, связанных Тургайским проливом с северным океаном и древним средиземноморским бассейном. Моря эти омывали берега огромного полуострова, занимавшего территорию нынешнего Казахского нагорья (Киргизия), а также южные оконечности Европейского материка (Мугоджары). На юге располагались острова Большого Кавказа и Средней Азии.

Начиная со среднего олигоцена море начало регрессировать, освобождая постепенно все большие и большие участки суши в направлении на север и на запад от Казахского нагорья. Море неоднократно меняло свои очертания, и были периоды, когда оно снова заливало берега и снова отступало, оставляя после себя мелководные осадки с фауной акул и раковинами моллюсков. Окончательно установился континентальный режим в Павлодарском Прииртышье в начале среднего олигоцена. В Северном Приаралье в среднем олигоцене еще существовали обширные солоноватоводные бассейны, временами имевшие связь с основным пра-Аральским озером-морем; здесь только к миоцену можно считать континентальный режим окончательно установившимся (Вахрамеев, 1941, 1949; Яншин, 1953).

Северное Приаралье и Павлодарское Прииртышье имеют близкое широтное расположение и граничат с Казахским нагорьем, которое в течение всего кайнозоя было сушей. Надо полагать, что в основном Казахское нагорье было центром распространения пыли и спор, сносившихся в морские и солоноватоводные отложения этих районов. Поэтому можно было заранее предполагать, что во флористическом отношении спектры, выделенные из морских отложений Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья, должны иметь много общих форм. Однако западное положение Приаралья и относительная близость к нему выступа суши Мугоджар, растительность которых также была источником пыли и спор, позволили полагать, что спектры Приаралья и Прииртышья будут отражать растительность различных формаций.

А. Н. Криштофович (1946) в своей работе об эволюции растительного покрова отмечал, что при сопоставлении флористических данных из удаленных районов необходимо давать себе ясный отчет о различии понятий «флора» и «растительность» и не упускать из вида существование в прошлом различных формаций, которые могли сменяться в пределах одной и той же флоры.



Фиг. 2. Фитогеографические области в палеогене (по А. Н. Криштофовичу).

1 — граница Тургайской и Полтавской фитогеографических областей; 2 — районы работ;  
3 — море; 4 — суша

В то время, когда на месте Павлодарского Прииртышья было расположено эоценовое море, граница между Полтавской тропической и Тургайской умеренной ботанико-географическими провинциями (областями) проходила примерно близ южной части долины нынешнего Иртыша и далее — к Среднему Уралу, Москве, Ленинграду, Дании и Британским островам (фиг. 2). Таким образом, Северное Приаралье и Тургайское плато целиком входили в область тропическую; Павлодарское Прииртышье было расположено на границе этих двух областей; Западно-Сибирская низменность находилась несколько севернее этой границы, т. е. уже в Тургайской умеренной области (в южных ее пределах). Эти обстоятель-

ства на фоне некоторой общности физико-географической обстановки и тектонического режима создавали своеобразные условия формирования морских, континентальных и солончатоводных осадков в этих районах. Это необходимо учитывать при сопоставлении данных спорово-пыльцевых анализов с данными по макроскопическим растительным остаткам, так как состав растительности и даже флора Павлодарского Прииртышья, Северного Приаралья, Тургая и Западной Сибири в палеогене и неогене могли быть несколько различными.

#### ПАВЛОДАРСКОЕ ПРИИРТЫШЬЕ

Прииртышская впадина, частью которой является Павлодарское Прииртышье, расположена по северо-восточной границе Казахского нагорья. С востока она примыкает к Западно-Сибирской низменности, а с запада граничит с Тургайским плато и с Северным Приаралем.

Геоморфологическое строение Павлодарского Прииртышья, по данным К. В. Никифоровой (1953), представляется в следующем виде.

Граничащее на юге с Прииртышской впадиной Казахское нагорье состоит из двух структурных областей: горно-холмистой, сложенной палеозойскими породами и являвшейся в мезозое и кайнозое областью сноса, а в период палеогеновых морских трансгрессий остававшейся сушей, и области приподнятого плато, краевой зоны Казахского нагорья, которая была сушей вплоть до трансгрессии олигоценового моря.

По краю Казахского нагорья протягивается узкой полосой так называемая палеогеновая равнина, которая целиком заливалась эоценовыми и нижнеолигоценовыми морями. Далее к северу и северо-востоку расположена так называемая неогеновая озерно-аллювиальная равнина, которая заливалась и эоценовыми и олигоценовыми морями, а в миоцене была областью широкого развития озерных континентальных отложений, перекрытых в последующие века плиоценовыми и четвертичными осадками.

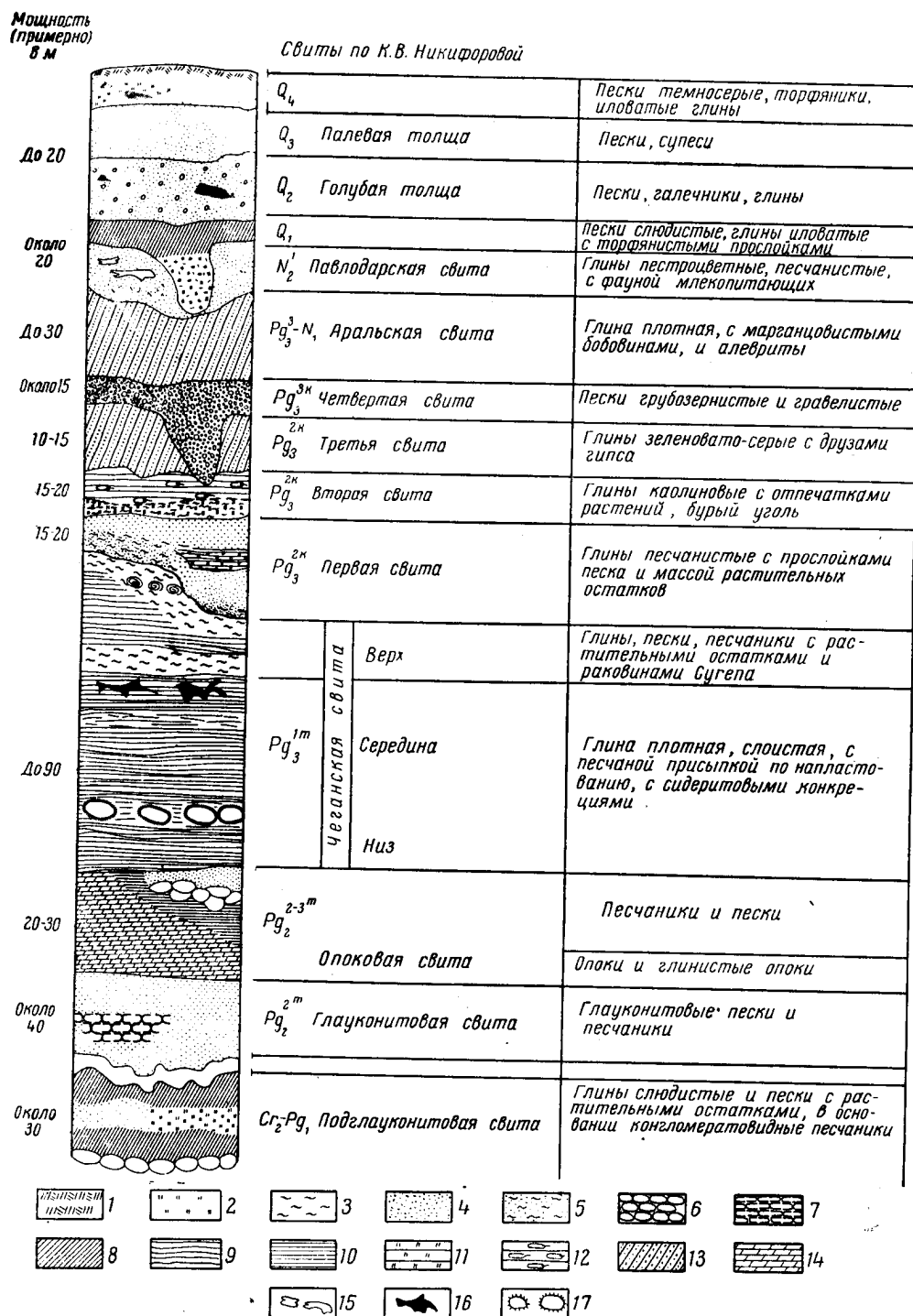
Горно-холмистая область и область приподнятого плато Казахского нагорья, а также палеогеновая равнина, расположенная по краю нагорья, в палеогене претерпевали тектонические поднятия, что послужило причиной того, что они, либо целиком, либо частично (как это отмечает К. В. Никифорова для области палеогеновой равнины), оставались сушей в период морских трансгрессий.

Область неогеновой озерно-аллювиальной равнины оставалась в состоянии относительного покоя, вследствие чего здесь шло более или менее непрерывное накопление как морских, так и континентальных осадков. К этой области в основном и приурочены все пункты, из которых производились спорово-пыльцевые анализы, так как в них наиболее полно представлены все фации морских и континентальных отложений, от палеогена до четвертичных.

Последовательное залегание пород в районе Прииртышской впадины, выраженное прекрасными разрезами в перечисленных пунктах и большим керновым материалом по скважинам, представляется (снизу вверх) в следующем виде (фиг. 3).

#### Подглауконитовая свита (мел — палеоген(?))

Тонкопесчанистые слюдистые глины, алевролиты и пески, залегающие на конгломератовидных песчаниках. Фаунистических находок нет. Пыльцевая флора носит признаки переходной от меловой к палеогеновой. Здесь обнаружено обилие спор, преобладающих над пылью цветковых растений. Споры принадлежат к родам *Ceratopteris*, *Gleichenia*, *Dicksonia* и др. Голосеменные в основном представлены родами *Cedrus*, *Podocarpus*, *Dacrydium*



Фиг. 3. Павлодарское Приптышье. Сводный разрез кайнозойских отложений.

1 — почва; 2 — торфяник; 3 — лигнит; 4 — песок; 5 — песок с лигнитом; 6 — песчаник; 7 — глауконитовый песчаник; 8 — глина; 9 — глина слоистая; 10 — глина плотная; 11 — глина торфянистая; 12 — глина с отпечатками флоры; 13 — глина с марганцовистыми «бобовинами»; 14 — опока и опоковая глина; 15 — кости млекопитающих; 16 — ископаемая древесина; 17 — сидеритовые стяжения

и сем. Cupressaceae с примесью Araucariaceae (в основном пыльца рода *Agathis*). Покрытосеменные представлены сем. Magnoliaceae, Palmae, Myrtaceae, Moraceae, Lauraceae, Leguminosae и др. В то же время единично встречаются пыльцевые зерна *Ostrya* sp. и одного вида *Betula* sp. Материал по слюдистым глинам обрабатывался не только автором, но и в Лаборатории спорово-пыльцевого анализа Отдела стратиграфии ИГН АН СССР, где определен комплекс, близкий к схематически охарактеризованному выше, и дано заключение о наличии субтропической флоры, содержащей виды и роды растений, встречающихся и в третичных и в верхнемеловых отложениях Казахстана и Сибири. Перечень всех форм, выделенных из слюдистых глин, помещен в работе автора по спорово-пыльцевым спектрам Северного Казахстана (Заклинская, 1953).

Условно толща слюдистых глин, богатых растительными остатками и пылью, отнесена ко времени переходному от мела к палеогену, и на общей схеме обозначена как мел — палеоген. Мощность отложений этой пачки слюдистых глин около 30 м.

#### Глауконитовая свита (палеоцен — эоцен)

Глауконитовые пески и песчаники, часто кремнистые, приурочены на юге отчасти к центральным частям впадины, на севере же (низовья р. Селеты) — к прибортовой части впадины, где они представлены кремнисто-глауконитовыми песчаниками с горизонтом песчано-глауконитовых конкреций в низах. Микрофауна и флора в этих отложениях не обнаружена. Общая мощность отложений около 40 м.

Свита глауконитовых песков и песчаников названа К. В. Никифоровой «глауконитовой толщей» и выделена в самостоятельную свиту палеоцен-эоценового возраста (аналог тасаранской свиты Северного Приаралья).

Свита, литологически близкая к глауконитовой толще, развита в Северном Приаралье в прибортовых частях Аральской депрессии, а в центре сливается с толщей опок. По мнению А. Л. Яншина, опоковая толща и свита глауконитовых песков синхронны, и время их отложения относится к эоцену, но так как глауконитовая толща не имеет ни фаунистических, ни флористических остатков, то сопоставление ее с близкими литологическими свитами — условное.

#### Опоковая свита (средний — верхний эоцен)

Глинистые опоки и опокovidные глины с редкими прослоями кремнистого песчаника, с примесью зерен глауконита залегают в основном в центральных частях юга Прииртышской впадины. Микрофауна не обнаружена. Анализ диатомовых водорослей указывает на верхнеэоценовый возраст этих отложений. В северных районах Прииртышья, в низовьях р. Селеты, опоковая толща замещается плотными шоколадными глинами, литологически близкими к глинам тасаранской или саксаульской свиты (средний — верхний эоцен) в Северном Приаралье.

Флора опоковой толщи, выделенная по пылице, представлена субтропическим, возможно, и тропическим комплексом, с большим количеством спор древовидных папоротников. Голосеменные представлены родами *Cedrus* (несколько видов), *Podocarpus*, *Araucaria*, *Agathis*. Покрытосеменные в основном представлены сем. Moraceae, Myrtaceae, Sapindaceae, Palmae, Diospyraceae, Lauraceae родами *Quercus* sp. и *Castanea* (?). В общем спектры характеризуют полтавскую субтропическую (или тропическую) флору, жестколистную и близкую к флоре западного склона Мугоджар, где В. И. Барановым описана флора прибрежnomорской фации осадков тасаранского моря, по датировке А. Л. Яншина, — средний эоцен — низы



верхнего эоцена. Подробный перечень всех форм, встреченных в отложениях опоковой толщи, опубликован автором в работе 1953 г.

В верхних горизонтах толщи найдена пыльца *Capparidaceae*, *Leguminosae*, *Umbelliferae*, а также отмечена единичная находка пыльцы, морфологически близкой к пыльце современного рода *Welwitschia*. Находка пыльцы этого, до сих пор еще не разгаданного растения, которое в современной флоре известно только в пустыне Намиб в Южной Африке, чрезвычайно интересна. С точки зрения ландшафтных зон, Намиб — пустыня; по данным Кемпбела (1948), это пустыня с жарким климатом и особенно малым выпадением осадков. Е. В. Вульф (1944) отмечает, что в Намибе, несмотря на почти полное отсутствие осадков в виде дождя, весьма велика влажность воздуха и что гигантские листья вельвичии приспособлены к поглощению влаги из туманов и росы. На основании этого Е. В. Вульф приходит к выводу, что вельвичия является реликтовым растением, оставшимся от того времени, когда климат Южной Африки был более влажным. Во всяком случае находка пыльцы вельвичии в отложениях опоковой толщи Павлодарского Прииртышья представляет большой интерес и, по-видимому, должна послужить материалом для специального исследования, тем более, что произрастание ее в эоцене отмечено не впервые. А. А. Чигуревой (1951<sub>3</sub>) описано зерно вельвичии из эоценовых горючих сланцев в Западном Казахстане, а в 1954 г. Р. Я. Абузярова (1954<sub>2</sub>) также отмечает находки пыльцы этого растения в отложениях Шинтузая в Тургае (по определению автора, эти отложения относятся к нижнему — среднему олигоцену). При этом Р. Я. Абузярова отмечает, что находке вельвичии сопутствует флора *Sassafras*, *Sterculia*, *Capparidaceae* и *Cinnamomum*, свидетельствующая об аридности климата в период отложения осадков<sup>1</sup>.

С другой стороны, в спектрах из опоковой толщи среди пыльцы голосеменных найдены *Cedrus*, а среди покрытосеменных — *Alnus* и *Corylus*, присутствие которых должно свидетельствовать о наличии местообитаний с относительно большой влажностью. Можно допустить, что пустынный и ксерофильный элемент флоры был приурочен к каким-то локальным условиям и что пустынно-ксерофильные растения составляли реликтовые ассоциации, пережившие с верхнего мела (?).

Мощность отложений опоковой толщи около 25—30 м. Возраст свиты предположительно отнесен к верхнему эоцену. Сопоставляется опоковая свита с отложениями саксаульской свиты А. Л. Яншина в Северном Приаралье. Одновозрастными с этой свитой следует считать континентальные отложения сливных дырчатых песчаников Южного Урала, кварцитовых песчаников Северного Казахстана в пределах Казахского нагорья, возможно, и песчаников горы Уши на Среднем Поволжье, где неоднократно была найдена обильная флора жестколистного ксерофитного облика, свидетельствующая о засушливом климате, характеризующемся продолжительными периодами в году, лишенными каких-либо осадков.

В низовьях р. Селеты, в северной части Прииртышской впадины, прослеживается свита белых, серых и желтоватых кварцевых песков, иногда сцементированных в плотные кварцитовые песчаники или содержащих караван этих песчаников. Свита эта залегает непосредственно на шоколадных глинах, замещающих в низовьях р. Селеты толщу опоковых глин.

По литологическому составу и залеганию на шоколадных глинах эту свиту песков К. В. Никифорова сопоставляет с саксаульской свитой Северного Приаралья, которая там охарактеризована своеобразными по

<sup>1</sup> Определенные Р. Я. Абузяровой формы, отнесенные ею к роду вельвичия, не описаны и изображения их не приведены, так что находки, в особенности ввиду их высокого стратиграфического положения, следует подтвердить повторными анализами.

составу спорово-пыльцевыми спектрами, включающими элементы тропической лесной флоры с типичными травянистыми и кустарничковыми ксерофитами: *Nitraria* cf. *Schoberi*, *Chenopodiaceae*, *Myrtaceae*, *Cactaceae*(?). Наличие ксерофитов свидетельствует о пустынном режиме, возможно, в течение небольшого промежутка времени и на сравнительно небольшой территории.

#### Чеганская свита (нижний олигоцен)

На всей территории южной части Прииртышской впадины на свите глинистых опок залегает чеганская свита, представленная зеленовато-серыми глинами различных оттенков. Обычно эти глины слоисты, с пыльной тонкой песком по напластованию; они рассланцовываются при выветривании.

В верхней части свиты проходят пропластки глин с многочисленными караваями сидеритовых конкреций. В самых же верхних горизонтах толщи сосредоточены многочисленные остатки древесины, стволов деревьев, торфянистые прослойки.

Мощность свиты глин у края Казахского нагорья не более 1—2 м, а в центральной части впадины достигает до 90 м. Глины содержат зубы акул *Lamna vincenti* (Winceler) Woodn. и много пыльцы по всей толще.

Спорово-пыльцевые спектры, выделенные из ряда проб, содержат в основном пыльцу покрытосеменных растений с небольшой примесью голосеменных. Спектры отличаются от спектров опоковой толщи несколько меньшим участием пыльцы субтропических растений и в основном характеризуют лесные ценозы. Наиболее распространенными семействами и родами являются: *Engelhardtia*, *Araliaceae*, *Ilex*, *Staphyleaceae*, *Nyssa*, *Ostrya*, *Carpinus*, *Sapotaceae*, *Magnoliaceae*, *Diospyrus*, *Menispermaceae*, *Moraceae* с небольшой примесью *Buxaceae*, *Palmae*, *Oleaceae*, *Rhus*, *Euphorbiaceae*, *Myrtaceae*, *Leguminosae*, *Umbelliferae* и др. Среди голосеменных приобретает значение пыльца *Taxodium* aff. *distichum* и увеличивается содержание пыльцы *Picea*, *Tilia*, *Acer*, *Ulmus*, *Carya*, *Pterocarya* и др. Период относительно влажного субтропического климата, по-видимому, вызывает усиленное распространение рода *Cedrus*, отдельные виды которого расселяются по повышенным местообитаниям. Однако, кроме пыльцы, характерной для лесных ассоциаций, спектры содержат и представителей семейств, которые известны для полупустынных элементов ландшафта, а именно: *Euphorbia*, *Sterculia*, некоторые виды сем. *Umbelliferae* и *Leguminosae*. Поэтому можно полагать, что на территориях, удаленных от моря, а возможно, и на приморских участках в зонах литоралей, могли располагаться и полупустынные ассоциации.

Забегая несколько вперед, отмечу, что в спектрах из литологически близких отложений по восточному борту Тургайской впадины (в районе Наурзумского заповедника) выделены спорово-пыльцевые спектры, содержащие большое количество пыльцы полупустынных растений. Однако спектры, выделенные из толщи зеленовато-серых глин в Прииртышье, свидетельствуют о том, что климат в период их отложения был, по-видимому, более влажным, чем в предыдущую эпоху, а колебания температур в течение года были менее резкими. Об этом свидетельствует значительная примесь пыльцы растений тех семейств и родов (*Acer*, *Ulmus*, *Tilia*, *Quercus*, *Carya* и др.), которые играют преобладающую роль в тургайской флоре.

Свита слоистых серо-зеленых глин с караваями сидерита прекрасно сопоставляется с глинами чеганской свиты в Северном Приаралье. О. С. Вялов (1930), впервые выделивший эту свиту для Приаралья, определяет ее возраст как верхний эоцен — нижний олигоцен включительно;

А. Л. Яншин (1953) считает, что время формирования ее целиком укладывается в нижний олигоцен; К. В. Никифорова в последнее время склоняется к тому же мнению; Н. К. Овечкин и группа ленинградских геологов с И. М. Покровской и Е. П. Бойцовой склонны присоединиться к мнению О. С. Вялова о более раннем начале формирования свиты; геологи Казахской ССР (Лавров и Соболева, 1948; Лавров, 1949) считают чеганские отложения нижнеолигоценными.

Если основываться на типах спорово-пыльцевых спектров, выделенных из более древних отложений (опоковая толща, тасаранская и саксаульская свиты Павлодарского Прииртышья, Северного Приаралья и Тургая), и более молодых (чеганская свита), то можно допустить, что начало трансгрессии чеганского моря произошло несколько ранее того времени, когда на суше установилась растительность, сравнительно «умеренная» по сравнению с эоценовой, так как флора нижних слоев чеганских глин и верхних горизонтов саксаульских (кстати сказать, и литологически близких) очень близка.

#### Верхи чеганской свиты — первая свита (верх нижнего — низ среднего олигоцена)

В прибрежных частях чеганского моря, близ границ его с Казахским нагорьем, на чеганских глинах залегают глины светлосерые, переслаивающиеся со светлосерыми или омарганцованными алевроитами, с прослоями песка, иногда с присыпками марганца, иногда с караваями марганцовистого сидерита.

К этой свите приурочены прослои и линзы битой ракушки из створок *Cyrena* cf. *semistriata* Desh., сцементированной марганцовистым сидеритом. Эта же свита содержит позвонки акул и скатов и зубы акул.

Пыльца и споры в отложениях свиты не обнаружены. Но в омарганцованных песчаниках на оз. Джаман-Туз (к северо-востоку от оз. Кудай-Куль) найден обломок средней части кожистого листа *Quercus* sp., весьма близкого к виду рода *Quercus*, определенного В. А. Вахрамеевым в отложениях верхнего эоцена на Южном Урале, где остатки его были обнаружены совместно с листьями *Andromeda protogea* и *Cinnamotum* (Lauraceae), т. е. с флорой, близкой к флоре кварцитовых песчаников саксаульской свиты в Приаралье. Отложения на восточной части Устьюрта, подобные описанным выше О. С. Вяловым (1930), относятся к верхам чеганской свиты, т. е. к верхам нижнего олигоцена. Находка остатков жестколистной флоры в олигоценных песчаниках отчасти и не противоречит чеганскому возрасту свиты, так как в спектрах чеганских глин встречается пыльца дубов, обладающая бугорчатой структурой экзины, которая характеризует жестколистные виды этого рода.

Флора светлосерых глин и алевроитов у оз. Джаман-Туз (по данным К. В. Никифоровой, отложения эти относятся к первой свите континентального олигоцена) сопоставляется с флорой Шинтузая, которую Р. Я. Абузярова (1954<sub>2</sub>) относит к серии индрикотериевых слоев Тургая, выделяя в отдельную подсвиту индрикотериевой свиты — «пристинотериевые слои». В списке флор, обнаруженных Р. Я. Абузяровой, значатся *Sterculia*, *Myrtaceae*, *Anacardiaceae*, *Platanus*, *Capparidaceae*, *Cynnamotum*, *Laurus*, *Sassafras*, *Diervilla*, *Leguminosae*, *Welwi tschia*, а наряду с ними представители умеренной флоры: *Taxodium*, *Alnus* cf. *incana*, *Ostrya* cf. *virginica*, *Quercus* cf. *rex* и др.

Все это согласуется с данными В. А. Вахрамеева о жестколистной флоре песчаников Джаман-Туз. Находка такой флоры в отложениях, залегающих непосредственно на чеганских глинах и содержащих смешанную морскую и пресноводную фауну, заставляет полагать, что флора, близкая к

к ксерофитной флоре саксаульского времени, задержалась на территории Казахстана в олигоцене.

Можно допустить, что в олигоцене, в период отступления чеганского моря, эта растительность распространялась на прибрежных полосах суши. К сожалению, в отложениях на оз. Джаман-Туз не было обнаружено ни спор, ни пыльцы. В то же время в слоях с торфянистыми прослоями, в которые, по наблюдениям К. В. Никифоровой, переходят по простирацию глины и алевроиты с зубами акул и позвонками скатов, найдена богатая пыльцевая флора. Слои глин с торфянистыми прослоями, прослойками песков и с растительной трухой К. В. Никифорова относит уже к первой свите континентальных отложений среднего олигоцена. Пыльцевая флора этих отложений также типична для континентальных отложений среднего олигоцена и прекрасно сопоставляется с пыльцевой флорой первой (кутан-булакской) свиты в Северном Приаралье.

Следует отметить, что флора самых верхних горизонтов чеганских глин и слоев, относимых к первой континентальной свите, имеет много общих видов и родов, что не удивительно, так как время отложения этих осадков относится к самым верхам нижнего олигоцена и к самым низам среднего. Чеганское море отступало не одновременно на всей территории, и в то время, когда в районах, более удаленных от Казахского нагорья, еще располагались границы мелеющего моря, на территориях, свободных от моря, отлагались уже песчанистые, богатые растительными остатками отложения континентального или дельтового происхождения.

В верхних горизонтах чеганской свиты морского олигоцена закономерно прослеживаются слои растительной трухи со стволами деревьев. В этих отложениях выделено огромное количество пыльцы древесных и недревесных растений.

Мощность свиты непостоянна — от 5 до 20 м. Формирование свиты связано с мелководными фациями уже отступающего моря и началом континентального режима в Павлодарском Прииртышье. Отложения эти К. В. Никифорова относит к первой свите континентального олигоцена (средний олигоцен).

У оз. Аксуат в отложениях первой свиты К. В. Никифоровой найдены оолитовые железняки. Выходы оолитовых железняков обнаружены также в нижнем течении р. Карасу.

Спорово-пыльцевые спектры, выделенные в большом числе пунктов выходов первой свиты континентального олигоцена (по р. Карасу, у пос. Майского на р. Иртыш, у пос. Парамоновки и др.), свидетельствуют о близости растительных обитаний, так как содержат большое количество пыльцы травянистых растений.

Основным фоном спорово-пыльцевых спектров служит пыльца древесных широколиственных пород, преобладающих над пылью голосеменных растений. Среди пыльцы голосеменных значительно увеличивается значение болотного кипариса, присутствие которого отмечается уже со времени отложения чеганских глин (5—8%). Характерно присутствие пыльцы *тсуги*, которая в более молодых отложениях встречается лишь в виде единичных зерен.

Флора совершенно отлична от флор предыдущих, более древних отложений и характеризует типичный комплекс умеренной листопадной флоры Тургайской провинции (области) с небольшой примесью ксерофитов. Однако спектры эти еще недостаточно богаты пылью различных видов *Juglandaceae*, *Tilia*, и *Ulmus*, что характерно для спектров вышележащей второй свиты континентального олигоцена.

Отложения свиты с растительной трухой и оолитовыми песчаниками литологически и отчасти флористически могут быть сопоставлены с первой свитой континентальных отложений Северного Приаралья, отнесенных,

В. А. Вахрамеевым к солончатоводным осадкам, а Л. Н. Формозовой и А. Л. Яншиным — к дельтовым выносам рек начала среднего олигоцена, знаменующегося отступанием олигоценового (чеганского) моря.

### Вторая свита (средний олигоцен)

В области приподнятой палеогеновой равнины, примыкающей к Казахскому нагорью, выходят на дневную поверхность слои шоколадных глин и песков с пиритом, ярозитом и гипсом, а также с включениями янтаря и с прослоями лигнита.

Местами эти глины приобретают оттенки темносерых тонов, местами же они коричневатые-серые, розовые или почти белые. Обычно глины эти тонкослоистые, с прослоями кварцевых алевроитов (оз. Кемир-Туз). Такие глины содержат много растительного детрита и отпечатков листовой флоры. По простираю эти глины иногда замещаются тонкими алевроитами и песками. В верхней части они содержат прослои кварцевых песков и оолитов гидрогетитового происхождения. Свита эта хорошо сопоставляется со второй свитой континентальных отложений Северного Приаралья — «чиликтинской».

Из отложений второй свиты в обрывах р. Чидерты были выделены отпечатки растений, принадлежащие, по определению В. А. Вахрамеева, к *Cyperites* sp., *Salix tenera* A. Br., *Populus balsamoides* G o e r p., *Pterocarya* cf. *castaneaefolia* (G o e r p.) M e n z e l., *Salvinia Reussi* E t t. и *Adiantum* sp., возраст которых В. А. Вахрамеев не определяет точнее, чем миоцен — олигоцен.

Отложения второй свиты содержат богатый комплекс пыльцы и спор, характеризующий богатый расцвет широколиственной флоры с обилием хвойных, принадлежащих к различным родам, преимущественно *Pinus*, *Picea* и *Taxodium*. Появляется *Cedrus*. Иногда сем. *Pinaceae* преобладает над другими семействами и покрытосеменных и голосеменных растений.

Среди покрытосеменных подавляющее большинство принадлежит пыльце относительно мезофильных широколиственных пород с *Tilia*, *Quercus*, *Pterocarya*, *Juglans*, *Carya*, *Ulmus*, *Liquidambar*, *Acer*, *Alnus*, *Betula* и пр. Одновременно встречается большое количество травянистых ксерофитов с *Ephedra*, *Chenopodiaceae*, *Leguminosae*, *Artemisia* и других, присутствие которых свидетельствует о широком распространении открытых степных и полупустынных ассоциаций.

Флора этих слоев совершенно аналогична флоре второй и отчасти первой свиты в Северном Приаралье (кутанбулакская и чиликтинская), а также флоре индрикотериевой свиты (включая болаттамские слои) в Тургае.

В этом случае уже можно говорить не только о флоре, но и о составе растительности, которая во время отложения глин с отпечатками растений и углистых пластов, по крайней мере на 90%, состояла из умеренных листопадных растений и была представлена широколиственными лесами, смешанными борами с обильным участием различных сосен и кедра, прибрежно-речными зарослями ольхи и тенистыми зарослями вокруг обширных лесных болот с болотным кипарисом.

### Третья свита (средний олигоцен)

Местами на углисто-каолиновых глинах среднего олигоцена (вторая свита) в этих фациях, совпадающих с болаттамскими слоями Тургай которые В. В. Лавров выделяет в самостоятельную «наиндрикотериевую» свиту, с размывом залегает глина зеленая или зеленовато-серая, песчани-

стая или мылистая, а также ожелезненные пески с друзами гипса и с марганцовистыми бобовинами. Отложения эти сильно напоминают озерные глины нижнего миоцена, так называемые аральские слои. Флорой и фауной эти отложения не охарактеризованы, но по стратиграфическому положению выделены К. В. Никифоровой в третью свиту континентальных отложений (аналог «жаксыклычской» свиты Приаралья). Однако, за неимением флористических и фаунистических данных, стратиграфическое положение этой свиты еще окончательно не выяснено.

#### Четвертая свита (верхний олигоцен)

С размывом на слоях первой, второй или третьей свиты залегают плохо сортированные грубозернистые пески, гравелистые пески, белые пески с линзами плотных или пестрых каолиновых глин. Эти отложения (четвертая свита) развиты в области приподнятой палеогеновой равнины, окаймляющей палеозой Казахского нагорья. К. В. Никифорова определяет их как отложения потоков, стекавших с Казахского нагорья. Характерной чертой песчано-гравийной свиты является отбеленность и выщелоченность.

В северной части Прииртышской впадины эти отложения (оз. Кемир-Туз) налегают непосредственно на слои второй свиты и содержат разнообразную и богатую по составу пылецевую флору. Характеризует эта флора как лесные, так и открытые ценозы. В комплексе древесной растительности большое значение имеет сем. Pinaceae, в основном представленное сосной секций *Strobus* Schaw. и *Eupitys* Endl. *Taxodium* и *Tsuga* совершенно сходят на нет, но пыльца рода *Cedrus* (?) все еще встречается. Среди покрытосеменных в основном встречаются представители родов *Betula*, *Alnus*, *Corylus*, *Salix* с незначительной примесью широколиственных пород — *Quercus*, *Ulmus* и *Pterocarya*. Одновременно присутствует пыльца травянистых ксерофитов, что свидетельствует о развитии открытых сухостепных ассоциаций, которые продолжают существовать на территории Прииртышской впадины в течение всего олигоцена. Здесь встречаются несколько видов полыней, Plumbaginaceae, *Ephedra* нескольких видов, а также злаки и несколько видов рода *Allium* с небольшой примесью пыльцы растений лугово-разнотравного комплекса. Можно полагать, что в период отложения четвертой свиты на территории Прииртышья были развиты различные типы растительного покрова, в том числе, возможно, и саванны.

Флора и литологический состав четвертой (песчано-гравийной) свиты Прииртышья хорошо сопоставляются с флорой и строением тургайской свиты В. В. Лаврова, выделенной им в 1951 г. в Тургае.

Списки флоры из Кушука и Кзылжара, опубликованные Р. Я. Абузаровой, расходятся со списками пыльцы четвертой свиты отсутствием в них рода *Cedrus*. Между тем, по данным автора и по последним данным Е. П. Бойцовой, эта свита содержит пыльцу *Cedrus*. В Приаралье четвертая (чаграйская) свита, к сожалению, не содержит пыльцы (в материалах, собранных автором в районах залива Перовского). По данным же А. Л. Яншина (1953), в отложениях чаграйской свиты обнаружены отпечатки листьев: *Juglans acuminata* Brong., *Fagus antipofii* Heer, *Liquidambar europaeum* Brong., *Alnus nostrata* Ung., *Corylus macquarii* Forbes., *Phragmites oeninguensis* Brong., *Poacites* sp., *Monocotyledons* gen. sp.

На этом кончаются отложения палеогена в Северном Прииртышье. Выше залегает серия слоев различной мощности и генезиса, относящаяся уже к неогену.

### Аральская свита (нижний миоцен(?))

В центральной части Прииртышской впадины широко развиты отложения обширного пресноводного озера или ряда озер. Представлены эти отложения зелеными глинами с мергелями и гипсами и железистыми и марганцовыми бобовинами. В различных пунктах в толще этих глин обнаружены кости *Mastodon* sp., носорогов, хищников, грызунов, парнокопытных а также панцыри наземных черепах. По заключению Е. И. Беляевой, палеонтологические находки относятся к миоценовому комплексу (от нижнего до среднего). В аналогичных глинах в Тургае, у развалин могилы Рахмет, Е. И. Беляевой определена разнообразная фауна, которую она также датирует как миоценовую(?): *Trilophodon (Serridentunus) inopinatus*, *Mastodon atavus*, *Aceratherium depereti*, *Brachypotherium aurelianense* var. *gailiti*, *Artiodactyla*, *Testudo turgaica*, *Anchitherium aurelianense*, *Dicrocerus* sp., *Chalicotheridae*, *Mastodon* sp., *Rhinocerotidae* и черепахи.

К сожалению, все попытки обнаружить пыльцу в отложениях миоценовых мылистых глин не увенчались успехом и только в одной пробе из скв. 2 близ Павлодара в образце из серых глин со следами зеркал скопления была выделена умеренная флора, представленная в основном пыльцой покрытосеменных. Участие хвойных ничтожно — единичные зерна *Pinus*, *Picea*, *Taxus*, *Cupressaceae*.

Покрытосеменные представлены пыльцой древесных с *Alnus*, *Betula*, *Carpinus*, *Corylus*, *Acer*, *Ostrya*, *Ulmus*, *Celtis*, *Ilex*, *Buxaceae*, *Rhamnus*, *Rhus* (3 sp.) и большим количеством пыльцы трав и полукустарничков из семейств *Gramineae*, *Umbelliferae*, *Leguminosae*, *Euphorbiaceae* и рода *Artemisia*.

Состав спорово-пыльцевых спектров свидетельствует о широком распространении растительности открытых местообитаний и о существовании островных или галерейных лесов смешанного типа. Ксерофитность растительности сказывается на значительном участии пыльцы различных видов сумаха, котинуса, дзельквы.

### Павлодарская свита (миоцен — плиоцен)

По долине Иртыша, от Павлодара до пос. Лебяжье, вскрываются мощные толщи мио-плиоценовых отложений с богатой гиппарионовой фауной, описанной Ю. А. Орловым (1930, 1937, 1939, 1941 и др.). Литологически эти отложения представлены пестроцветными песчаными комковатыми глинами и алевроитами с несколькими горизонтами погребенных почв. Распространены иловатые супеси и пески. Фауна представлена гиппарионом, носорогом, различными парнокопытными, черепахами и страусами.

Пыльцевая флора чрезвычайно бедна, но все же единичные спектры указывают на наличие типичного открытого сухостепного ландшафта с обилием травянистых ксерофитов и единичными экземплярами древесных растений из родов *Betula* и *Pinus*. Спектры, выделенные из плиоценовых отложений, на 80% состоят из пыльцы трав и полукустарничков, представленных сем. *Chenopodiaceae*, *Gramineae*, *Plumbaginaceae*, родами *Artemisia* и *Ephedra* и группой разнотравья с *Leguminosae*, *Ranunculaceae*, *Rosaceae*.

### Четвертичные отложения

Отложения нижнечетвертичные или переходные от плиоцена к нижнечетвертичным представлены голубовато-серыми тонкослюдыстыми песками и иловатыми слоистыми глинами с торфянистыми прослоями. Развиты они

не повсеместно и тяготеют к правобережью р. Иртыш. Нижнечетвертичные отложения содержат фауну млекопитающих, определенных Е. И. Беляевой и В. И. Громовым как *Elasmotherium*, *Equus Stenonis* (возможно, *sussenbornensis*), *Rhinoceros* sp. Пыльцевые спектры содержат в основном пыльцу травянистых ксерофитов, по составу чрезвычайно близких к современной флоре. Но среди пыльцы древесных пород встречаются такие роды как *Nyssa*, *Rhus*, *Carpinus*, а в числе голосеменных — *Pinus* секции *Strobus* и сем. Cupressaceae. Таким образом, можно полагать, что растительность нижнечетвертичного периода, возможно, самых верхов плиоцена, была близка к современной, но отличалась примесью некоторых родов, игравших еще в неогене ведущую роль.

Среднечетвертичные отложения, слагающие толщу второй надпойменной террасы Иртыша, обычно залегают с размывом на подстилающих породах. Мощность этих отложений 20—25 м. Среднечетвертичные отложения представлены обычно песками и галечниками или серовато-голубыми глинами, что и послужило причиной того, что К. В. Никифорова выделила их под названием «голубой толщи». Комплекс фауны, определенной В. И. Громовым, относится им ко времени, совпадающему с эпохой максимального оледенения на русской платформе. Здесь встречаются *Elephas trogonterii*, *Elephas antiquus*, *Bison priscus longicornis*, *Cervus* sp., *Felis* sp., *Equus* sp. и др.

Пыльцевые спектры, по данным О. В. Матвеевой (1953), содержат пыльцу ели, что косвенным путем может отражать состояние некоторого похолодания на территории Казахстана в связи с продвижением льдов. Однако присутствие ели отмечено сравнительно в небольших количествах, и основной тип спектров остается по-прежнему степным с обилием травянистых ксерофитов. По-видимому, продвижение ели к югу происходило по речным долинам, как это и отмечает в своей работе О. В. Матвеева.

Так называемая палевая толща, выделенная для Прииртышья К. В. Никифоровой как верхнечетвертичные отложения, сопоставляется с отложениями первой надпойменной террасы Иртыша. Представлена эта серия осадков песками и супесями с костями: *Elephas primigenius* (поздний), *Bison priscus longicornis*, *Equus caballus*, *Bos* sp., *Cervus* (cf. *elaphus*), *Careolus* sp., *Saiga tatarica*.

Пыльцевые спектры в основном представлены родами *Artemisia*, *Chenopodium*, *Atriplex*, *Salsola*, а среди древесных пород единично встречается пыльца *Picea* sp., *Pinus* aff. *silvestris*; во всех спектрах присутствует пыльца *Ephedra*.

Позднечетвертичные отложения широко распространены в долинах рек. Представлены они обычно темносерыми песками, торфяниками и иловатыми глинами. Среди этих отложений встречаются остатки домашних животных с *Equus caballus*, *Ovis aries*, *Bos taurus*, *Canis* и многочисленные остатки керамики.

Пыльцевые спектры весьма схожи со спектрами из поверхностных проб Павлодарского Прииртышья и содержат массу пыльцы трав со значительным участием *Ephedra*.

Сложная и своеобразная тектоническая обстановка в палеогене, выразившаяся в неоднократных поднятиях, изменивших рельеф Казахского нагорья и прилегающих к нему районов, послужила причиной того, что границы палеогеновых морских трансгрессий и регрессий были несинхронны для различных участков Прииртышской впадины, а поэтому вполне возможно, что на сравнительно мало удаленных один от другого участках одного и того же района одновременно отлагались и морские и континентальные отложения.

Впервые мысль о динамичности границ выделяемых свит высказана К. В. Никифоровой.



Приведенный нами сводный разрез (см. фиг. 3) представляет схему стратиграфического соотношения различных свит Павлодарского Прииртышья. Таким образом, положение этих свит по отношению к общей стратиграфической шкале должно определяться для каждой свиты индивидуально, в зависимости от места и условий ее формирования. В то же время, как видно из приведенного сводного разреза, палеогеновые отложения в Прииртышье значительно беднее фауной, чем четвертичные и плиоценовые. Поэтому сопоставление их затруднено, и в связи с этим особенно серьезно следует подходить к интерпретации спорово-пыльцевых спектров, зачастую являющихся единственными палеонтологическими находками.

#### СЕВЕРНОЕ ПРИАРАЛЬЕ

Наиболее древними третичными отложениями в Северном Приаралье (фиг. 4) А. Л. Яншин считает тасаранскую свиту, которая сформировалась во всех своих фациях — глинистой, нуммулитовой и фосфатно-глауконитовой — в среднем эоцене и в начале верхнего эоцена.

Тасаранское море трансгрессировало в Северное Приаралье, оставляя незалитыми небольшие островки, расположенные меридионально от р. Иртыш до центральной части нынешнего Аральского моря. На востоке море граничило с западными окраинами Казахского нагорья, на северо-западе — с Мугоджарами.

В конце тасаранского века скрылись под воду и островки, и, таким образом, источниками пыли и спор, поступающих в морские отложения, оставались лишь берега Мугоджар и Казахского нагорья.

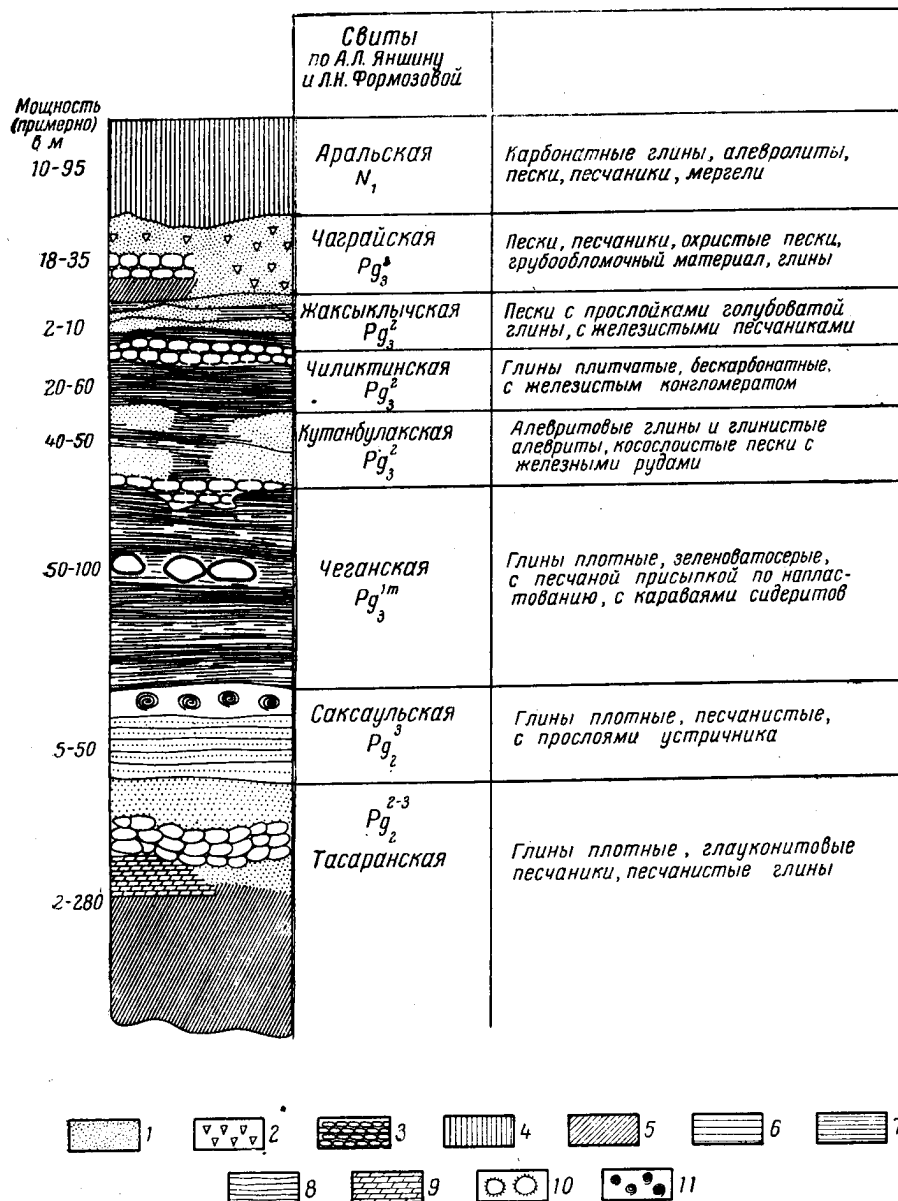
Основанием для определения стратиграфического положения отложений тасаранского моря А. Л. Яншин, естественно, принимает обильную морскую фауну, списки которой приводятся им в монографии (1953). При этом А. Л. Яншин отмечает, что фауна тасаранской свиты соответствует (по данным исследования фауны фораминифер) трем фораминиферовым зонам кавказского эоцена: а) зоне планктонных фораминифер — слоям с *Lyrolepis* соответствует верхняя часть свиты; б) зоне *Globorotalia crassaeformis* соответствует средняя часть свиты; в) зоне *Globorotalia aragonensis* соответствует самая нижняя часть свиты.

Литологически тасаранская свита представлена тремя типами отложений: глауконитово-песчанистыми, отлагавшимися в прибрежных, более мелководных участках моря, глинистыми — в глубоководных, нуммулитовыми — в прибрежных зонах, вокруг островов.

Спорово-пыльцевые спектры свидетельствуют о субтропическом, возможно, тропическом климате и о соответствующей флоре в пределах Мугоджар и в особенности — Казахского нагорья. Подробные данные о послойном изучении пыльценозных горизонтов морского палеогена Северного Приаралья приводятся ниже, здесь же упомянем лишь, что среди пыльцы покрытосеменных встречены представители сем. Myrtaceae, Могацевеae, Buxaceae, Lauraceae, Diospyraceae, Palmae, Fagaceae (несколько видов *Quercus* и *Castanea*), а также обилие пыльцы типа Leguminosae (возможно, *Dewalquea*), несколько видов которой приводит В. И. Баранов (1953) в списках флоры, обнаруженной им в отложениях континентальной фации тасаранской свиты на западном склоне Мугоджар и для палеогеновой флоры Средней Волги.

Голосеменные, обычно составляющие меньший процент в спектрах, чем покрытосеменные, представлены различными видами рода *Pinus* (секции *Strobus* S h a w., *Pseudostrobus* E n d l., *Cembrae* S p a c h. и др.) со значительной примесью *Podocarpus* и *Cedrus*.

Указанная флора близка к флоре континентальной фации тасаранской свиты западного склона Мугоджар; она характеризует тропическую жестколистную флору полтавской провинции А. Н. Криштофовича.



Фиг. 4. Северное Приаралье. Сводный разрез палеогеновых отложений.

1 — песок; 2 — грубообломочный материал; 3 — песчаник; 4 — глина, суглинок; 5 — глина песчаная; 6 — глина плотная, песчанистая; 7 — глина плотная; 8 — глина слоистая; 9 — глина опоковидная; 10 — стяжения сидерита; 11 — фауна устриц

По-видимому, основная масса пыльцы в спектрах тасаранской свиты поступала именно с восточных склонов Мугоджар, обогащаясь также приносом материала с западных берегов Казахского нагорья. Например, пыльца *Zygophyllaceae* (*Nitraria Schoberi*), *Umbelliferae* (aff.

*Ferula*,) Nyctaginaceae, Capparidaceae, Myrtaceae, Anacardiaceae и проч., отдельные представители которых входят в состав пустынных ассоциаций палео- и неотропиков.

Спектры тасаранской свиты имеют много общих форм со спектрами из нижних горизонтов опоковой толщи Павлодарского Прииртышья, а также и со спектрами нижних горизонтов саксаульской свиты.

Стратиграфически выше отложений тасаранской свиты залегает комплекс песчано-глинистых слоев (саксаульская свита Яншина) с крупными караваями кварцитовых песчаников в основании. Для флористических построений особенно интересен тот факт, что основным источником сноса обломочного материала при формировании песчано-гравийной фации саксаульской свиты являлись Мугоджары, как это установлено петрографическим анализом.

Наиболее характерный представитель саксаульской фауны, по мнению А. Л. Яншина, — *Pectunculus aralensis* R o m., имеющий большое сходство со многими эоценовыми и нижнеолигоценовыми видами Западной Европы, а также Украины. Второстепенными являются: *Cymbulostrea multicostata* D e s h. (var. *turgaica* V i a l.), *Cubitostrea plicata* S o l., *C. flabellula* L a m., *Cubitus* D e s h. и другие плойчатые устрицы, зубы акул *Odontaspis hopei* A g., *Od. winkleri* (A g.) L e r., *Od. acutissima* A g. и другие, а также различные виды рода *Nucula* (Яншин, 1953).

Комплекс фораминифер соответствует комплексу руководящих фораминифер верхних фораминиферовых слоев Северного Кавказа (Яншин, 1953). В кварцитовых песчаниках континентальной фации саксаульской свиты у западного склона Мугоджар обнаружены богатые отпечатки листьев и других частей древесных и кустарниковых растений, характеризующих ксерофитную флору полтавской провинции с *Podocarpus eocenica* U n g., *Sequoia couttsiae* H e e r, *S. Sternbergii* (G o e r p.) H e e r, *Sabal* sp., *Myrica angustata* S c h i m p., *Myrica uralica* sp. nov., *Quercus apocynophyllum* E t t., *Q. bifurcatus* W a t., *Q. Elaenae* U n g., *Quercus* sp. (2 sp.), *Dryophyllum furcinervis* (R o s s m.) H e e r, *Ficus multinervis* H e e r, *Ficus* sp., *Cinnamomum* sp., *Laurus* sp., *Terminalia* sp., *Apocynophyllum helveticum* H e e r, *Myrthophyllum Warderi* S a p., *Myrsine doryphora* U n g., *Andromeda protogae*, U n g., *Dalbergia* cf. *bella* H e e r (определения М. Д. Узнадзе-Дгебуадзе, 1948), *Dryandra Schrankii* (S t e r n b.) H e e r, *Pimelea* sp. (определение А. Н. Криштофовича), *Sequoia couttsiae* H e e r, *Glyptostrobus parisiensis* B r o n g n., *Dryophyllum furcinervis* (R o s s m.) H e e r, *Laurus Omalii* S a p. et M a r., *Celastrorphyllum Benedenii* S a p. et M a r., *Aralia transversinervis* S a p. et M a r., *Andromeda protogaea* U n g., *Phyllites* sp.<sup>1</sup>.

По А. Л. Яншину, саксаульская свита относится к самым верхам эоцена.

Спорово-пыльцевые спектры из отложений саксаульской свиты на горе Бос-Бие в Северном Приаралье и на горе Кара-Сандык (верхние горизонты), из слоев песчаных глин, залегающих на кварцевых песках с зубами *Myliobatus*, а также на западном чинке Термен-Бес, против станции Саксаульская, где толща саксаульских глин содержит прослой устричника, — несколько различаются по составу.

Нижние из исследованных горизонтов наиболее богаты пылью субтропических растений с Myrtaceae (роды: *Fejhoa*, *Mytranthes*, *Eucalyptus*, *Eugenia* и *Myrtus*), Moraceae (роды *Morus* и *Maclura*), Buxaceae, Sterculiaceae, Anacardiaceae, а также Cactaceae (?) (= *Echinocactus* (?), *Rhypsales* (?) и *Opuntia* sp.), Zygophyllaceae, Plumbaginaceae, Euphorbiaceae, Proteaceae, *Ephedra*, *Artemisia*, Chenopodiaceae, свидетельствующие о безусловном

<sup>1</sup> Списки флоры заимствованы из работы А. Л. Яншина.

наличии пустынных ассоциаций, которые, по аналогии с находками подобной флоры в верхних горизонтах опоковой толщи в Павлодарском Прииртышье, по-видимому, распространялись со стороны Казахского нагорья и являлись реликтами более древних флор.

Среди древесных пород, характеризующих лесные ассоциации тропических и субтропических широт, изобилуют различные виды *Pinus*, *Dacrydium*, *Podocarpus*, *Cedrus* и др.

Более высокие горизонты свиты содержат уже примесь пылицы *Alnus*, *Betula*, *Corylus*, *Myrica*, *Juglans*, *Liquidambar*. Правда, участие этих родов незначительно, но наличие пылицы сближает тип спектров верхних горизонтов саксаульской свиты со спектрами нижних горизонтов чеганских глин, также содержащих небольшую примесь пылицы пустынных ксерофитов наряду с типичным комплексом субтропических лесов с небольшой примесью умеренно мезофильных пород. Причина такого смешения типов флоры заключается в принадлежности выделенных спектров к морским отложениям, в которых отражается множество различных типов растительного покрова в пределах одной палеогеографической зоны.

Та часть спорово-пыльцевых спектров, которая характеризует песчаные ассоциации, включает и пылицу, определенную как род *Gnetum*, присутствие которого подтверждает субтропический или даже тропический характер растительности.

Флора саксаульских отложений особенно ярко отражает смешанный тип флоры верхнего эоцена, когда среди элементов древней средиземноморской флоры уже начали появляться единичные пришельцы с севера и изобиливали еще специфические представители туркменской провинции с *Rhus*, *Proteaceae* и *Ephedra*.

Выше залегают отложения чеганской свиты.

Палеогеография чеганского моря в Приаралье не везде ясна, так как отложения его частично смыты последующей эрозией. Во всяком случае распространение чеганского моря было значительным и его отложения в виде так называемой чеганской свиты широко распространены в Приаралье.

Представлены чеганские отложения зеленовато-серыми слоистыми глинами, плотными, тонко рассланцовывающимися при выветривании, гипсоносными, с прослоями караваев сидеритовых конкреций и с песчаной присыпкой по напластованию. Фауна чеганских отложений в Северном Приаралье особенно богата. Исчерпывающий список ее форм, насчитывающий не одну сотню видов, приведен в монографии А. Л. Яншина (1953).

По поводу возраста чеганской свиты твердого мнения еще нет. Вернее, остается неясной ее нижняя граница. По Н. К. Овечкину (1951, 1955), чеганская свита в Тургае захватывает верхи эоцена. По данным же А. Л. Яншина, она начинается с нижнего олигоцена. Возникло это разногласие потому, что некоторые виды фауны чеганских глин известны с эоцена.

Флористические данные указывают на большое сходство флоры самых верхних горизонтов саксаульской свиты и низов чегана, которые, в свою очередь, близки к флорам хадумских спектров Северного Кавказа. По-видимому, нижние горизонты нижнего олигоцена еще содержали остатки тропической флоры, сохранявшейся и постепенно изживавшейся еще в течение всего олигоцена. Однако нижние горизонты чеганских глин в Северном Приаралье, так же как и в Павлодарском Прииртышье, уже содержат довольно большое количество пылицы *Taxodium*, который затем непрерывно развивается в течение нижнего и среднего олигоцена. Находки же пылицы этого рода в саксаульских и опоковых отложениях единичны. Чеганское время и средний олигоцен — пора развития *Taxodium* на материке Казахстана.

Богатые спорово-пыльцевые спектры из чеганских глин в нижних горизонтах характеризуют флору субтропическую с *Diospyraceae*, *Sterculiaceae*, *Myrtaceae*, *Anacardiaceae*, *Buxaceae*, *Moraceae*, *Myricaceae*, носящую специфический оттенок общей ксерофитности, присущей, по-видимому, особым провинции палеогена, существование которой отмечал Е. П. Корovin (1939). В то же время в общем комплексе этой флоры уже имеется значительная примесь умеренного элемента.

Среди пыльцы голосеменных отмечается, как уже говорилось выше, усиленное развитие *Taxodium* aff. *distichum* (L.) Rich., рода *Picea* (*Picea tatarica*), *Cedrus* (несколько видов) и большое разнообразие видов рода *Pinus*. В верхних горизонтах чеганских глин появляется примесь умеренно листопадных видов из родов *Alnus*, *Betula*, *Tilia*, *Liquidambar*, *Ulmus*, *Corylus*, *Juglans*, *Pterocarya*. Одновременно появляется пыльца травянисто-кустарничкового комплекса, уже утратившего субтропический облик.

В чеганских спектрах мы преимущественно находим пыльцу нескольких видов лебедовых, сложноцветных, гречишных и гвоздичных, которые встречаются и в миоценовых и в плиоценовых спектрах. Если сравнить флору чеганских глин Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья, то, пожалуй, можно отметить большую ксерофитность приаральской флоры. Это хорошо заметно по кривой пыльцы *Taxodium*, которая гораздо выразительнее и круче в спектрах Павлодарского Прииртышья.

В конце нижнего олигоцена, в связи с оживлением тектонической деятельности в полосе от Западной Сибири до Казахстана и Средней Азии, произошли поднятия. Чеганское море стало отступать, освободив всю территорию Приаралья, как это наблюдалось и в Прииртышье. Однако освободившиеся от моря участки суши еще долгое время были дном огромного солоноватоводного бассейна, образовавшегося в результате последующего за поднятием опускания Арало-Тургайской впадины.

На территории Северного Приаралья в связи с существованием этого бассейна создались условия для накопления частью эстуариевых, частью речных и дельтовых осадков, а затем и для образования озерных водоемов.

В те отрезки геологического времени, когда под влиянием изменений базиса эрозии эти озерные водоемы получали возможность соединяться с основным солоноватоводным бассейном, в них проникала его своеобразная фауна. Таким образом, после ухода чеганского моря на территории Северного Приаралья началось накопление своеобразной, литологически пестрой серии солоноватоводных и пресноводных осадков, преимущественно песчаных, алевритовых, супесчаных и гравийных, сильно ожелезненных, с прослоями глин, с обильными растительными остатками, с железными рудами оолитового типа и с горизонтами плитчатых железистых песчаников.

Все эти фациально и литологически пестрые слои относятся к так называемой «тургайской серии» — впервые подобные отложения были найдены в Тургайской депрессии. Эту серию перекрывают отложения нижнего миоцена с *Corbula helmerseni* Michail. Такая же серия слоев в Тургае изучена В. В. Лавровым (1951) и другими исследователями. В Тургае всю серию делят на две основные свиты: нижнюю — индрикотериевую (включающую болаттамские слои) и верхнюю — собственно тургайскую.

По исследованиям А. Л. Яншина (1940, 1953), Л. Н. Формозовой (1949, 1951) и В. А. Вахрамеева (1949), стратиграфия и флористическое обоснование тургайской серии осадков в Приаралье представляется в следующем виде.

Вся тургайская серия делится на четыре свиты (снизу вверх):

- А. Кутанбулакскую (Л. Н. Формозова) — первая (В. А. Вахрамеев)
- Б. Чиликтинскую » » — вторая »
- В. Жаксыклычскую » » — третья »
- Г. Чаграйскую » » — четвертая »

В работах Л. Н. Формозовой (1949), В. А. Вахрамеева (1949), а затем А. Л. Яншина (1953) достаточно подробно описано стратиграфическое положение свит, их фациальная характеристика, распространение и наиболее полные разрезы. Ниже дан сводный схематический разрез всей тургайской серии на основании работ этих авторов, с пометкой пунктов, в которых автором настоящего сообщения были лично описаны в 1953 г. некоторые обнажения и собраны образцы для спорово-пыльцевых анализов.

Самая нижняя, кутанбулакская свита представлена пачкой переслаивающихся алевроитовых глин, глинистых алевроитов и мелкозернистых песков, желтовато-серых, косослоистых, содержащих железные руды.

Фауна кутанбулакской свиты бедна. Известны остатки пресноводных гастропод, предположительно из рода *Volvata* и отпечатки чешуек осетра.

В конкрециях железистых песчаников обнаружена богатая флора, описанная В. А. Вахрамеевым (1949) и М. Д. Узнадзе-Дгебуадзе (1948). Здесь определены: *Salix tenera* A. Braun, *Populus balsamoides* Goerr, *Juglans acuminata* A. Braun, *Corylus turgaica* Pojark., *Alnus nostratum* Ung., *Alnus Feroniae* Czeczott, *Quercus* cf. *Gmelinii* A. Braun, *Liquidambar europaeum* A. Braun, *Prunus Scottii* Heer, *Cercis turgaica* Uz nadsze (nom. msc.), *Leguminosites* sp., *Zizyphus tiliacifolius* Heer, *Rhamnus Gaudinii* Heer, *Rhamnus Graefii* Heer, *Cornus orbifera* Heer, *Corylus insignis* Heer, *Nelumbium* sp., *Taxodium distichum miocenium* Heer, *Phragmites* sp., *Myrica oeningensis* Heer, *Juglans acuminata* A. Braun, *Carya bilinica* (Ung.) Krysh, *Carpinus grandis* Ung., *Fagus Deucalionis* Ung., *Fagus Antipofii* Heer, *Fagus* sp. и др.

Спорово-пыльцевые спектры, приведенные А. А. Чигуряевой (1951<sub>1</sub>) из местонахождения Кутан-Булак (слои, покрывающие и подстилающие рудоносные пески) характеризуются преобладанием пыльцы хвойных, в основном — рода *Pinus*, при незначительном участии широколиственных пород. Там же А. А. Чигуряева упоминает о незначительной примеси пыльцы трав и *Ephedra*.

Автор настоящего сообщения исследовал серию образцов из кутанбулакской свиты: обн. 8, 1953 г., чинк Кара-Сандык, алевроитовые глины, алевроиты и ожелезненные алевроиты; обн. 5, 1953 г., чинк Сары-Булак, алевроитовые пески, песчанистые глины, глинистый песок и железистый конгломерат с отпечатками флоры. Пыльцевая флора, выделенная в основном из ожелезненных алевроитов и алевроитовой глины кутанбулакской свиты в обнажении на Кара-Сандыке, чрезвычайно богата и насчитывает до 80 видов различных голосеменных растений.

Действительно, как это отмечает А. А. Чигуряева, в спектрах преобладают голосеменные, представленные в основном сем. Pinaceae, среди которых встречаются шесть видов *Cedrus*, 12 видов *Pinus*, *Tsuga*, *Taxodium*, *Sciadopitys*, Cupressaceae, 3 вида *Podocarpus*, *Taxus*, Cycadaceae, *Abies*, 2 вида *Picea* и единично *Ephedra*.

Покрытосеменные принадлежат к сем. Betulaceae (*Alnus*, *Betula*, *Carpinus*), Juglandaceae, родам *Ulmus*, *Acer*, *Tilia*. Пыльца субтропических видов содержится в весьма небольшом проценте. Почти во всех спектрах встречаются представители водных растений с *Nelumbo*, *Myriophyllum*, *Potamogeton*.

В общем спектры кутанбулакской свиты резко отличаются от спектров чеганской свиты, что становится особенно заметным при сопоставлении спектров из разреза Кара-Сандык, где они анализировались и из чеганских и из континентальных отложений.

Флора, представленная в этих спектрах, принадлежит к умеренному комплексу тургайской провинции А. Н. Криштофовича. При этом состав растительности, который в той или иной мере находит отражение в спектрах из континентальных отложений, свидетельствует о широком распространении смешанно-широколиственных лесов.

Списки кутанбулакской флоры, составленные по отпечаткам листьев, значительно пополняются видами различных голосеменных растений, присутствие которых среди макроскопических остатков отмечено лишь находками *Taxodium miocenum* Неег и древесины неизвестного хвойного.

На кутанбулакской свите с размывом залегают тонкослоистые отложения чиликтинской свиты. Обычно это плитчатые бескарбонатные лиловатые или коричневато-серые глины с тонкими прослойками слюдястого алевролита. Отмечена гипсоносность. В некоторых разрезах прослеживаются прослои углистых глин или глинистого бурого угля. В основании свиты часты линзы галек и грубообломочного материала.

В отложениях чиликтинской свиты отмечены находки унионид, остатков рыб, раковин остракод, зубов *Odontaspis* ex. gr. *cuspidata* Ag., кости *Paraceratherinae* gen. ident. и *Schizotherium* cf. *turgaicum* Boris.

Растительные остатки из оливково-зеленых глин, обработанные А. И. Поярковой (1935) у ст. Чоко-Су и на восток от нее, содержат *Populus mutabilis* Неег, *Alnus nostratum* Ung., *Carpinus grandis* Ung., *Corylus turgaica* Rojark., *Fagus Antipofii* Неег, *Ficus populina* Неег (?), *Liquidambar europaeum* A. Braun, *Juglans acuminata* A. Braun, *Corylus Macquarrii* (Forbes) Неег, *Quercus Alexeevi* Rojark., *Fagus Deucalionis* Ung.<sup>1</sup> В оолитовых железняках чиликтинской свиты на горе Кара-Сандык И. В. Палибиным (1904, 1906), были определены: *Sequoia Langsdorfii* Неег, *Populus mutabilis* Неег, *Carpinus grandis* Ung., *Corylus insignis* Неег, *Fagus Antipofii* Неег, *Juglans acuminata* A. Braun, *Dryandra Ungerii* Ett., *Zizyphus tiliacifolius* Неег и *Liquidambar europaeum* A. Braun.

Как видно из приведенных списков, флора чиликтинской свиты по составу обнаруженных растительных остатков подобна флоре кутанбулакских слоев. И в той и в другой свите представлена широколиственная листопадная мезофильная флора с ничтожной примесью хвойных, в данном случае одним видом *Sequoia Langsdorfii* Неег.

По предположениям А. Л. Яншина, во время формирования чиликтинских слоев на большей части Северного Приаралья образовалась озерно-аллювиальная равнина с проточными озерами и болотами, которые имели непостоянный режим; кратковременные периоды их спокойного заполнения прерывались периодами размыва.

Пестроту литологического состава и частую фациальную изменчивость отложений чиликтинской свиты отмечают также В. А. Вахрамеев и Л. Н. Формозова. Автору, к сожалению, не удалось вполне изучить отложения тургайской серии в целом и чиликтинской свиты в частности. Однако (при консультации Л. Н. Формозовой и А. Л. Яншина) все же удалось собрать большое количество образцов из обнажений чинка Сары-Булак (обн. 1, 1953 г.), из белых алевроитов и песков с мелкими окисями железа и с прослоями темной углистой глины и из песчанистых бурых глин с гипсами и зубами акул, а также из песчанистых слоистых глин чинка Сары-

<sup>1</sup> *Fagus orientalis* Lipsky forma fossilis Palibin, по П. А. Мчедlishvili.

Булак (обн. 5, 1953 г.), у покинутой триангуляционной вышки, и на горе Кара-Сандык (обн. 7, 1953 г.), из слоистых глин с прослоями тонкозернистого песка и из глины с прослоями сидерита и железистого конгломерата, венчающего свиту.

Спорово-пыльцевые спектры, полученные из этих проб, поражают насыщенностью пыльной и обилием видов покрытосеменных и голосеменных. Среди серии спектров обычно преобладают голосеменные.

Флористически спектры чиликтинской свиты чрезвычайно близки к спектрам из кутанбулакской свиты, так же как близки и по составу растительности, за исключением того, что в спектрах из чиликтинской свиты ярче выражена примесь субтропических видов и родов: *Laurus*, *Palmae* (*Trachycarpus*?), *Myrtaceae* (3 sp.), *Proteaceae*, *Rhus*, *Moraceae* (2 sp.), а также отмечен несколько больший процент пылцы травянистых растений с *Artemisia*, *Chenopodiaceae*, *Gramineae*, *Leguminosae* и *Ephedra*. По-видимому, на равнинных пространствах Северного Приаралья чиликтинского времени, которые А. Л. Яншин (1953) сравнивает с современным ландшафтом Камыш-Самарского междуречья Урала и Волги, все же развивались сухие степные или мелкорослые саванные ассоциации. Возможно, что травянистые и кустарничковые ценозы располагались по каменистым склонам остаточных возвышенностей, сложенных палеозойскими породами. Во всяком случае, ассоциации открытых местообитаний здесь, безусловно, существовали. Следует отметить, что В. С. Корнилова и В. В. Лавров (1949), В. В. Лавров (1951) и Р. Я. Абузярова (1954<sub>а</sub>) опубликовали данные о находках ксерофитной флоры в слоях с индрикотериевой фауной в Тургайской впадине (р. Жаман-Каинды, в 75 км от пос. Амангельды и в овраге у оз. Шин-Туз). Здесь ими были обнаружены: *Myrica turgaica* Корнилова, *Rhus turcomanica* Krishn., *Aralia* sp., *Sassafras turgaicum* Корнилова, *Cinnamomum Scheuchzeri* Nees, *Laurus primigenia* и пр.

Таким образом, субтропические реликты полтавской ксерофитной флоры эоцена находили себе убежища на территории Северного Приаралья и Тургай в эпоху наиболее интенсивного распространения широколиственной умеренной флоры. В то же время обилие пылцы хвойных указывает, что участие их в растительном покрове было значительным.

Особенно широко был распространен род *Alnus*, различные виды которого, по-видимому, сопутствовали растительности берегов озер. Обилие озерных или заболоченных водоемов подтверждается значительным участием пылцы *Myriophyllum*, *Potamogeton* и *Sparganium*.

Комплекс пылцы голосеменных представлен родами: *Pinus* и *Taxodium*, сем. *Cupressaceae*, несколькими видами родов *Cedrus*, *Tsuga*, *Podocarpus*, *Picea* и сем. *Cycadaceae*.

Кутанбулакскую и чиликтинскую свиты большинство исследователей относит к среднему олигоцену.

В конце периода формирования чиликтинской свиты произошла значительная трансгрессия солоноватоводного бассейна, с которым в чиликтинский век сообщались пресноводные водоемы Приаралья. В результате этого сравнительно недолговременного продвижения солоноватоводного бассейна на север отложилась серия слоев третьей (В. А. Вахрамеев) или жаксыкычской (Л. Н. Формозова) свиты, представленной песками с прослоями железистого песчаника, иногда с линзочками кварцевого гравия и прослойками голубоватой глины. В отложениях этой свиты обнаружены остатки зубов акул и челюсти костистых рыб (щуки и окуни).

Ископаемая фауна доказывает связь, возможно кратковременную, внутреннего бассейна с открытым океаном. С этим временем А. Л. Яншин связывает некоторое опускание северо-восточной части Приаралья.



По мнению Л. Н. Формозовой (1949), отложения жаксыккычской свиты являются непосредственным продолжением серии слоев чиликтинской свиты и представляют собой солоноватоводную фацию последней. К сожалению, отложения жаксыккычской свиты не охарактеризованы флорой.

Самой верхней свитой тургайской серии в Северном Приаралье является четвертая, или чаграйская свита, отложившаяся в период интенсивного поднятия Мугоджар. Об этом свидетельствует обильный обломочный материал, отложенный вблизи их склонов.

Чаграйская свита представлена обычно песками, пачками переслаивающихся охристых песков, глин, а также охристых песчаников.

Фауна этих отложений, бедная, пресноводная, представлена пелециподами из рода *Unio* и ядрами гастропод (*Viviparus?*). Флора также бедна. Известны остатки из железистых песчаников близ Мугоджар с *Fagus Antipofii* Неег, *Carpinus grandis* Ung., *Quercus Gmelinii* A. Braun, *Corylus insignis* Неег<sup>1</sup> (определены И. В. Палибиным, 1904) и *Liquidambar europaeum* A. Braun, *Phragmites oeningensis* A. Braun, *Juglans acuminata* A. Braun (определены И. В. Палибиным и А. Н. Криштофовичем).

В образцах, собранных нами в 1953 г. из обнажения № 6 (залив Перовского, близ рыбацкого пос. Агыспе), представленного пачкой переслаивающихся ожелезненных песков, белых, розоватых и красных, с прослоями сцементированных ожелезненных песков и серых глинистых участков, найдены единичные пыльцевые зерна *Pinus* секции *Strobus*, *Abies*, *Betula*, *Alnus*, *Carpinus*, *Myrica*, *Chenopodiaceae* (3 sp.) и *Artemisia*. Несмотря на то, что находки пыльцы рассеяны и малочисленны и не дают возможности получить полное представление о составе растительности чаграйского времени, все же можно полагать, что флора того времени была относительно умеренной, с участием широколиственных древесных пород, и что на открытых песчаных склонах развивались ассоциации полупустынного типа. Не следует думать, что эти типы ассоциаций были территориально близкими. Пыльца широколиственных пород могла быть принесена издалека речными водами к песчаным берегам чаграйского водоема.

Возраст чаграйской свиты А. Л. Яншин условно определяет как верхне-олигоценый — на основании наличия крупного размыва на границе чаграйской и жаксыккычской свит. Однако окончательное решение вопроса о возрасте этой свиты, как совершенно резонно отмечает А. Л. Яншин, следует отложить до того времени, когда удастся проследить протирание отложений чаграйской свиты на запад и переход отложений тургайской серии слоев в осадки майкопской толщи, содержащей морскую фауну.

Стратиграфически выше отложений тургайской серии (средний и верхний олигоцен) залегают слои солоноватоводных отложений, содержащих многочисленные остатки *Corbula helmerseni*. Литологически эта свита представлена чрезвычайно пестро. В основном это карбонатные породы, а также глины, зеленовато-серые, пестрые, пески — белые и серые, алевроиты, песчаники, известняки, мергелистые глины. Глины часто содержат кристаллы гипса.

Эту свиту А. Л. Яншин рассматривает как отложения солоноватоводного бассейна, распространявшегося в северном направлении до ст. Челкар, Тугуз, Аральск, и дельтовых выносов рек, впадавших в этот бассейн. Близ пос. Агыспе находятся крупные захоронения костей млекопитающих, содержащих остатки (Беляева, 1948) землеройки, грызунов (5 видов), хомякообразных, тушканчиков, бобров (2 вида), кошачьих (3 вида).

<sup>1</sup> *Corylus turgaica* Rojark., по П. А. Мчедлишвили.

*Aceratherium aralense* B o r i s., *Aralotherium prochorovii* B o r i s, парнокопытных (кабарги), утки (*Anas oligocaena* T u g.), черепах *Testudo aralensis* K h o z. и *Chelonia aralis* K h o z. (первая — сухопутная, вторая — морская). Л. И. Хозацким (1945) в этих же отложениях найдены остатки дельфинов и китообразных.

Флора, найденная в светлосерых песчаниках дельтовых выносов на горе Жаксы-Кулак, по определению В. А. Вахрамеева, представлена: *Taxodium distichum miocenum* H e e r., *Juglans* cf. *acuminata* A. B r a u n, *Quercus Nimrodii* U n g. и *Fagus Antipofii* H e e r.

А. А. Чигуряевой (1951) в глинах из средней части разреза на Кзыл-Булаке найдено значительное количество пыльцы различных семейств, родов и видов: *Pinus*, *Abies*, *Picea*, *Sciadopitrus*, *Gramineae*, *Onagraceae*, *Potamogeton*, *Stratiotes*, *Corylus*, *Juglans*, *Alnus*, *Zelkova*, *Carpinus*, *Tilia*, *Carya*, *Ulmus*, *Acer*, *Castanea*, *Liquidambar*, тип *Fagus*, тип *Ginkgo*, тип *Betula*, *Ylex*. Эту флору А. А. Чигуряева относит к типичному тургайскому комплексу.

Если проанализировать состав фауны из отложений близ пос. Агыспе и сопоставить с флористическими данными, полученными в результате изучения макроскопических растительных остатков и пыльцы, то станет ясно, что в этом случае флористические данные лишь частично отвечают комплексу фауны. Приведенные списки родов и видов растений характеризуют лесные ассоциации — их существование подтверждается находками костей бобровых. В то же время остатки хомяков, тушканчиков и птиц говорят о наличии во флоре степного элемента.

К сожалению, все пробы, отобранные автором для спорово-пыльцевого анализа в Агыспе, оказались непыльценосными, но аналогичные осадки в Павлодарском Прииртышье и в Тургае содержат спорово-пыльцевые спектры, в которых наряду с единичными находками представителей широколиственных пород встречается довольно разнообразный комплекс пыльцы травянистых растений. Находки пыльцы трав из сем. *Chenopodiaceae*, *Compositae* (*Artemisia*), *Leguminosae*, *Gramineae* свидетельствуют о том, что в аральское время имелись большие открытые местообитания с растительностью, близкой к современным сухостепям Приаралья, где, по-видимому, и селились типичные степные грызуны.

Возраст аральской свиты, содержащей фауну, аналогичную корбулевым слоям нижнего миоцена Северного Кавказа, нижнемиоценовую фауну млекопитающих и залегающей стратиграфически выше верхнеолигоценовой чаграйской свиты (аквитанский ярус), А. Л. Яншин считает нижнемиоценовым.

Таким образом, при беглом обзоре палеогеновых и отчасти неогеновых отложений Северного Приаралья (в основном по данным А. Л. Яншина) мы приходим к выводу, что стратиграфическое положение трех свит морского палеогена увязывается с положением свит морского палеогена Павлодарского Прииртышья.

Данные спорово-пыльцевого анализа (в особенности это хорошо выражено в спектрах из обнажения на горе Термен-Бес) подтверждают, что спектры саксаульской свиты отличаются от спектров чеганской свиты составом покрытосеменных и голосеменных. При этом нижние горизонты чеганских отложений содержат примесь пыльцы эоценовых ксерофитов, а верхние горизонты саксаульских отложений — примесь умеренной флоры. Однако общий характер флор чеганской и саксаульской свит различен. Спектры саксаульских отложений принадлежат целиком к флоре субтропической или тропической, ксерофитной, чеганские же спектры — типичные олигоценовые, субтропические с примесью умеренных элементов, подобные спектрам хадумских отложений нижнего майкопа Северного Кавказа.

### ТУРГАЙСКАЯ НИЗМЕННОСТЬ

Относительно геологического строения и палеогеографии Тургайской низменности существует большое количество работ. В 1930 г. О. С. Вялов, в 1931 г. Н. Г. Кассин, в 1932 г. А. Д. Архангельский, в 1935 г. М. В. Баярунас, в 1949 г. А. Л. Яншин, в 1951 г. В. В. Лавров и Н. К. Овечкин и многие другие авторы дали интересные сообщения об исследованиях континентальных и морских отложений Тургай. Район Тургай не входит в рамки моей работы, но, вследствие того, что геологическая история Тургай теснейшим образом связана и с Прииртышской впадиной и с Приаральем, нельзя не остановиться, хотя бы в двух словах, на наиболее определившихся взглядах на схему стратиграфического строения этого района.

По данным В. В. Лаврова, морской режим в Тургае устанавливается в нижнем олигоцене. Границы нижнеолигоценового моря проходили по краю Казахского нагорья. Широко развитые отложения морского олигоцена — чеганские глины, серые, зеленовато-серые, тонкослойные и рассланцовывающиеся при выветривании, знакомые нам по Павлодарскому Прииртышью, распространены далеко к северо- и юго-западу от восточного борта Тургайского прогиба, к оз. Челкар-Тениз, Северному Приаралью и Устурту, а также к Павлодарскому Прииртышью и Западной Сибири.

По восточному борту Тургайской впадины (в разрезах по р. Ашутасты) выходят мелководные фации этой свиты. Возраст их В. В. Лавров и Е. П. Бойцова и Н. К. Овечкин определяют как верхний эоцен — нижний олигоцен.

Вторым элементом третичных отложений В. В. Лавров выделяет так называемые «сарыинские слои» (по местонахождению на чинке Сарын, по правому берегу р. Сюреин), представленные голубовато-зелеными плотными глинами мощностью от 6 до 40 м.

Слои эти залегают на чеганских глинах без размыва. Обычно эти глины загипсованы и засолены. Фауна сарыинских слоев — кости грызунов и крупных млекопитающих и щитки наземных черепах. Флора (по определению В. С. Корниловой) — *Phragmites oeningensis*, *Poacites laeviculus*, *Populus balsamoides*, *Pterocarya castaneaefolia*, *Juglans acuminata*, *Magnolia inglifeldii*, *Paliurus* sp., *Zizyphus liliaefolius*, *Rhus turcomanica*, *Liquidambar*.

Возраст сарыинских слоев В. В. Лавров считает среднеолигоценным, генезис их — лагунные отложения мелющего чеганского моря, стратиграфическое положение — отложения, промежуточные между чеганскими морскими и вышележащими континентальными отложениями. В. В. Лавров допускает, что эти отложения могут формироваться одновременно с континентальными, в зависимости от их местоположения.

На размытой поверхности чеганских глин или на сарыинских слоях залегают толща континентальных отложений, которые В. В. Лавров делит на две серии слоев: нижние — индрикотериевые, верхние — тургайские.

Индрикотериевые слои, или свита, представлены зеленовато-желтобурыми или голубыми глинами с костями индрикотерия. Переходят эти глины в горизонт слоистых лиловато-серых глин с прослоями угля (болаттамские слои).

В нижних слоях индрикотериевой свиты по реке Сары Тургай были обнаружены остатки индрикотерия.

Флора индрикотериевой свиты представлена двумя типами: а) ксерофильная [Жаман-Каянды; определена В. С. Корниловой (Корнилова и Лавров, 1949)] *Myrica turgaica*, *Laurus hydrophylla*, *Rhus turcomanica*, *Ara-*

*lia* sp.; б) мезофильная (в углисто-каолиновых слоях) с *Taxodium*, *Alnus*, *Nyssa*, *Liquidambar*, *Phragmites*.

С отложениями, вмещающими мезофильную флору, связаны прослой бурого угля и оолитовых бурых железняков. Возраст свиты — средний олигоцен.

Индрикотериевая свита всюду по восточному борту Тургайского прогиба перекрывается отложениями песчано-глинистой свиты с резким неравномерным размывом, который местами почти до основания уничтожает индрикотериевую свиту. В основании это однотипные светлые породы, тонкослоистые, песчанистые, плохо сортированные, иногда с линзами железистых песчаников. Выше залегают неяснослоистые зеленовато-серые или пестрые глины. Породы этой свиты, как отмечает В. В. Лавров, сильно выщелочены.

В алевроитах и песчаниках тургайской свиты найдена широколиственная флора, лишенная субтропических ксерофитов.

Песчано-глинистую свиту В. В. Лавров параллелизует с четвертой свитой континентальных отложений Приаралья и возраст ее относит к верхнему олигоцену.

Над песчано-гравийной свитой В. В. Лавров выделяет еще одну свиту континентальных отложений, так называемую соленосную, выраженную зелеными глинами с друзами гипса и марганцовыми бобовинами, содержащую фауну, близкую к аральской свите в Северном Приаралье (бобровые, *Aceratherium deperti* и др.). В. В. Лавров параллелизует свою соленосную свиту с аральской свитой в Северном Приаралье.

Выше соленосной свиты В. В. Лавров выделяет свиту турме, которая представлена незасоленными глинами; встречается она не повсеместно и содержит кости *Miohippus* sp., *Hypohippus* (*Anchitherium*?), *Yctitherium* cf. *hipparionum*, *Rhinocerotidea*, *Testudinidae*. В. С. Богданов, автор определений, относит эту свиту к среднему миоцену. В недавно вышедшей работе Р. Я. Абузаровой (1954), посвященной флоре континентальных отложений Тургая, обосновывается разделение индрикотериевой свиты на три самостоятельные подсвиты, которые снизу вверх следуют в таком порядке: пристинотериевая, индрикотериевая и болаттамская.

Возраст пристинотериевой свиты определяется как верхи нижнего — низы среднего олигоцена, индрикотериевой свиты — средний олигоцен, болаттамских слоев — как верхи среднего олигоцена.

В заключение необходимо отметить, что многочисленные детальные исследования морских и континентальных отложений Северного Приаралья, Павлодарского Прииртышья и Тургая пока не привели исследователей к общему мнению относительно синхронизации выделенных свит в каждом из этих районов. Между тем накопленный материал уже достаточен, чтобы это сделать. Пока же, на основании изложенного материала, на территориях Северного Приаралья, Павлодарского Прииртышья и Тургая выделяются следующие отложения:

а) Морские в Прииртышье, прибрежnomорские и морские в Тургае и морские в Приаралье отложения среднего и верхнего эоцена с тропической ксерофильной флорой Полтавской провинции (в понимании А. Н. Криштофовича), но имеющей своеобразный облик, приближающий эту флору к флоре Туркменской провинции (в понимании Е. П. Коровина).

б) Морские отложения нижнего олигоцена (по мнению некоторых исследователей, верхнеэоценовые — нижнеолигоценовые), так называемая чеганская свита, с богатой пыльцевой флорой, но с бедной фауной в Прииртышье, с богатой фауной, но с более бедной флорой в Приаралье и с бедными и флорой и фауной в Тургае. Отложения эти литологически и палеонтологически прекрасно сопоставляются. Флора чегана

субтропическая, с примесью умеренной в верхних горизонтах, характеризующая климат более влажный, чем в эоцене.

в) Отложения мелководных фаций чеганского моря (ащеайрыкская свита О. С. Вялова) — замкнутых опресненных бассейнов и континентальные отложения — первая и вторая свиты Северного Приаралья, Павлодарского Прииртышья, Тургая (пристинотериевая и индрикотериевая свиты) повсюду с богатой флорой, характеризующей сравнительно умеренный климат и температуры более низкие, чем в нижнем олигоцене. Листопадный комплекс широколиственных лесов, наиболее широко представленный в отложениях этих свит, сменяется комплексом с примесью большого числа субтропических ксерофитов. Кустарниковые и травянистые ксерофиты временами дают вспышки, как это наблюдается в спектрах второй свиты Приаралья и Прииртышья, или в болаттамских слоях индрикотериевой свиты в Тургае, или во второй свите Прииртышья. Флоры первой и второй свит богаты хвойными и сережкоцветными растениями. Возраст свит всеми исследователями признан среднеолигоценовым.

г) Отложений, переходные от средне- к верхнеолигоценовым или относящиеся к верхним горизонтам среднего олигоцена, — жаксыккычская свита Северного Приаралья и третья свита Прииртышья — плохо охарактеризованы и фауной и флорой. Если в дальнейшем не удастся палеонтологически изучить эти отложения, то только фациальный анализ может установить их твердое стратиграфическое положение.

Возможно, что отложения эти имеют «динамические» границы, зависящие от времени начала интенсивной эрозионной деятельности речных потоков верхнеолигоценового времени.

д) Отложения песчано-гравийные или песчанистые, сформировавшиеся в результате глубоких размывов, связанных с тектоническими поднятиями в Мугоджарах и по окраинам Казахского нагорья и в Тургае. Флора этих отложений умеренная, разнообразная по составу, отражающая различные типы растительности, в зависимости от типов местообитаний, вблизи которых отлагались осадки. В Павлодарском Прииртышье это четвертая свита К. В. Никифоровой, в Северном Приаралье — чаграйская свита Л. Н. Формозовой, или четвертая свита В. А. Вахрамеева, в Тургае — тургайская свита В. В. Лаврова.

е) Отложения аральской свиты с *Corbula helmerseni* и с обильной фауной млекопитающих в Приаралье, глин, песков и супесей с нижнемиоценовой фауной млекопитающих в Тургае и Прииртышье; они слабо охарактеризованы флорой (за исключением Тургая), но богаты фауной.

ж) Отложения более высоких горизонтов миоцена и плиоцена и покрывающие их четвертичные.

На этом, по-видимому, можно закончить краткий, схематический очерк геологии и палеогеографии районов, в основном являющийся реферативным изложением работ исследователей Приаралья, Прииртышья и Тургая, материалы которых послужили основой для спорово-пыльцевых исследований.

## II. К ИСТОРИИ ФЛОРЫ И РАСТИТЕЛЬНОСТИ КАЗАХСТАНА В ТРЕТИЧНОЕ ВРЕМЯ

Развитие и распространение голосеменных на территории Казахстана является частицей истории флоры и растительности этой страны, в отрыве от которой изучение голосеменных невозможно.

Общую характеристику развития флоры Казахстана дает А. Н. Криштофович в своих работах 1941 и 1946 гг., но делает это очень скупое, так как ко времени составления его монографии об эволюции растительного покрова было чрезвычайно мало материала по ископаемым остаткам Казахстана.

В большой литературе, посвященной истории флоры и растительности земного шара вообще и территории нашего Союза в частности, не встречается специальных разделов, касающихся изучения развития голосеменных на территории Центрального и Северного Казахстана в третичный период.

В основном во всех работах, специально или косвенным образом касающихся истории развития флоры этого района, заостряется вопрос о происхождении, миграции и становлении современных пустынных флор Средней Азии и Казахстана, развитию же флоры голосеменных внимания не уделяется.

По-видимому, это происходит вследствие двух основных причин. Во-первых, обычно история развития флоры определенной ботанической провинции или области изучается на основании анализа ареалов современных и реликтовых видов, входящих в состав растительности этой провинции или области. Как известно, современная растительность большей части равнинного и мелкосопочного Казахстана и Северного Приаралья, в особенности тех районов, которые исследовались автором, совершенно лишена участия каких-либо представителей голосеменных, за исключением спорадически разбросанных островных сосновых массивов (типа Борового) или полукустарничков рода *Ephedra*. Во-вторых, история флоры, ее миграционные пути и центры возникновения устанавливаются по ископаемым растительным остаткам. На территории же Северного Казахстана и Северного Приаралья почти полностью отсутствуют макроскопические остатки голосеменных в ископаемом состоянии. Все богатые флористические находки на территории Тургайской депрессии, Зайсана и Северного Приаралья в основном содержат богатую листовую флору широколиственных растений среднеолигоценовых лесов, в период развития которых был широко распространен известный всем вид *Taxodium cf. distichum* (болотный кипарис), который и фигурирует обычно в списках ископаемых флор.

Во флорах умеренных и субтропических упоминаются иногда находки *Ginkgo* и *Sequoia* и, за редким исключением, *Glyptostrobus*.

Между тем спорово-пыльцевые спектры нижних и верхних горизонтов палеогена и отчасти неогена изобилуют пылью голосеменных самых разнообразных семейств, родов и видов.

Может возникнуть предположение, что пыльца в морские отложения занесена и не отражает растительности изучаемой территории. Но это предположение отпадает потому, что, кроме пыльцы сем. *Pinaceae* и *Podocarpaceae*, большинство видов которых имеют пыльцу с воздушными мешками, в спектрах присутствует пыльца сем. *Cupressaceae*, *Taxodiaceae*, *Taxaceae*, *Ginkgoaceae*, *Araucariaceae*, *Cycadaceae*, не имеющих воздушных мешков. Кроме того, особенно обильна пыльца голосеменных именно в спектрах из континентальных отложений Казахстана, т. е. в тех спектрах, которые значительно более специализированы, чем морские, и отражают не только флору, но и растительность. Предположение о возможности массового заноса отпадает также и потому, что пыльца голосеменных встречается в спектрах, одновременно изобилующих пылью покрытосеменных древесных растений, т. е. в спектрах, характеризующих лесной тип растительности.

Следовательно, обилие пыльцы голосеменных не есть результат дальнего заноса, подобного заносу пыльцы рода *Pinus* в открытых степях типа казахстанского мелкосопочника. Голосеменные в спектрах из Северного Казахстана и Северного Приаралья, а также из Тургай и Западной Сибири — явление закономерное, свидетельствующее о широком распространении голосеменных растений в палеогеновой, а отчасти и в неогеновой флоре этих районов. Вопрос этот, безусловно, представляет большой научный интерес и должен быть предметом специального изучения флористов и палеоботаников.

Для того чтобы ясно представлять, какие участки суши мы имеем в виду, когда говорим об истории палеогеновой флоры и растительности Казахстана, восстановим в памяти палеогеографию палеогена на территории Азиатской и юга Европейской части СССР.

В палеогене, когда воды обширного моря Тетис отделили северные материки от южных в пределах от Индийского океана до Центральной Америки, территория современного Казахстана (Прикаспийская низменность, часть Западно-Сибирской низменности, Казахская складчатая страна), Тургайская депрессия и пустыня Бет-Пак-Дала (Голодная степь), кроме Казахского нагорья и части Мугоджар, была занята морем.

В течение среднего олигоцена площадь материка Киргизии расширилась за счет поднятия Памирской страны, Мугоджар и зоны, окаймляющей Казахское нагорье.

Таким образом, говоря о растительности Казахстана, мы должны иметь в виду сушу древней Киргизии, имевшую связь с восточными, азиатским и ангарским, центрами распространения флор, и Мугоджары, связанные с Европейским материком и его флорой. Как полагают некоторые исследователи, казахстанский участок палеогенового моря изобилует архипелагами островов, по которым шло расселение растительности и которые отчасти служили источниками пыльцы и спор в морских отложениях.

Киргизия еще в древние времена была сушей, которая с мезозоя не заливалась морем, следовательно, растительность на этом материке развивалась издавна, и растительные семейства, роды и виды имеют здесь гораздо более глубокие связи, чем растительность тех участков суши, которые вскрылись лишь в конце палеогена. Таким образом, флора Киргизии была в своем роде самобытной и имела, по-видимому, связь и с древней флорой Средиземноморья и с более древними, возможно гондванскими, флорами (Вульф, 1944).

На основании палеоботанических данных можно предполагать, что в эоцене в Казахстане, до района оз. Селеты, была распространена тро-

пическая вечнозеленая флора, отнесенная А. Н. Криштофовичем к «полтавской»; с родами: *Ficus*, *Quercus*, *Laurus*, *Cinnamomum*, *Oreodaphne* и сем. *Proteaceae* (*Banksia*, *Dryandra*), *Myrtaceae*, а из голосеменных — *Sequoia Coulttsiae* и *Sequoia Sternbergii* (*Sequoia Langsdorfii* характерна уже для более умеренных флор). В этот же комплекс входят некоторые представители сем. *Cuscadaceae* и род *Pinus*, а также большое разнообразие видов тропических папоротников из родов: *Chrysodium*, *Gleichenia*, *Adiantum*, *Pteris*, *Woodwardia*, *Osmunda*, *Aneimia*, *Lygodium*, *Marratia*. Эта тропическая флора все больше и больше обогащается ксерофитами по направлению к восточным границам ее распространения, т. е. к Туркмении, где она уже насчитывает большое число видов *Dryandra*, *Celastrorphyllum* и *Rhus*.

К северу от оз. Селеты территория Азии имела совершенно иной флористический облик. Это эоценовая «тургайская» флора А. Н. Криштофовича. Прототипом этой лесной флоры в Азии была цагайская флора (верхнемиловая). Характерными элементами этой флоры А. Н. Криштофович считал *Ginkgo* (так как этот род отсутствует в полтавской флоре), *Sequoia Langsdorfii*, *Taxodium distichum*, *Glyptostrobus*, *Fagus*, *Carpinus*, *Alnus*, *Betula*, *Castanea*, *Populus*, *Liquidambar*, *Juglans*, *Pterocarya*, *Zelcova*. В олигоцене, в Зайсанской котловине и на востоке до Иртыша, а на запад — до Аральского моря распространялась тургайская умеренная листопадная лесная флора, включающая некоторые элементы полтавской субтропической флоры в ее наиболее ксерофитных вариантах. В миоцене в Средней Азии уже развиты открытые ландшафты с растительностью типа ксерофитных низкорослых саванн.

Работы И. Борщова (1865), Е. В. Вульфа (1944), М. М. Ильина (1936, 1937, 1945 и др.), Е. П. Коровина (1935), И. М. Крашенинникова (1925), В. П. Малеева (1940), П. Н. Овчинникова (1940), М. Г. Попова (1927) и многих других дают огромный материал, позволяющий проследить историю формирования флор Средней Азии и отчасти Казахстана, причем большинство авторов, с М. М. Ильиным и Е. В. Вульфом во главе, приводят вполне убедительный материал, основанный на флористическом анализе ряда пустынных и полупустынных родов, о раннем возникновении пустынных и полупустынных формаций Туркмении из древних средиземноморских флор.

Историческая география растений Е. В. Вульфа (1944) и ряд работ М. М. Ильина значительно пополняют и, я бы сказала, подкрепляют и расширявают схему развития третичной флоры, нарисованную А. Н. Криштофовичем. По мнению этих исследователей, в областях, окружавших древнее море Тетис, а следовательно, и в южных пределах Киргизского третичного материка, основной флорой была древняя средиземноморская. Эта флора включала и субтропические элементы лесной флоры и ксерофильные формации пустынь третичного периода.

В течение второй половины третичного периода древняя средиземноморская флора приняла с востока элементы умеренной тургайской флоры «гинкго». По всей вероятности, та же самая средиземноморская флора послужила основой при формировании саванного и пустынного ландшафта Казахстана. О раннем же развитии пустынной флоры говорит А. Н. Криштофович (1936<sub>1</sub>), предполагая, что в пределах Азии еще в начале третичного периода были широко развиты пустынные ландшафты, которые узкой полосой разделяли области полтавской и тургайской флор. Данные спорово-пыльцевых анализов по Северному Приаралью и Павлодарскому Прииртышью также указывают на раннетретичное происхождение пустынных и саванных ландшафтов, что подтверждается находками пыльцы *Zygophyllaceae*, *Chenopodiaceae*, *Ephedra* и *Welwitschia* в эоценовых, олигоценых и миоценовых отложениях.



Для познания состава и путей формирования лесных формаций данные спорово-пыльцевого анализа также представляют не только богатый, но и новый материал, освещающий с совершенно новой точки зрения состав лесных формаций палеогена. Широколиственные, листопадные леса олигоцена в Казахстане, по данным пыльцевого анализа, были смешанными хвойно-широколиственными, а местообитания с высокими отметками над уровнем моря, по-видимому, населяли хвойные леса, которые имели широкое распространение в Казахстане, Приаралье и на Мугоджарах, во всяком случае, до миоцена. Под влиянием общей аридизации климата и усилившейся континентальности его после окончательного отступления олигоценного моря и миоценового солоноватоводного бассейна леса постепенно уступали место степным и полупустынным ассоциациям.

---

### III. ЗНАЧЕНИЕ ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПАЛЕОЛАНДШАФТА ПАЛЕОГЕНА И ОТЧАСТИ НЕОГЕНА

Работ, посвященных специальному изучению ископаемой пыльцы голосеменных растений, в нашей отечественной литературе очень мало. Между тем морфологические особенности большинства родов пыльцы голосеменных, в особенности относящихся к сем. Pinaceae, Podocarpaceae и отчасти Taxodiaceae, настолько характерны, что они, пожалуй, легче могут быть распознаваемы, чем какие-либо из представителей покрытосеменных. Кроме того, пыльца голосеменных, как правило, наиболее часто встречается в ископаемом состоянии.

При изучении спорово-пыльцевых спектров палеогена и отчасти неогена обнаружено большое число пыльцевых зерен прекрасной сохранности, принадлежащих видам, которые в большинстве своем уже неоднократно отмечались в третичных отложениях различных районов СССР и за рубежом. К сожалению, в большинстве работ по спорово-пыльцевому анализу третичных отложений пыльца и споры определялись обычно только до рода или семейства. Лишь в отдельных случаях давались видовые названия, но при этом зачастую одно и то же видовое название придавалось разными авторами пыльце, принадлежащей в действительности к различным систематическим единицам. Происходило это вследствие ограниченности наших знаний в области морфологии пыльцы современных растений. Такими эти знания были к моменту составления описательной части настоящей работы, но все же они значительно больше, чем, скажем, 10—15 лет назад.

Достаточно напомнить, что за последние годы появились работы М. Х. Моносзон-Смолиной (1949, 1950, 1952), Л. А. Куприяновой (1945), З. П. Губониной (1952), А. Н. Сладкова (1953, 1954), Е. Д. Заклинской (1953). Наконец, в 1954 г. вышла прекрасная работа В. В. Зауер и работа И. С. Штэпа. За рубежом в этот же период вышли работы Эрдтмана (Erdtman, 1943, 1947, 1952), Селлинга (Selling, 1947) и ряд других, посвященных морфологии пыльцы ныне живущих растений. Однако в большинстве перечисленных работ содержится описание пыльцы покрытосеменных, а сравнительный материал для описания и определения ископаемой пыльцы голосеменных растений все еще остается очень ограниченным.

В 1952 г. вышла работа Н. А. Болховитиной, в которой она предлагает новую классификацию пыльцы хвойных растений, снабженных воздушными мешками, выделенных из мезозойских отложений Казахстана, Сибири и Русской платформы. Там же дана краткая характеристика морфологических рядов и типов пыльцевых зерен в генетической последовательности. Н. А. Болховитина пытается дать схему изменения строения пыльцевых зерен хвойных от верхнего палеозоя до верхнего мела и

кайнозоя, выделяя морфологические типы зерен, характерных для спектров отдельных эпох. К сожалению, автор не продолжил своих работ в сторону большей детализации в изучении эволюции структурных элементов пыльцы голосеменных.

В 1954 г. опубликована работа В. В. Зауер, посвященная значению ископаемых видов рода *Cedrus* для целей стратиграфического расчленения континентальных отложений. Автор приводит данные о строении пыльцы современных видов рода *Cedrus* и приходит к выводу, что морфологические особенности пыльцы тесно увязаны с морфологическими признаками растения в целом, а затем приводит описание различных ископаемых видов пыльцы рода *Cedrus* и прослеживает их широтное и вертикальное распространение в мезозойских отложениях. В. В. Зауер удалось установить, что кедр производит так же много пыльцы, как и прочие роды сем. Pinaceae, за исключением рода *Pinus*, и что пыльца рода *Cedrus* не разносится далеко от производящего растения. Установлено также, что по морфологическим признакам пыльцы кедр генетически близок к роду *Picea* и некоторым представителям рода *Pinus* из подрода *Haploxyylon*.

Проследив местонахождения пыльцы и макроскопических остатков кедра, В. В. Зауер пришла к выводу, что этот род, появившийся впервые в перми, достиг своего развития к концу нижнего мела. Концом расцвета рода *Cedrus* следует считать верхнетретичное время.

Весьма интересна выявленная В. В. Зауер приуроченность ископаемых видов рода *Cedrus* к местообитаниям с высокими отметками, в районах с расчлененным рельефом, и совершенное отсутствие его на равнинных местах и в областях депрессий. В заключение автор приходит к выводу, что ископаемые виды кедров могут быть использованы для стратиграфии континентальных отложений. Работа В. В. Зауер является, пожалуй, образцом как морфологических описаний видов ископаемой пыльцы, так и историко-флористического исследования при помощи спорово-пыльцевого анализа. Наши наблюдения относительно распространения голосеменных в Павлодарском Прииртышье и Северном Приаралье в кайнозое, естественно, не претендуют на столь глубокое исследование, тем более, что объектом является не один род, а большое число различных видов пыльцы голосеменных, принадлежащих к большому же числу семейств. Уже одно это исключает возможность в краткой работе дать глубокий анализ истории целого класса растений, хотя бы на ограниченной территории. Представленная работа является одной из первых попыток флористического подхода к истолкованию данных по спорово-пыльцевому анализу и этим самым — научного обоснования метода использования их для стратиграфической цели.

При этом автору хотелось показать, что пыльца голосеменных (в общем комплексе ископаемой пыльцы) позволяет проследить, пока только схематично, некоторые этапы в истории флоры и растительности больших территорий. Занимаясь изучением спорово-пыльцевых спектров морских или континентальных кайнозойских отложений (в основном палеогеновых) Павлодарского Прииртышья, Северного Приаралья и ряда районов юга Европейской части СССР, автор смог выделить большое количество видов пыльцы и спор, характеризующих разнообразные ценозы, типы растительных ассоциаций, группы их и флористические комплексы.

Спорово-пыльцевые спектры палеогеновых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья содержат значительное количество пыльцы голосеменных растений, процентное содержание которой закономерно изменяется от горизонта к горизонту и различно в широтном направлении. Во многих спектрах, в частности в выделенных из континентальных отложений среднего олигоцена, пыльца голосеменных преобладает над пылью покрытосеменных. Последнее отмечалось в ряде работ,

по спорово-пыльцевому анализу олигоцена (Северный Казахстан — Заклинская, 1953; Центральный и Западный Казахстан — Покровская, 1954; Приаралье — Чигурьева, 1948; Тургайская впадина — Бойцова и Покровская, 1954; Абузярова, 1951<sup>1,2</sup> и др.).

Следует отметить, что при сопоставлении данных спорово-пыльцевого анализа с данными по ископаемой листовой флоре наблюдаются почти постоянные расхождения в содержании остатков голосеменных. В основном это относится к представителям сем. *Pinaceae* и рода *Pinus* в частности.

Еще в 1948 г. А. А. Чигурьева в своей работе по флоре Ашу-Таса указывала, что на основании микроанализа список ископаемой флоры, определенной М. Ф. Нейбург (1928<sub>2</sub>), пополняется такими родами, как *Pinus*, *Picea* и др.

Автор настоящей работы также может привести примеры, подтверждающие это положение. При сопоставлении данных по листовым отпечаткам из эоценовых отложений западного склона Мугоджар (Баранов, 1953) с составом спорово-пыльцевых спектров из одновозрастных морских отложений Северного Приаралья (Заклинская, 1953<sub>3</sub>) оказалось, что флористические комплексы, выявленные обоими методами исследования, весьма близки в отношении состава покрытосеменных растений, представленных в основном богатым комплексом жестколистных древесных растений с дубами, каштанодубами, лаврами и др. Но данные спорово-пыльцевых анализов дополнили список растений большим количеством видов хвойных (*Pinus*, *Picea*, *Cedrus* и др.), входивших, по-видимому, в состав растительных ассоциаций тех участков суши в эоцене, которые были в значительной мере удалены от места непосредственного захоронения листовых остатков.

Далее, как известно, тургайская флора на территории северной части Казахстана, по палеоботаническим данным, характеризуется преобладанием бука, граба, ольхи, ореха, ликвидамбра и прочих широколиственных листопадных растений. В то же время данные спорово-пыльцевого анализа показывают, что флора Тургайской палеогеографической области, помимо широколиственных листопадных пород, была весьма богата различными видами хвойных, которые в некоторых случаях даже преобладали над лиственными породами.

Расхождение данных спорово-пыльцевых анализов с анализами ископаемых макроскопических остатков объясняется тем, что условия их захоронения совершенно различны. Находки листовых отпечатков и растительного детритуса обычно приурочены непосредственно к местам захоронения, расположенным, в свою очередь, в непосредственной близости к месту обитания производящих растений. Пыльца же, разносясь по воздуху, оседает на некоторых расстояниях от производящих растений, причем радиус разноса некоторых видов голосеменных растений достигает нескольких десятков километров. Таким образом, в отложениях, сформировавшихся в водоеме, где захоронялись макроскопические растительные остатки, мы можем обнаружить пыльцу не только тех растений, которые непосредственно окружали место захоронения, но также и тех, которые входили в состав ассоциаций достаточно удаленных территорий.

Способность к разносу по воздуху особенно сильно развита у пыльцы хвойных с воздушными мешками. К ним относятся различные виды рода *Pinus*, *Picea*, *Podocarpus*, *Abies* и др. Отсюда становится понятным тот факт, что в осадочных отложениях, которые содержат обильные остатки растений с крупной листвой, произраставших на территориально ближайших местообитаниях, встречается пыльца тех растений, которые входят в состав ассоциаций более удаленных территорий.

Хвойные, принимавшие, по-видимому, значительное участие в составе наземной растительности той части суши, которая примыкала к

территории нынешнего Прииртышья и Северного Приаралья в палеогене, не везде сохранились в виде микроскопических остатков. Пыльца же этих растений встречается в больших количествах и представляет значительное число родов и видов.

В палеогене различные виды рода *Pinus*, вероятно, занимали, в отличие от болотного кипариса, дренированные местообитания с высокими отметками. Накопление же основных флороносных горизонтов происходило в условиях пониженного рельефа и защищенных местообитаний, где преимущественно селились лиственные породы.

Листовые отпечатки характеризуют, так же как и карпологические остатки, растительность более узких регионов, чем спорово-пыльцевые спектры. Кажущееся же расхождение данных спорово-пыльцевых анализов и макроскопических остатков является, собственно говоря, не расхождением, а взаимодополнением. Поэтому объединенное и комплексное исследование всеми методами палеоботаники дает наиболее полный материал для восстановления истории флоры и растительности, а следовательно, и для целей стратиграфии.

Ископаемые пыльца и споры, в дополнение к разбросанным находкам макроскопических остатков, дают массовый статистический материал, пригодный для восстановления последовательной смены флористических комплексов и типов растительности.

Следует отметить, что о макроскопических остатках голосеменных палеогена в Казахстане имеется сравнительно немного сведений; в сводке А. Н. Криштофовича (1941) значится всего двенадцать видов, найденных на территории Казахстана. Среди них отмечены роды *Abies*, *Araucaria*, *Cupressinoxylon*, *Ginkgo*, *Glyptostrobus*, *Pinus*, *Sequoia* и *Taxodium*. За последнее время список находок голосеменных, за исключением видов рода *Cedrus*, по данным В. В. Зауер (1954), пополнился незначительно. В известных до сих пор работах (Чигурьева, 1951<sup>1, 2</sup>; Покровская, 1954; Лавров, 1951, 1953; Абузярова, 1954; Зауер, 1954, Покровская и Бойцова, 1954 и др.), в которых приводятся списки спорово-пыльцевых комплексов различных горизонтов третичных отложений (от эоцена до миоцена включительно), содержится не более пяти наименований родов голосеменных.

Автору настоящего сообщения удалось установить для палеогена изучаемых районов более ста видов пыльцы голосеменных, относящихся к сем. *Ginkgoaceae*, *Cycadaceae*, *Araucariaceae*, *Taxodiaceae*, *Cupressaceae*, *Podocarpaceae*, *Pinaceae*, а также пыльцу родов *Ephedra*, *Welwitschia* и *Gnetum*.

Представители отдельных семейств и родов обширного класса голосеменных развивались по-разному в различные отрезки кайнозоя на территории, примыкающей к палеогеновому морю Приаралья и Казахстана, а затем на участках суши, освободившейся от морских вод.

Об истории развития и «регрессии» голосеменных растений во флоре нынешнего Приаралья и Северного Казахстана будет сказано ниже, здесь же только отметим, что в настоящее время голосеменные в Казахстане представлены лишь тремя семействами: *Pinaceae*, *Cupressaceae* и *Ephedraceae*, из которых, как отмечает в своей сводке Н. В. Павлов (1947), в Казахстане известны следующие виды:

#### Семейство *Pinaceae*

*Pinus silvestris* L.— сосна обыкновенная, обитающая в основном на равнинно-песчаных участках — в виде боров, или единично — на скалах мелкосопочников.

*Pinus sibirica* (R и p r.) М а у г.— кедр сибирский, ограниченно распространенный только в Восточном Казахстане, у верхней границы леса на Алтае.

*Picea Schrenkiana* Fisch. et Mey — ель тяньшаньская, в основном заселяющая горные районы Джунгарского и Заилийского Ала-Тау и другие горы.

*Larix sibirica* Ledeb. — лиственница сибирская, которая обильна только в горах Восточного Казахстана (Алтай, Саур, Тарбагатай).

*Abies sibirica* Ledeb. — пихта сибирская, растущая только в лесном поясе гор Восточного Казахстана и Алма-Атинской области (Алтай, Джунгарский Ала-Тау).

*Abies Semenovii* B. Fedtsch. — пихта Семенова, которая известна только в горах Южно-Казахстанской области и спорадически встречается среди елового леса.

#### Семейство Cupressaceae

Известен только один род — *Juniperus*, представленный восемью видами:

*Juniperus communis* L. — можжевельник обыкновенный, горнолесной или горный вид в Западном Казахстане.

*Juniperus pseudosabina* Fisch. et Mey — можжевельник алтайский, распространенный только по верхней границе лесного пояса Алтая, Тарбагатай, Джунгарского Ала-Тау.

*Juniperus sabina* L. — можжевельник казацкий, горностепной вид, наиболее широко распространенный в Казахстане на мелкосопочнике, а также в кустарниково-степном поясе гор.

*Juniperus semiglobosa* Rgl. — можжевельник полушаровидный, горнолесной вид, обитающий только в горах южной области.

*Juniperus seravschanica* Kom. — можжевельник зеравшанский, нагорный вид, обитавший только в Южном Казахстане.

*Juniperus sibirica* Burget — можжевельник приземистый, горнолесной, широко распространенный вид в лесистом и субальпийском поясах гор Восточного Казахстана.

*Juniperus talassica* Lypsky — можжевельник таласский, который растет только в высокогорных районах Южного Казахстана.

*Juniperus turkestanica* Kom — можжевельник туркестанский, высокогорный субтропический вид, обитающий только по верхней границе лесного пояса гор ряда областей.

#### Семейство Ephedraceae

Представлено четырьмя видами степных и горностепных местообитаний:

*Ephedra distachya* L. — эфедра обыкновенная, степняк, распространенный в Северном Казахстане, не идущий к югу за пределы ковыльных и ковыльно-степняковых степей.

*Ephedra equisetina* Bge. — эфедра хвощевая, горностепной вид, обитающий только в горах на южных каменистых склонах кустарникового и лесного пояса.

*Ephedra intermedia* Schrenk. et C. A. Mey — пустынно-степной и пустынный вид Центрального и Южного Казахстана. Растет в полынных и каменистых пустынях везде, кроме полынно-злаковых степей.

*Ephedra lomatolepis* Schrenk. — эфедра окаймленная, пустынный, растущий в основном в песчаных пустынях Южного Казахстана и Карагандинской области (встречается и в Алма-Атинской области).

Как следует из приведенных данных, в настоящее время на территории Северного Казахстана и в особенности Северного Приаралья голосеменные представлены очень слабо. Участие их в растительном покрове ограничивается лишь представителями родов *Ephedra*, *Pinus*, *Juniperus*. При этом род *Pinus* на изучаемой территории имеет только одного

представителя, а именно — *Pinus silvestris*. Остальные виды рода *Pinus* представлены лишь горными видами, приуроченными в основном к южным и восточным районам Казахстана.

Широко распространенные в палеогене и отчасти в неогене представители сем. Podocarpaceae, Araucariaceae, Taxodiaceae, Cuscadaceae, Ginkgoaceae, не говоря уже о Gnetaceae и Welwitschiaceae, в современной флоре Казахстана отсутствуют. Исчезли они не одновременно, так же как не в одно время появились и достигли кульминационного пункта своего развития.

По данным спорово-пыльцевого анализа выясняется продолжительная и разнообразная история голосеменных, безусловно связанная с общей историей флоры и растительности, которая в свою очередь развивалась в связи с изменениями общей физико-географической обстановки. Так например, появление пыльцы *Tsuga* приурочено к спектрам континентальных отложений, в комплексе с возросшим распространением смешанных лесов, где значительное участие принимают роды *Pinus* и *Picea*.

Ограниченный цикл развития *Taxodium*, безусловно, связан с общим понижением температур и увеличением влажности в нижнем и среднем олигоцене, когда в пределах суши на месте Казахского нагорья, а возможно, и в некоторых районах Западной Сибири начали появляться элементы широколиственной мезофильной флоры. В дальнейшем максимальный расцвет *Taxodium* приурочен ко времени особенно интенсивного распространения умеренной лесной флоры, пришедшей с востока и севера (максимум пыльцы *Taxodium* в спектрах из континентальных отложений второй свиты Северного Прииртышья вместе со значительным преобладанием пыльцы широколиственных пород).

Неоднократное увеличение процентного содержания пыльцы рода *Cedrus* связано с тектоническими поднятиями, и полное исчезновение его совпадает с эпохой выравнивания страны и с общей аридизацией климата, когда на кристаллических останцах усиленно развивались сосны из секции *Eurpitys* (по-видимому, *Pinus* aff. *silvestris*).

Мы полагаем, что при внимательном изучении отдельных представителей пыльцы родов и видов голосеменных можно выделить определенные группы их, а возможно, и отдельные виды, которые могут быть использованы для корреляции как морских, так и континентальных отложений палеогена и неогена Северного Прииртышья и примыкающего к нему с востока участка Западно-Сибирской низменности, а также Северного Приаралья и смыкающегося с ним Тургайского прогиба.

Интересно, что при анализе пыльцы голосеменных и при сравнении ареалов их современного распространения в пределах Казахстана выясняется, что флора в палеогене была действительно смешанной, как это отмечал и А. Н. Криштофович (1946). Разнообразный комплекс ее свидетельствует также о том, что палеогеновая казахстанская флора состояла из австрийских, африканских, монголо-китайских, североамериканских и южноамериканских представителей, не считая флоры Сибири и Гренландии. Это может быть подтверждено анализом ареалов современного распространения ряда семейств и родов.

Относительно смешения экологически различных типов флоры палеогена, которое также отмечает А. Н. Криштофович, данные пыльцевого анализа дают дополнительный материал. По-видимому, в основном это происходит вследствие того, что Казахстан, включая и территорию, скрытую в начале палеогена под морской трансгрессией, находился как бы на рубеже границ распространения двух основных флор — полтавской и тургайской (в понимании А. Н. Криштофовича). Именно в течение палеогена эти флоры изменяли свой первоначальный облик. Вся территория Казахстана претерпевала существенные перестройки — регрессивные и

трансгрессивные движения моря, тектонические поднятия, смену веков интенсивной эрозии веками относительного покоя. Все это делало территорию Казахстана ареной борьбы за существование в растительном мире, относительно частых изменений ландшафта и смены экологических типов растительности. Естественно, что в это время были такие промежутки времени, когда на одной территории одновременно уживались растительные формы, экологически различные. Поэтому нам не представляются невозможными одновременные находки в морских отложениях пыльцы относительно влаголюбивого кедра с пылью типичного ксерофита *Nitraria Schoberi* и с пылью миртовых.

Кедры, заканчивающие свое развитие к неогену, в верхнепалеогеновой флоре (судя по относительно бедному содержанию пыльцы его видов в спектрах) играли подчиненную роль, отступали в горные районы, где искали убежища в местах, защищенных от аридных влияний.

Флора *Nitraria* заселяла открытые местообитания с песчаными, местами засоленными грунтами, располагавшимися в прибрежно-литоральных зонах теплого палеогенового моря. Миртовые, самые разнообразные, входили в состав ассоциаций юго-восточных флор с *Podocarpus*, *Dacrydium* и *Dammara*, доживающих свой век на территории Казахстана.

В то же время в пределах северных границ Полтавской ботанико-географической провинции (области) начали появляться первые представители умеренных мезофильных флор с северо-востока Сибири с *Betula*, *Yuglans* и *Carpinus*, которые иногда в виде единичных пыльцевых зерен встречаются в спорово-пыльцевых спектрах вместе с единичными же зернами пыльцы *Pinus protocembra* (pollen) из секции *Sembrae* (возможно, прародитель *Pinus sibirica*).



#### IV. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ В КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЯХ ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ

Проследим содержание пыльцы голосеменных (включая сем. *Ephedraceae* и роды *Welwitschia* и *Gnetum*, поскольку более точно их систематическое положение еще не определено), начиная от эоцена до верхов палеогена по Северному Приаралью и от палеоцен-эоцена до неогена включительно — для Павлодарского Прииртышья, и сравним его с распределением в современных отложениях (табл. 1).

##### СЕВЕРНОЕ ПРИАРАЛЬЕ

В спектрах тасаранской (фиг. 5) свиты содержание пыльцы голосеменных доходит в нижних горизонтах до 85%, а затем резко снижается до 30—50% и в этих пределах держится до самого верха свиты. Несколько беднее пыльцой голосеменных спектры саксаульской свиты: содержание их в средней части свиты 30%, в верхних же и нижних частях повышается до 50%.

В спектрах чеганской свиты содержание пыльцы голосеменных более равномерно, оно колеблется от 40 до 50%, за исключением верхних горизонтов (верхних, исследованных автором), где голосеменных всего 8—10%.

Наиболее богатыми в отношении содержания пыльцы голосеменных являются спектры первой, кутанбулакской, свиты; здесь пыльца голосеменных в некоторых горизонтах достигает 80%. Несколько беднее спектры второй, чиликтинской свиты; содержание пыльцы голосеменных в ней равномерно по всей толще и колеблется лишь в пределах 40—50%, за исключением отдельных горизонтов, где она достигает 80%.

В общем спектры и морских и континентальных отложений богаты пыльцой голосеменных, и их содержание колеблется незначительно. По составу же представленных семейств, родов и видов голосеменных спектры различных свит значительно отличаются один от другого.

Спектры тасаранской свиты характеризуются преобладанием пыльцы рода *Pinus*, содержание которой в отдельных горизонтах (средняя часть) доходит до 85% (от общего числа зерен пыльцы голосеменных). Представлен род *Pinus* в основном секциями: *Cembrae* S p a c h. (*Pinus protocembra* sp. nov. (pollen) и другие виды — до 40%); *Banksia* M a y r. — до 20%; *Pseudostrobus* E n d l. — менее 20%; *Strobus* S c h a w. — менее 20%; *Australiae* L o u d. — менее 10%. Остальные роды сем. *Pinaceae* представлены малым количеством видов.

Род *Cedrus* L i n k. представлен четырьмя видами, из которых преобладают два [*C. longisaccata* sp. nov. (pollen) и *C. laxireticulata* Z a u e r

+	семейства, роды и виды, впервые обнаруженные в тасаранской свите
?	" " " " " в сансаульской .
*	" " " " " в чеганской .
□	" " " " " в нуганбулакской свите

Фиг. 5. Схема распространения пыльца голосеменных в карбонизских отложениях Северного Приаралья

Т а б л и ц а 1

Распределение пыльцы голосеменных в морских и континентальных  
отложениях палеогена Северного Приаралья

Голосеменные	Свиты по А. Л. Яншину и Л. Н. Формозовой				
	тасаран- ская	саксауль- ская	чеганская	кутанбу- лакская	чили- тинская
Суммарно, % . . . . .	30—85*	30—50	0—50	58—80	40—80
Преобладает, % . . . . .	60—80	50	40	70	50
Cycadacites . . . . .	+	+	—	+	—
Cycadaceae . . . . .	0—5	3—5	—	<5	+
<i>Zamites</i> sp. (pollen) . . . . .	—	—	+	—	—
<i>Ginkgoites</i> sp. . . . .	0—5	—	—	—	—
Ginkgoaceae					
<i>Ginkgo bilobaeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	0—5	0—10	—	—
<i>Ginkgoites</i> sp. (pollen) . . . . .	—	—	+	—	—
<i>Taxites</i> sp. . . . .	+	+	+	+	+
Taxaceae					
<i>Taxus baccataeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	—	5—10	5—10
<i>T. cuspidataeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	+	+	—	—
<i>Torreya californiformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	0—10	0—10	0—10	—	—
Podocarpaceae					
<i>Podocarpites kazakhstanica</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	—	+	—
<i>P. gigantea</i> sp. nov. (pollen) . .	—	<5	0—1	<1	—
<i>Podocarpus sellowiformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	<1	—	—	—
<i>P. andiniiformis</i> sp. nov. (pollen)	—	<1	<1	<1	<1
<i>P. nageiaeformis</i> sp. nov. (pollen)	<12	—	<5	<1	<1
<i>Dacrydium elatumiformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	<10	0—10	—	+	—
Araucariaceae					
<i>Araucaria</i> sp. . . . .	—	—	5—10	—	—
<i>A. elegans</i> sp. nov. (pollen) . . .	0—5	—	—	—	—
<i>Agathis</i> sp. . . . .	—	—	<1	—	—
<i>Agathis ovataeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	<10	+	—	—
Pinaceae					
<i>Abies</i> sp. . . . .	+	—	—	—	—
<i>Abies sibiriciformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	+	+	+
<i>A. protofirma</i> sp. nov. (pollen) .	+	+	+	—	—
<i>Keteleeria davidianaeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	+	+	+	+

Таблица 1 (продолжение)

Голосеменные	Свitys по А. Л. Яншину и Л. Н. Формозовой				
	тасаран- ская	сансауль- ская	чеганская	кутанбу- лакская	чили- тинская
Pinaceae					
<i>Picea tataranica</i> sp. nov. (pollen)	+до 3	<1	—	—	—
<i>P. alata</i> sp. nov. (pollen) . . .	—	+	+	+	—
<i>P.</i> секции <i>Eupicea</i> Willkm. . .	—	—	+	+	+
<i>Cedrus laxireticulata</i> Zauer (pollen) . . . . .	+до 10	+до 10	—	—	—
<i>C. piniformis</i> sp. nov. (pollen) .	—	5—12	—	1—5	0—1
<i>C. longisaccata</i> sp. nov. (pollen)	8—10	0—1	0—1	0—1	—
<i>C. Janschinii</i> sp. nov. (pollen) .	+до 5	2—20	0—25	—	—
<i>C. pusilla</i> Zauer (pollen) . . .	+	0—10	0—12	1—3	—
<i>C. aff. libani</i> Loud. . . . .	—	—	0—1	+	—
<i>C. aff. deodara</i> Loud. . . . .	—	—	—	<10	—
<i>C. aff. atlantica</i> Manetti . . .	—	—	0	+	—
Род <i>Pinus</i> (суммарно) . . . . .	60—85	40—50	30—80	50—80	40—60
<i>Pinus</i> секции <i>Cembrae</i> Shaw. .	20—40	5—25	5—60	20—30	<25
<i>P. aff. koraiensis</i> Sieb. et Zucc. . . . .	—	—	—	1—10	1—10
<i>P. sibiriciformis</i> sp. nov. (pollen)	+	—	—	—	—
<i>Pinus protocembra</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	5—15	5—15	5—12	8—13	5—15
<i>P.</i> секции <i>Strobus</i> Shaw. . . .	0—20	10—30	<20	<20	<20
<i>P. strobiformis</i> sp. nov. (pollen) .	—	—	—	—	+
<i>P. peuceformis</i> sp. nov. (pollen) .	—	+	+	+	+
<i>P. exelsaeformis</i> sp. nov. (pollen)	—	+	—	+	—
<i>P. ponderosaeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	—	—	—	—
<i>P. bicornis</i> sp. nov. (pollen) . . .	+	+	—	—	—
<i>P. minutus</i> sp. nov. (pollen) . . .	—	—	—	+	+
<i>P. taedaformis</i> sp. nov. (pollen)	—	<20	<10	+до 20	+до 20
Секция <i>Australes</i> Loud.					
<i>Pinus singularis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	<10	<5	<10	>10	<10
<i>Pinus banksianaeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	10—20	0—1	0—1	0—1	0—1
<i>P. halepensisformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	—	—	—	—
<i>P.</i> секции <i>Eupitys</i> Spach. . . .	0—5	0—5	0—5	1—32	5—35
<i>Tsuga crispa</i> sp. nov. (pollen) . .	—	—	—	0—5	0—5
Taxodiaceae					
<i>Sciadopitys tuberculata</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	+	+	+
<i>Sequoites</i> sp. . . . .	+	+	+	+	+
<i>Sequoia semperviriformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	<5	<5	<5	<5

Таблица 1 (окончание)

Голосеменные	Свиты по А. Л. Яншину и Л. Н. Формозовой				
	тасаран- ская	саксауль- ская	чеганская	кутанбу- ланская	чили- тинская
Taxodiaceae					
<i>Taxodites</i> sp. . . . .	+	+	+	+	+
<i>Taxodium</i> aff. <i>distichum</i> L. (Rich.) . . . . .	—	—	5—12	5—15	5—12
Cupressacites (pollen) . . . . .	+	+	+	+	+
Cupressaceae . . . . .	0—5	+до 30	20—60	15—60	5—25
Ephedraceae (суммарно) . . . . .	—	+до 5	+	+до 5	0—5
Gnetaceae . . . . .	—	—	—	—	—
<i>Gnetumites</i> sp. (pollen) . . . . .	<5	<5	0—5	—	—

\* Процентное содержание голосеменных суммарно дано по отношению к общей сумме сосчитанных пыльцевых и споровых зерен. Цифры, обозначающие содержание отдельных видов, даны в процентах по отношению к сумме голосеменных.

\*\* Знак + обозначает присутствие в виде единичных находок; знак — обозначает отсутствие.

(pollen)], которые не имеют аналогов среди пыльцы современных видов рода *Cedrus*. Общая сумма их не превышает 10%. Род *Picea* Dietr. (также не более 10%) представлен новым видом *P. tasanica* sp. nov. (pollen), впервые выделенным из отложений тасаранской свиты. Иногда встречаются не определенные до вида единичные пыльцевые зерна *Keteleeria* и *Abies*. Пыльца рода *Tsuga* отсутствует. Редко, обычно не более чем 5—10%, встречается пыльца сем. Cupressaceae, Taxaceae [*Torreya* sp., *Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen)], Araucariaceae [*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen)], Gnetaceae *Gnetumites* sp. (pollen)] и Podocarpaceae. Содержание последнего в спектрах тасаранской свиты больше, чем во всех остальных свитах (до 12%). Сем. Podocarpaceae представлено несколькими видами рода *Podocarpus* L. Herit. [*P. nageiaeformis* sp. nov.) (pollen) и др.], пыльца которых отличается рядом признаков от пыльцы современных видов этого рода и одним видом рода *Dacrydium* [*D. elatunifformis* sp. nov. (pollen)]. В спектрах саксаульской свиты род *Pinus* суммарно представлен 40—50%. Одновременно значительно снижается содержание пыльцы *Pinus* секции *Sembrae* (5—25%), представленной в основном, так же как и в тасаранской свите *Pinus protosembra* sp. nov. (pollen) — 5—15%. В спектрах из самых верхних горизонтов свиты встречается пыльца, несколько напоминающая *P. koraiensis* и *P. sembra*, отмеченные при подсчете к секции *Sembrae*. Секция *Strobus* представлена значительно богаче, чем в тасаранской свите (до 35%). В нижних горизонтах свиты впервые появляется пыльца, подобная *Pinus exelsa* Wall., — *Pinus exelsaeformis* sp. nov. (pollen), *P. peuceformis* sp. nov. (pollen) и *P. taedaeformis* sp. nov. (pollen). Общее содержание пыльцы рода *Pinus* в саксаульской свите довольно постоянно и колеблется в пределах от 40 до 50%. Род *Cedrus* в саксаульской свите представлен пятью видами: *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen) — 2—20%, *C. pusilla* Zaueg (pollen) — 0—10%, *C. piniformis* sp. nov. (pollen) — 5—12%. *C. laxireticulata*

*Zaueg* (pollen) — около 10% и *C. longisaccata* sp. nov. (pollen) — единично. Значительно увеличивается количество пыльцы сем. Cupressaceae (около 30%) и впервые отмечена пыльца Taxodiaceae, принадлежащая, по-видимому, роду *Sequoia*. Среди пыльцы сем. Podocarpaceae также впервые появляются три новых вида: *Podocarpus andiniformis* sp. nov. (pollen), *P. sellowiformis* sp. nov. (pollen) и *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen). Общее содержание пыльцы сем. Podocarpaceae не превышает 12%. В верхних горизонтах свиты впервые появляется пыльца *Ginkgo* (менее 5%), возможно, *Ginkgo* aff. *biloba*. В общем спектры саксаульской свиты более бедны пыльцой голосеменных, чем спектры тасаранские, но богаче в видовом отношении и характеризуются относительно большим числом новых видов, которые не встречаются в спектрах предыдущих свит. Несмотря на это, спектры тасаранской и саксаульской свит флористически близки между собой. Представляют они флору тропическую (или субтропическую) и включают представителей таких семейств, которые ныне обитают в тропических и субтропических широтах южного полушария, а, судя по ареалам их современного распространения, имеют древнее происхождение, еще от гондванской флоры [сем. Araucariaceae и Podocarpaceae с родом *Dacrydium*, род *Torreya* (*Torreyaites*), *Pinus protocembra* sp. nov. — вид, близкий к *P. haploxyloides*, отмечающийся в спектрах нижнего мела и в более древних отложениях, род *Gnetum* и сем. Cycadaceae и др.]

В верхах саксаульской свиты обнаружена пыльца *Ephedra*. Появление пыльцы *Ephedra* совпадает с обилием пыльцы травянистых растений и кустарничковых ксерофитов в комплексе покрытосеменных, что косвенным образом указывает на усиление аридности климата и на наличие пустынных ассоциаций (возможно, на литоралиях моря).

Спектры чеганской свиты значительно отличаются от спектров отложений тасаранской и саксаульской свит. Вызвано это значительным изменением климатических условий (некоторое похолодание и увеличение влажности) и наступлением новой наиболее интенсивной трансгрессии моря. В связи с этим изменился и растительный покров окружающей суши. Содержание пыльцы различных видов рода *Pinus* в чеганских спектрах неравномерно и колеблется от 30 до 80%. В нижних горизонтах свиты колебания резко выражены, в верхних — идет постепенное увеличение — от 40 до 80%.

Не останавливаясь на перечислении процентного содержания пыльцы различных видов хвойных и прочих голосеменных, встреченных ранее в спектрах саксаульской свиты и повторяющихся в спектрах тасарана, отметим, что в чеганских спектрах впервые появляется пыльца болотного (?) кипариса (*Taxodium distichum*) и устойчиво удерживается от средних горизонтов до верхов чеганской свиты. В верхних горизонтах появляется пыльца *Cedrus* aff. *libani* и *C. aff. atlantica*. Виды, встречавшиеся в тасаранской свите, также встречаются и в чегане. Общее количество пыльцы *Cedrus* возрастает в верхних горизонтах свиты до 25%. Увеличивается содержание пыльцы рода *Picea* (до 12%), среди которой появляется пыльца, близкая к пыльце современной ели. Значительно увеличивается количество пыльцы сем. Ginkgoaceae (до 10%) и в то же время исчезают *Dacrydium* и *Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen). В общем в спектрах чеганской свиты заметно преобладание древних средиземноморских форм и примесь форм, идущих, по-видимому, из азиатских центров.

В период отложения чеганских глин на Киргизском материке, по-видимому, начали распространяться смешанные леса с участием в виде примеси умеренного листопадного комплекса с обилием хвойных деревьев, частью (как *Picea* и некоторые виды сосен) входивших в состав смешанных лесов, частью заселявших повышенные обитания на кристаллическом массиве Казахского нагорья. В пониженных обитаниях начали развиваться ши-

роколиственные и хвойно-широколиственные леса, в пределах которых среди болотистых водоемов начал селиться болотный кипарис (единичные находки).

Чеганские спектры Северного Приаралья отличаются большим количеством ксерофитов, что, по-видимому, обуславливается тем, что суша, примыкавшая с востока к Северно-Приаральскому морю, в основном входила в пределы Туркменской ксерофитной провинции Полтавской обл., которую выделил для палеогеновой растительности Средней Азии (северные берега моря Тетис) Е. П. Коровин в 1935 г.

Континентальные отложения Северного Приаралья обычно содержат небольшое количество пыльцы и спор, за исключением отдельных горизонтов с растительными остатками, трухой и стволами растений, где удается выделить огромное количество пыльцы самого разнообразного состава, значительно отличающегося от состава спектров чеганской свиты.

Пыльца голосеменных вообще и различных видов рода *Pinus* в частности преобладает в спектрах первой свиты (кутанбулакской) и значительно превышает относительное содержание ее в спектрах всех остальных свит морского и континентального палеогена Северного Приаралья, кроме самых верхних горизонтов чеганской свиты.

Разнообразие видов рода *Pinus*, а также рода *Cedrus* — значительно. Кроме 12 определенных видов *Pinus*, в спектрах много различных разновидностей одних и тех же видов. Род *Pinus* представлен видами *P. exelsaeformis* sp. nov. (pollen), *P. peuceformis* sp. nov. (pollen) секции *Taeda Sprasch.*, среди представителей которой впервые появляется мелкая пыльца, определенная как *P. minutus* sp. nov. (pollen), *P.* секции *Australiae Loud.*, секции *Banksia Mayr.*, секции *Cembrae Sprasch.*, представленной видами *P. protocembra* sp. nov. (pollen), *P. aff. koraiensis Sieb. et Zucc.* Процентное содержание видов, принадлежащих к секции *Cembrae*, в особенности *Pinus aff. koraiensis*, — значительно. Отмечено большое количество (до 30%) пыльцы *Pinus* секции *Eupitys*. Такое разнообразие пыльцы рода *Pinus* составляет отличительную черту всех спектров кутанбулакской свиты. Род *Cedrus* в кутанбулакской свите пополняется видом *Cedrus aff. deodara*. Общее содержание пыльцы всех видов *Cedrus* доходит в нижних горизонтах до 18%.

В более высоких горизонтах пыльца рода *Cedrus* уже не превышает 5 — 8%. Древние виды — *C. pusilla Zaucer* и *C. piniformis* sp. nov. (pollen) — встречены единично.

В спектрах кутанбулакской свиты впервые появляется пыльца рода *Tsuga* (*Tsuga crispa* sp. nov.). Содержание пыльцы *Taxodium* колеблется в пределах от 5 до 8% в верхних горизонтах и достигает 15% в нижних горизонтах свиты. В нижних же горизонтах содержится пыльца *Ephedra* (до 2%) и отмечаются единичные находки *Dacrydium* sp. (?) [возможно, *D. elatumiformis* sp. nov. (pollen)]. Вообще содержание пыльцы сем. *Podocarpaceae* значительно снижается по сравнению со спектрами морских отложений.

Таким образом, состав пыльцы голосеменных кутанбулакской свиты представлен значительно более умеренным комплексом, чем в спектрах из морского палеогена. Выпадение ряда видов *Podocarpus*, *Cedrus* и сем. *Araucariaceae*, появление пыльцы *Tsuga* и значительное участие *Taxodium* и *Pinus* секции *Cembrae* совпадает с обогащением спектров пыльцой широколиственных листопадных растений и сережкоцветных, в особенности рода *Alnus*. Это свидетельствует о распространении широколиственных лесов по пониженным обитаниям, а также говорит о наличии озерно-болотных водоемов с зарослями болотного кипариса и большим количеством прибрежноводных и погруженных растений.

На повышенных местах распространялись хвойные и смешанные широколиственные леса, сохранившие большое число субтропических видов, о чем свидетельствует большое участие различных видов пыльцы *Cedrus*, *Sequoia* и многих видов рода *Pinus*.

Однако регрессирующее море освобождало большие пространства суши, которые заселялись травянистыми и кустарничковыми комплексами с лебедовыми, *Zygophyllaceae* и *Ephedra*. Эти полупустынные ассоциации литоралей палеогеновой суши, возможно, и были местом, где возникали предки тех обширных полупустынных ценозов, которые представляют основной фон ландшафта современного Северного Приаралья.

Спектры чиликтинской свиты в общем менее богаты пылью голосеменных, но видовое содержание пыльцы рода *Pinus* в них остается почти таким же разнообразным. Здесь впервые появляется пыльца, весьма близкая к *Pinus silvestris* L., а также впервые отмечена находка *P. strobiformis* sp. nov. (pollen) и много пыльцы *P. singularis* sp. nov. (pollen); продолжается в единичных экземплярах встречаться *P. minutus* sp. nov., которая впервые появилась в спектрах кутанбулакской свиты. В то же время пыльца рода *Cedrus* представлена гораздо слабее. Окончательно выпадают виды *Cedrus longisaccata*, *C. Janschinii*, *C. piniformis*, *C. pusilla* и др., которые доминировали в спектрах морского олигоцена и еще единично встречались в кутанбулакских. Сем. *Podocarpaceae* представлено двумя видами рода *Podocarpus*. Исчезла пыльца *Podocarpus kazakhstanica*, *P. gigantea* и *Dacrydium*. Из спектров также выпали виды *Araucariaceae*, *Gnetales* (*Gnetumites*) и *Ginkgo*. Пыльца *Taxodium* aff. *distichum* L. (Rich.) встречается во всех спектрах в пределах 12%, вместе с *Tsuga*, *Picea* и *Taxus* (возможно, *Taxus baccataeformis* — вид пыльцы, не встречающийся в спектрах более низких горизонтов).

Судя по присутствию пыльцы *Ephedra*, которая спорадически появляется в различных горизонтах чиликтинской свиты, по-видимому, вне зависимости от широкого распространения лесов по долинам рек (по пониженным защищенным местообитаниям, в районах с повышенным рельефом), на побережьях солоноватоводных бассейнов и озер и на междуречных плоских пространствах имели широкое распространение открытые ассоциации. Об этом также говорит большое участие пыльцы травянистых и кустарничковых видов различных ксерофитов, многие виды которых отмечены в составе спорово-пыльцевых спектров.

К сожалению, наши исследования не простираются выше чиликтинской свиты, так как пробы, отобранные из верхних свит континентального олигоцена и из аральских слоев, оказались непыльценосными.

#### ПАВЛОДАРСКОЕ ПРИИРТЫШЬЕ

Спектры морских и континентальных отложений в Павлодарском Прииртышье в общем значительно беднее пылью голосеменных, чем одновозрастные спектры в Северном Приаралье, причем пыльца распределяется от свиты к свите неравномерно (табл. II). Наиболее богаты пылью голосеменных спектры континентальных отложений, где общее количество ее доходит до 75—80%. В спектрах морских отложений содержание пыльцы голосеменных колеблется обычно в пределах от 10 до 60%, в чеганских спектрах не поднимается выше 30% и в спектрах опоковой свиты и в мел-палеоценовых отложениях, залегающих под глауконитовой свитой, — не выше 60%.

Грубая схема, намечающаяся в результате анализа изменения процентного содержания общей суммы голосеменных по вертикали, детализируется при анализе их состава. Для нижних горизонтов палеогена (мел-



Таблица 2

Распределение пыльцы голосеменных в морских и континентальных отложениях кайнозоя в Павлодарском Прииртышье

Голосеменные	Свиты по К. В. Нинифоровой									
	подглау- конитовая	опоконная	чеган- ская	первая	вторая	четвер- тая	аральская	павлодар- ская	Q	современ- ные отло- жения
Суммарно, % *	25—40	18—60	10—28	38—80	18—50	65	+	10	18	25
Преобладает, %	25	18—30	15—20	<60	30—50	65	+	10	10	20
Сусадасеае и Сусадаситес	<5	—	1—10	+до 10	+	—	—	—	—	—
<i>Zamites</i> sp.	—	—	+	—	—	—	—	—	—	—
<i>Encephalarites cycadioides</i> sp. nov. (pollen)	+	—	+	—	+	—	—	—	—	—
Гинкгоасеае и Гинкгоаситес	—	—	+до 16	+до 3	—	+	—	—	—	—
<i>Ginkgo bilobaeformis</i> sp. nov. (pollen)	+	—	+	—	+	—	—	—	—	—
Тахаситес	—	+	+	+	—	—	+	—	—	—
Тахасеае	—	+	<5—10	+до 5	—	—	—	—	—	—
<i>Taxus baccataeformis</i> sp. nov. (pollen)	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>T. cuspidataeformis</i> sp. nov. (pollen)	<5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Torreya californiformis</i> sp. nov. (pollen)	—	+до 14	0—10	0—5	—	—	—	—	—	—
Подоскарпасеае и Подоскарпитес	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Podocarpites kasakhstanica</i> sp. nov. (pollen)	+(?)	0—5	0—5	—	—	—	—	—	—	—
<i>P. gigantea</i> sp. nov. (pollen)	—	—	0 до +	—	—	+	—	—	—	—
<i>Podocarpus sellowiformis</i> sp. nov. (pollen)	+	—	—	0—2	—	—	—	—	—	—
<i>P. andiniiformis</i> sp. nov. (pollen)	+	—	0—14	0—5	—	—	—	—	—	—
<i>P. nageiaformis</i> sp. nov. (pollen)	—	1—5	+	+до 5	—	—	—	—	—	—
<i>P. aff. dacrydioides</i> A. R i c h.	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—
<i>Dacrydium elatumiformis</i> sp. nov. (pollen)	2—25	0—3	—	—	+(?)	—	—	—	—	—

Таблица 2 (продолжение)

Голосеменные	Свиты по К. В. Никифоровой									
	подглау- конитовая	опоковая	чеган- ская	первая	вторая	четвер- тая	аральская	павлодар- ская	Q	современ- ные отло- жения
Araucariaceae и Araucarites										
<i>Araucaria elegans</i> sp. nov. (pollen) . . . .	—	+	+ до 5	—	—	—	—	—	—	—
<i>Agathis ovataeformis</i> sp. nov. (pollen) . . .	—	+ до 10	0—5	—	+(?)	—	—	—	—	—
Pinaceae										
<i>Abies sibiriciformis</i> sp. nov. (pollen) . . .	—	—	—	+ до 7	0—10	+	—	—	—	—
<i>A. protofirma</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	0—10	—	—	—	—	—	—	—
<i>Keteleeria davidianaeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	0—5	+ до 5	+ до 18	+ до 5	—	—	—	—
<i>Picea</i> sp. . . . .	+	+	+	+	+	+	+	—	+	—
<i>P. tasarianica</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+ до 10	+ до 15	0—5	+ до 2	—	—	—	—	—	—
<i>P. schrenkianaeformis</i> sp. nov. (pollen) . .	—	—	—	+ до 5	—	+ до 8	—	—	—	—
<i>P. alata</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	—	+	+	+	—	—	—	—
Род <i>Cedrus</i> (суммарно) . . . . .	5—28	+ до 12	+ до 8	0—5	0—3	—	+	+(?)	—	—
<i>Cedrus</i> aff. <i>deodara</i> Loud. . . . .	+	+	—	—	+	—	—	—	—	—
<i>C. laxireticulata</i> Zauer (pollen) . . . . .	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>C. piniformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	+	0—8	—	+	—	—	—	—	—
<i>C. Janshinii</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	+5	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>C. pusilla</i> Zauer (pollen) . . . . .	5—25	+ до 5	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>C. parvisaccata</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	—	+	+(?)	—	—	—	—	—	—
<i>C. aff. libani</i> Loud. . . . .	+(?)	5	—	+	—	—	—	—	—	—
<i>C. longisaccata</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	5	—	—	—	—	—	—	—	—
Род <i>Pinus</i> (суммарно) . . . . .	0—18	5—28	10—60	50—80	35—55	40	+	25	<10	<10
<i>Pinus</i> секции <i>Gembrae</i> и <i>P. cembraeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+ до 18	<5—20	<5—22	10—18	+ до 10	+3	+	—	12	—
<i>P. aff. koraiensis</i> Sieb. et Zucc. . . . .	—	—	+	0—5	+	+	+	+	—	—

Таблица 2 (продолжение)

Голосеменные	Свиты по К. В. Никифоровой									
	подглау- конитовая	опоконная	чеган- ская	первая	вторая	четвер- тая	аральская	павлодар- ская	Q	современ- ные отло- жения
<i>P. sibiriciformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	—	+	+	+	—	—	—	—
<i>P. protocembra</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+ до 18	+ до 8	0—5	—	+ до 5	—	—	—	—	—
<i>P.</i> секции <i>Strobys</i> и <i>P. strobiformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	0—5	0—5	0—50	+ до 8	—	—	+	<5	<1	—
<i>P. peuceformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	—	0—8	2—15	+ до 5	0—5	—	—	—	—
<i>P. exelsaeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	+ до 5	2—5	+ до 20	+ до 15	—	—	—	—
<i>P.</i> секции <i>Paracembrae</i> . . . . .	+	—	—	1—5	—	—	—	—	—	—
<i>P. gerardiformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>P. longifoliaformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	+5	+5	+ до 10	—	—	—	—	—
<i>P.</i> секции <i>Pseudostrobis</i> . . . . .	<5	+ до 10	5—10	—	—	—	—	—	—	—
<i>P. ponderosaeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	0—10	+ до 5	—	—	—	—	—	—	—
<i>P. bicornis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>P. minutus</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	<10	<5	+(?)	+(?)	—	—	—	—
<i>P.</i> секции <i>Taeda</i> . . . . .	—	+	0—10	—	—	—	—	—	—	—
<i>P. taedaeformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—
<i>P.</i> секции <i>Austroales</i> и <i>P. singularis</i> sp. nov. (pollen) секции <i>Banksia</i> . . . . .	—	—	+ до 10	—	+10	—	—	—	—	—
<i>P. banksianaformis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	—	+ до 18	+ до 2	—	—	—	—	—	—
<i>P. protosilvestris</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	0—12	2—12	—	—	—	+	—	—
<i>P. aff. silvestris</i> L. . . . .	—	—	—	+	—	—	+	+	+	+
<i>P. silvestris</i> L. . . . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Tsuga aff. canadensis</i> (L.) Carr. . . . .	—	—	—	+	<5	—	—	—	—	—
<i>T. crispa</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	+(?)	<5	+	—	+(?)	+	—	—
<i>T. torulosa</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	—	—	+	+5	+	+	—	—	—	—

Таблица 2 (окончание)

Голосеменные	Свиты по К. В. Никифоровой									
	подглау- конитовая	опоконная	чеган- ская	первая	вторая	четвер- тая	аральская	павлодар- ская	Q	современ- ные отло- жения
<b>Taxodiaceae</b>										
<i>Sciadopitys tuberculata</i> sp. nov. (pollen) . .	—	—	+	+(?)	—	+	—	—	—	—
<i>Sequoia semperviriformis</i> sp. nov. (pollen) .	+	—	4—18	2—7	—	—	—	—	—	—
<i>Taxodiumites</i> sp. (pollen) . . . . .	0—3	0—<5	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Taxodium</i> aff. <i>distichum</i> L. (Rich.) . . . .	—	—	4—44	5—30	+ до 5	<5	—	5—8	—	—
<i>Cunninghamia</i> aff. <i>lanceolata</i> Lamb. . . .	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—
<b>Cupressaceae и Cupressacites</b>										
<i>Thujaites</i> sp. (pollen) . . . . .	—	—	+	+	—	—	—	—	—	—
<i>Cupressites</i> sp. (pollen) . . . . .	+	+	+	+	+	—	—	—	—	—
<i>Chamaecyparites</i> sp. . . . .	+	+	+	+	+	+	—	—	—	—
<i>Welwitschiacites</i> . . . . .	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Welwitschiacites protomirabilis</i> sp. nov. (pollen) . . . . .	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<b>Ephedraceae (суммарно)</b> . . . . .	+	—	<10	+	+	+	25	26	22	<30
<i>Ephedra eocenipites</i> Wodh. . . . .	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>E.</i> aff. <i>Przewalskii</i> Staph. . . . .	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—
<i>E.</i> aff. <i>distachya</i> L. . . . .	—	—	—	—	+	+	—	—	—	—
<i>E.</i> aff. <i>intermedia</i> Schr. . . . .	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+
<i>Ephedrites trinata</i> sp. nov. (pollen) . . .	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—
<b>Gnetaceae</b>										
<i>Gnetumites</i> sp. (pollen) . . . . .	—	—	+	+ до 5	—	—	—	—	—	—

\* Содержание пыльцы голосеменных дано в процентах по отношению к общей сумме сосчитанных зерен пыльцы и спор. Содержание каждого вида дано в процентах по отношению к сумме голосеменных.

1 Sp. nov. pollen)  
2 (pollen).

Фиг. 6. Схема распространения пыльца голосеменных в кайнозойских отложениях Павлодарского Прииртышья

палеогеновые спектры) Павлодарского Прииртышья характерно наибольшее содержание пыльцы таких семейств и родов голосеменных растений, которые в спектрах олигоцена уже играют подчиненную роль или совершенно исчезают (фиг. 6).

Наиболее разнообразно представлена в прииртышских спектрах пыльца сем. Pinaceae, в частности род *Pinus*, различные виды которого по вертикали распространяются неодинаково. В мел-палеогеновых спектрах общее содержание пыльцы рода *Pinus* не превышает 20% от общего числа зерен голосеменных. Род в основном представлен небольшим количеством видов секций *Strobus* *Schaw.* и *Cembrae* *Sprach.*; последняя представлена одним видом *Pinus protocembra* sp. nov. Другие секции присутствуют спорадически, составляя не более 1—3%. Отсутствует секция *Eupitys*.

Более обильно представлен род *Cedrus*, содержание представителей которого достигает 28%. В основном род представлен двумя видами: *Cedrus pusilla* *Zaueg* и *C. parvisaccata* *Zaueg* с незначительной примесью *C. laxireticulata* *Zaueg*, *C. longisaccata* sp. nov. (pollen). Род *Picea* представлен одним определяемым видом, не имеющим аналогов среди пыльцы современных видов этого рода, — *Picea tasanica* sp. nov. (pollen) и небольшим количеством пыльцы *Picea* sp.

Роды *Tsuga*, *Abies* и *Keteleeria* отсутствуют. Значительное количество пыльцы сем. Cupressaceae (50%) и Podocarpaceae (30%), которое в основном представлено пыльцой *Dacrydium* sp., *Podocarpus* (3 sp.), *Phyllocladus*? (вид не описан). Единично встречаются пылинки *Ephedra* (*Ephedra eocenipites* *Wod.*).

Таким образом, спектры мел-палеогеновых отложений по своему составу значительно отличаются от всех более молодых спектров подавляющим большинством форм, имеющих своих предков еще в меловых комплексах. Если сравнить эти спектры с чеганскими, то разница будет весьма заметная; со спектрами же из опоковой свиты, несмотря на большое различие в составе, они имеют и объединяющие их черты.

В спектрах из опоковой свиты также присутствует в сравнительно небольших количествах пыльца рода *Pinus*, представленного в основном секциями *Strobus* и *Cembrae*, но здесь впервые появляются единичные виды, принадлежащие к секции *Eupitys* (?), полностью отсутствующей в мел-палеогеновых спектрах.

Пыльцы *Cedrus* несколько меньше, чем в спектрах мел-палеогеновых, но в видовом отношении род представлен богаче. Здесь прибавляются единичные находки *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen). Большинство видов рода *Cedrus* не имеют аналогов среди современных. Наибольшее число видов и общее количество пыльцы приурочено к нижним горизонтам свиты. В верхних горизонтах находки пыльцы *Cedrus* единичны, что совпадает с находкой пыльцы, подобной *Welwitschia*, с *Welwitschites* sp. Род *Picea*, так же как в мел-палеогеновых спектрах, представлен только видом *Picea tasanica* sp. nov. (pollen). *Tsuga* по-прежнему отсутствует. В средних горизонтах опоковой свиты обнаружены единичные зерна, принадлежащие сем. *Taxodiaceae* (по-видимому, *Sequoia*). Для нижних горизонтов опоковой свиты характерно также большое количество (до 50%) пыльцы сем. Cupressaceae и Podocarpaceae (до 15%), среди которой встречены общие с приаральскими тасаранскими виды: *Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen), *P. nageiaformis* sp. nov. (pollen), *Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen), сем. *Araucariaceae* [*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen)], *Agathis ovataformis* sp. nov. (pollen).

Спектры опоковой свиты по составу пыльцы голосеменных хорошо сопоставляются со спектрами тасаранской и отчасти саксаульской свит Северного Приаралья. Находки же в верхних горизонтах опоковой свиты

пыльцы, подобной роду *Welwitschia*, указывает на существование режима влажности, способствовавшего развитию безлесных пространств, что позволяет синхронизировать время отложения верхних горизонтов опоковой толщи со временем формирования саксаульской свиты. Спектры саксаульской свиты, если вспомнить общее описание флористических комплексов, содержат большое число различных видов пыльцы пустынных растений и кустарничковых узколистных ксерофитов из сем. *Myrtaceae* и др., о чем подробно написано автором в специальной работе (Заклинская, 1953<sub>3</sub>).

Спектры чеганских отложений значительно отличаются от спектров двух предыдущих свит по целому ряду признаков; при этом различия эти выражены ярче, чем между эоценовыми и олигоценовыми спектрами в Северном Приаралье.

Род *Pinus* развивается в чеганское время различно от горизонта к горизонту и содержание его неодинаково по вертикали, что позволяет выделять нижние, средние и верхние горизонты в этой свите. В самых нижних горизонтах (глины с сидеритом) процентное содержание пыльцы рода *Pinus* колеблется от 5 до 60%, с преобладанием спектров, в которых *Pinus* составляет не менее 50%. В средних горизонтах (глины слоистые, со стволами деревьев, растительными остатками и фауной чегана) род *Pinus* составляет 20—25%, а в верхних горизонтах не больше 40%.

Род *Pinus* обогащается появлением представителей новых видов — *Pinus* aff. *koraiensis*, *P. exelsaeformis* sp. nov. (pollen), *P. strobiformis* sp. nov. (pollen), *P. longifoliaformis* sp. nov. (pollen), *P. protosilvestris* sp. nov. (pollen), *Pinus* секции *Banksia* М а у г. и др. Одновременно в чеганских спектрах появляется пыльца родов *Abies* [*Abies protofirma* sp. nov. (pollen)]; *Keteleeria*; участие же рода *Cedrus* значительно слабее, чем в спектрах чеганской свиты в Приаралье, но все же оно обычно около 10%.

Самым характерным для чеганских спектров Прииртышья, так же как и для синхронных отложений Северного Приаралья, является появление и широкое (ярче выраженное, чем в Приаралье) развитие пыльцы *Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.), что, в сочетании со значительной примесью пыльцы широколиственных листопадных растений в составе пыльцы покрытосеменных, указывает на увлажнение климата и некоторое похолодание его по сравнению с жарким климатом эоцена. Одновременно с появлением пыльцы *Taxodium* в спектрах значительно увеличивается количество пыльцы *Ginkgo* (до 18%).

Следует отметить, что чеганские спектры Прииртышья в общем близки по составу одновозрастным спектрам Приаралья, но характеризуют флору более умеренную, в которой сказывается влияние азиатских центров с так называемой «флорой гинкго» А. Н. Криптофовича. Спектры же приаральские несут в себе больше представителей древней средиземноморской флоры в ее ксерофильной вариации.

Спектры лагунно-континентальной первой свиты и континентальных, второй и четвертой, в общем близкие по составу компонентов, имеют свои характерные черты, позволяющие отличать их один от другого. Спектры самых нижних горизонтов первой свиты континентальных отложений, представленных озерной или лагунной фацией серии песков и слоистых глин с ярозитом и массой растительных остатков в виде трухи и остатков веточек и стволов, характеризуются самым большим содержанием пыльцы голосеменных — до 60—80% (от общего числа подсчитанных зерен спор и пыльцы), которая почти целиком представлена различными секциями рода *Pinus*: *Strobis* (*P. exelsaeformis* sp. nov., *P. peuceformis* sp. nov., *P. strobiformis* sp. nov.), *Pseudostrobis*, *Taeda*, *Australes* (*P. singularis* sp. nov.), *Sula*, *Banksia*. Особенно широко распространена секция *Cembrae*, которая в основном представлена *Pinus cembraeformis* и *P. aff. koraiensis* S i e b.

et Z u c c. Впервые появляются *Pinus protosilvestris* sp. nov. (pollen) и *P. minutus* sp. nov. (pollen).

В спектрах первой свиты пыльца *Tsuga* представлена тремя видами; впервые появляется *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen), а также *Picea alata* sp. nov. (pollen) и *Abies sibiriciformis* sp. nov. Пыльца же *Taxodium* aff. *distichum* составляет не более 30%, т. е. значительно менее, чем в чеганских спектрах. Здесь же встречается пыльца *Sciadopitys*, *Taxus baccataeformis* sp. n. (pollen) и единично — *Podocarpus*, *Agathis*, *Gnetum* и *Cuscadaceae*.

В общем спектры нижних горизонтов первой континентальной свиты имеют совершенно иной облик, чем чеганские спектры, обогащаясь большим числом новых видов. Верхние горизонты первой свиты содержат большое количество пыльцы *Taxodium* (до 25—30%) и значительно меньше пыльцы различных представителей рода *Pinus*. Выпадают роды *Taxus*, *Sciadopitys*, *Gnetum* и встречавшиеся спорадически в нижних горизонтах свиты представители рода *Podocarpus*, кроме одного вида. Исчезает *Picea tasaranica* sp. nov. (pollen) и не встречается пыльца *Tsuga* и *Cedrus*.

Таким образом, анализ состава пыльцы голосеменных позволил выделить горизонты первой свиты, что не удавалось сделать ни литологическим методом, ни при помощи стандартного спорово-пыльцевого анализа без флористического разбора представленных родов и видов.

Для второй свиты континентальных отложений характерно уже небольшое содержание пыльцы *Taxodium* (менее 10%) и значительное количество пыльцы рода *Pinus*, а также некоторое увеличение содержания *Cedrus*, среди представителей которого снова появляется вид *Cedrus piniformis* sp. nov. (pollen). Одновременно с этим выпадает из спектра пыльца *Pinus* aff. *silvestris*.

Спектры второй свиты континентальных отложений вообще характеризуются широким развитием древесной растительности, в основном представленной широколиственными и хвойно-широколиственными лесами. Но в то же время в спектрах первой и второй свит появляется пыльца *Ephedra* (для спектров второй свиты характерно появление *E. aff. Przewalski St a p h.*), которой сопутствует значительное увеличение пыльцы травянистых растений в комплексе покрытосеменных.

Спектры четвертой свиты континентальных отложений значительно беднее спектров первых двух свит. Характеризуют эти спектры прогрессирующее осушение климата, что отразилось на повышении содержания пыльцы *Ephedra* (преобладает *E. aff. intermedia S c h r.*), почти полном исчезновении пыльцы *Taxodium* и на понижении содержания пыльцы *Cedrus*.

По единичным анализам миоценовых отложений, в которых находки пыльцы голосеменных значительно скуднее, чем в спектрах четвертой свиты, можно полагать, что древесная растительность, сильно разреженная и бедная видами, была в основном представлена лиственными деревьями. Голосеменные в миоценовых спектрах представлены единичными зернами *Pinus* секции *Strobus*, *P. cf. sibirica*, *Pinus* секции *Eupitys*, *Taxodium*, *Picea*, *Cupressaceae* и *Tsuga*.

В миоцено-плиоценовых отложениях состав пыльцы голосеменных окончательно беднеет и общее содержание их в спектрах не превышает 5—10%. Представлены голосеменные родом *Pinus* (единично секция *Strobus* и *Pinus* aff. *silvestris* L. — до 40%). Пыльца *Tsuga*, *Taxodium*, *Picea*, *Taxus* и *Cupressaceae* встречается спорадически в виде единичных зерен. Пыльца *Ephedra* временами выпадает из спектров за счет появления пыльцы луговых трав; временами содержание ее поднимается до 25%. Возможно, что в миоцен-плиоцене на территории Прииртышья развивались не только полупустынные, но и степные или саванного типа ландшафты,



за что говорит и фауна млекопитающих. Растительность Прииртышья в плиоцене по-видимому представляла тип мелкорослых саванн с редко разбросанными кустарниково-лесными массивчиками.

В спектрах нижнечетвертичных отложений пыльца голосеменных составляет не более 20% от общего числа зерён. Попадаются единично представители *Pinus* aff. *strobis*, *P.* aff. *cembra*, *P.* aff. *silvestris*, *Ephedra*. В более высоких горизонтах четвертичных отложений, так же как и в поверхностных (современных) пробах, встречаются только *Pinus* aff. *silvestris* и *Ephedra*.

## V. РУКОВОДЯЩИЕ СПОРОВО-ПЫЛЬЦЕВЫЕ СПЕКТРЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ ДЛЯ СТРАТИГРАФИЧЕСКОГО РАСЧЛЕНЕНИЯ КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ

Если все изложенные выше данные по Северному Приаралью и Северному Прииртышью представить в виде схемы или стратиграфических таблиц и проследить встречаемость отдельных родов и видов голосеменных от самых нижних свит до современных осадков, то наглядно выявится определенная закономерность в их распространении.

Флора и растительность каждой из охарактеризованных свит имеют свой особый облик. Различие в составе и количестве пыльцы голосеменных позволяет выделить для Северного Приаралья следующие группы спектров.

I. Для группы Podocarpaceae, самой древней, характерно большое процентное содержание представителей гондванской (?) флоры (возможно, реликтового происхождения) с Araucariaceae, *Podocarpus*, *Dacrydium*, Cycadaceae в сочетании с голосеменными древнего Средиземноморья. В спектрах этой группы присутствуют единично виды: *Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpus andiniiformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen), *Agathis ovataeformis* sp. nov. (pollen), *Araucaria elegans* sp. nov. (pollen) — единично, *Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen), *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen), *Cedrus pusilla* Z a u e r (pollen), *Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen), *Cedrus laxireticulata* Z a u e r (pollen) — единично, *Picea tataranica* sp. nov. (pollen) и некоторое количество Cycadaceae, *Cycadacites*, *Welwitschicites*, а также *Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen), *Pinus* секции *Banksia*, *Torreya californiformis* sp. nov. (pollen), *Taxacites* и др.<sup>1</sup>. Одновременно в спектрах намечается значительное участие различных видов сосны.

Эта большая группа спектров охватывает все нижние палеогеновые отложения Северного Приаралья, т. е. тасаранскую и саксаульскую свиты, которые на основании фаунистических находок датируются средним и верхним эоценом (Яншин, 1953). Спектры эти близки к спектрам опоковой толщи Павлодарского Прииртышья, подстилающей чеганские отложения нижнего олигоцена.

Группа спектров Podocarpaceae хорошо подразделяется на две подгруппы: нижнюю (тасаранскую) и верхнюю (саксаульскую).

Тасаранские спектры голосеменных значительно беднее саксаульских в видовом отношении и представлены всего 29 видами (в основном —

<sup>1</sup> Все перечисленные виды в большинстве своем — новые, получившие название по морфологическим признакам пыльцы.

древняя флора). В саксаульских спектрах большее участие принимают различные виды сем. Pinaceae и отмечаются первые находки *Sequoia*, *Pinus exelsaeformis*, *P. peuceformis*, *Picea* секции *Omorica* [*Picea alata* sp. nov. (pollen)].

II. Группа *Taxodium* — *Pinus* объединяет спектры чеганской свиты и двух свит континентальных отложений Северного Приаралья. В спектрах этой группы выпадает значительное количество видов<sup>1</sup> из предыдущих подгрупп, а именно: *Dacrydium elatumiformis*, *Podocarpus sellowiformis*, *Cedrus laxireticulata*, *Picea tasaranica*, *Pinus bicornis*, *Pinus ponderosaeformis* и др. Взамен появляются новые виды, роды и семейства — значительно более умеренного облика. Именно по появлению нового комплекса голосеменных вторая группа легко разбивается на две подгруппы: нижнюю (чеганскую): *Cedrus* — *Taxodium* и верхнюю (две нижние свиты солончатых водных и континентальных отложений): *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*.

Подгруппа спектров *Cedrus* — *Taxodium* приобретает девять новых видов: *Cedrus* aff. *libani* L a w s., *C.* aff. *atlantica* L o u d., *Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.) и др. — и представляет смешанную флору голосеменных, имеющих большую часть видов от группы Podocarpaceae, но в иных процентных соотношениях. Таким образом, подгруппа *Cedrus* — *Taxodium* менее резко отличается от группы более древней — Podocarpaceae, чем подгруппа *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*. Различие между ними выражено слабее, чем между аналогичными группами и подгруппами в Северном Прииртышье.

Спектры верхней подгруппы приобретают семь новых видов голосеменных и в то же время из состава их выпадают многие виды, встречавшиеся в спектрах предыдущей подгруппы. Здесь, кроме тех видов, которые встречаются во всех трех нижних подгруппах, появляются (или увеличивается их содержание): *Podocarpites kazakhstanica*, *Taxus baccataeformis*, *Pinus* aff. *koraiensis*, *Tsuga crispa*, *Cedrus* aff. *deodara*. К тому же спектры верхней подгруппы отличаются исключительным богатством видов рода *Pinus*.

В верхней подгруппе спектров выделяются два типа: спектры первой свиты — кутанбулакские и спектры второй свиты — чиликтинские, отличаясь один от другого по содержанию пыльцы рода *Pinus*. Кроме того, чиликтинские спектры отличаются от спектров кутанбулакских отсутствием или малым содержанием пыльцы *Cedrus* aff. *libanii*, *C.* aff. *atlantica*, *C.* aff. *deodara* и *Abies sibiriciformis*. Общее содержание пыльцы рода *Pinus* в чиликтинской свите значительно меньше, чем в спектрах кутанбулакской свиты. Вообще кутанбулакские спектры содержат пыльцу рода *Pinus* в большем количестве, чем во всех других свитах.

Для Павлодарского Прииртышья схема построена значительно полнее. Здесь выделяются не две, а три группы спектров, из которых две нижние, более древние, могут сопоставляться с группами, выделенными для Северного Приаралья.

I. Группа Podocarpaceae — *Cedrus* — наиболее древняя; в ней среди голосеменных преобладают семейства Podocarpaceae, Cupressaceae, Araucariaceae и Pinaceae, представленные различными видами родов *Dacrydium*, *Cedrus*, *Podocarpus* и не имеющие аналогов среди современных видов этого рода, а также родом *Pinus*, представленным в основном видом *Pinus protosembra* sp. nov. (pollen). В этих же спектрах встречается пыльца *Gnetum* (*Gnetumites*) и *Welwitschia* (*Welwitschites*) и *Phyllocladus*, пыльца которого не вошла в описание.

Группа спектров Podocarpaceae — *Cedrus* включает две подгруппы: подгруппу *Dacrydium* и подгруппу *Podocarpus*.

<sup>1</sup> В отдельных горизонтах эти виды могут встречаться как единичные находки, но это явление случайное.

Подгруппа *Dacrydium* наиболее бедна видами голосеменных; представляется она всего 24 видами, принадлежащими к сем. Podocarpaceae, Cycadaceae, Welwitschiaceae, Ephedraceae и Pinaceae, из которых наибольший процент падает на представителей рода *Cedrus* и *Dacrydium*. Эта подгруппа охватывает всю серию отложений, залегающих под глауконитовой толщей и отнесенных предположительно к мелу — палеоцену.

Подгруппа *Podocarpus* представлена 23 видами голосеменных, которые в основном принадлежат сем. Pinaceae, Cupressaceae и Podocarpaceae. Здесь впервые обнаружена пыльца *Welwitschiacites*, *Araucaria elegans* sp. nov. (pollen), *Cedrus piniiformis* sp. nov. (pollen) и др., присутствует *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen), *Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen), *C. pusilla* Z a u e r (pollen). *Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen), *Podocarpi-tes kazakhstanica* sp. nov. (pollen). Единично встречается пыльца *Dacrydi-um*, *Agathis*, Cycadaceae (*Zamites*?). Одновременно присутствует пыльца *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen), *Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen). *P. bicornis* sp. nov. (pollen). *P. protocembrae* sp. nov. (pollen) в общем составляет не более 25% от общего числа пыльцы голосеменных.

Подгруппа *Podocarpus* близка по составу к группе *Podocarpus* Северного Приаралья, отличаясь от нее лишь несколько более высоким содержанием пыльцы родов *Cedrus* и *Podocarpus*. Подгруппа *Podocarpus* включает целиком все спектры опоковой свиты и хорошо сопоставляется со спектрами тасаранской и отчасти саксаульской свит в Северном Приаралье.

II. Группа *Taxodium* — Pinaceae аналогична группе *Taxodium* — *Pinus* Северного Приаралья, отличаясь от последней несколько большим участием представителей умеренных флор с *Taxodium* (до 40%) и *Tsuga* (до 10%), а также присутствием ряда видов рода *Pinus*, принадлежащих к американским и азиатским флорам: *Pinus* aff. *koraiensis*, *P. aff. sibirica* и *Abies* aff. *sibirica* [*Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen)]. Группа эта наиболее богата видами голосеменных, общее количество которых составляет от 22% (спектры чиликтинской свиты) до 36% (спектры чеганской свиты). В спектрах группы *Taxodium* — Pinaceae выпадают представители таких древних флор, как *Welwitschia*, *Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen), *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen), *C. laxireticulata* Z a u e r (pollen), *Picea tataranica* sp. nov. (pollen), но в то же время многие из представителей этих флор еще присутствуют.

Группа *Taxodium* — Pinaceae подразделяется на две подгруппы: *Taxodium* и *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*.

Подгруппа *Taxodium* целиком охватывает чеганскую свиту и сопоставляется со спектрами подгруппы *Cedrus* — *Taxodium* Северного Приаралья, отличаясь от нее большей мезофильностью, что в первую очередь сказывается на большем количестве пыльцы *Taxodium*, которой особенно много в верхних горизонтах чеганской свиты, непосредственно подстилающих отложения первой свиты континентальных отложений.

Подгруппа *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga* включает спектры нижних и верхних горизонтов первой свиты, а также спектры второй свиты. Спектры солончатоводных или дельтовых отложений первой свиты содержат большое количество пыльцы рода *Pinus*, много пыльцы *Cedrus*, *Tsuga*, *Taxodium*. В нижних слоях этой свиты содержится до 40% пыльцы *Taxodium* aff. *distichum* (L.) R i c h. Различаются спектры нижних и верхних слоев первой свиты следующими признаками: нижние слои содержат максимум Pinaceae и не включают пыльцу Podocarpaceae, Cycadaceae и *Gnetum*; верхние слои содержат мало (до 5%) Pinaceae, но в них снова появляется пыльца Podocarpaceae (*Podocarpus* aff. *dacridioides*), Cycadaceae, *Gnetum* (?) (*Gnetumites*). В остальном спектры чрезвычайно близки.

Спектры второй свиты содержат пыльцу *Taxodium* до 20%, в них несколько возрастает процентное содержание пыльцы *Cedrus* и появляется

*Tsuga aff. canadensis* (L.) С а г г. В видовом отношении эти спектры значительно беднее, чем спектры первой свиты.

III. Группа *Ephedra* включает спектры с сильно обедненным видовым составом пыльцы голосеменных. Содержат они максимум 12 видов, в число

Павлодарское Прииртышье Северное Приаралье

Спектры голосем.			Свиты по К.В. Никифоровой	Спектры голосем.			Свиты по А.А. Яншину и Я.Н. Формазовой
Группы	Подгруппы	Типы		Группы	Подгруппы	Типы	
<i>Ephedra</i>	<i>Pinus-Ephedra</i>	Современные и позднечетвертичные	Современные отложения и позднечетвертичные				
		Четвертичные	Палевая толща Голубая толща (казарская)				
		Плиоценные и нечетвертичные	Нижнечетвертичные отложения и павлодарская свита				
	<i>Pinaceae</i>	Миоценовые	Аральская свита				
		Олигоцен-миоценовые	Четвертая свита				
<i>Taxodium-Pinaceae</i>	<i>Pinus-Taxodium-Tsuga</i>	Олигоценные	Третья свита (флорой охарактеризована слабо)	<i>Taxodium-Pinus</i>	<i>Pinus-Taxodium-Tsuga</i>	Олигоценные	Чиликтинская Кутанбулакская
			Вторая свита				
			Первая свита (верх)				
			(низ)				
	<i>Taxodium</i>	Чеганская свита	Верх	<i>Taxodium-Cedrus-Taxodium</i>			Чеганская
			Середина				
			Низ				
<i>Podocarpaceae-Cedrus</i>	<i>Podocarpus</i>	Эоценовые	Опоковая глауконитовая (флорой охарактеризована слабо)	<i>Podocarpaceae</i>	Саксаульская Тасаранская	Эоценовые	Саксаульская Тасаранская
		Мел-палеогеновые	Подглауконитовая				
	<i>Platanus</i>						

Фиг. 7. Сопоставление групп, подгрупп и типов спектров голосеменных кайнозойских отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья. (Составила Е. Д. Заклинская).

которых входят 11 видов, сохранившихся от первой группы. Значительное участие в составе спектров принимает пыльца сосен из секции *Euritys*: *Pinus aff. silvestris*, *P. protosilvestris* sp. nov. (pollen). Встречается пыльца *P. aff. koraiensis* Sieb. et Zucc., *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen), *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen). Из сем. *Podocarpaceae* сохранился лишь один вид *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen). Пыльца рода *Ced-*

*rus* обычно отсутствует. Единично встречается пыльца *Tsuga* и *Taxodium*, но непременным членом является пыльца *Ephedra* (до 26%).

Эта группа спектров свидетельствует о значительном осушении климата, понижении температур и, в соответствии с этим, о значительном разреживании древесной растительности. Все данные указывают на то, что в период формирования III группы спектров преобладала растительность открытых местообитаний.

Группа *Ephedra* включает спектры четвертой свиты континентальных отложений<sup>1</sup> миоценовые, миоцен-плиоценовые и четвертичные спектры, которые, в свою очередь, весьма близки к современным, отличаясь от них лишь тем, что в современных спектрах род *Pinus* представлен только одним видом — *Pinus silvestris* L., а в спектрах миоцен-плиоценовых и нижнечетвертичных наблюдаются единичные находки *Pinus* aff. *strobis*, *P. cembrae*, *P. aff. koraiensis*.

Спектры группы *Ephedra* отличаются небольшим содержанием пыльцы голосеменных (порядка 10—25—30%). В миоцен-плиоценовых отложениях спектры представлены единичными зернами *Tsuga*, Cupressaceae, *Taxus*, *Taxodium*, Сусадасеае и *Ephedra* (до 25%), а в нижнечетвертичных отложениях — единичными находками *Pinus* aff. *koraiensis*, *P. aff. silvestris*, *P. aff. strobis*, *P. aff. cembrae*, *Picea*. В более высоких горизонтах четвертичных отложений выпадают представители секции *Strobis* и совершенно не встречается пыльца *Tsuga* и *Taxodium*. В основном в верхних горизонтах четвертичных отложений пыльца голосеменных представлена лишь *Pinus* aff. *silvestris* и родом *Ephedra*. Это же наблюдается и в спектрах из современных отложений, где, кроме пыльцы *Ephedra*, голосеменных обычно нет, за исключением спорово-пыльцевых спектров из поверхностных проб в районе Борового или близ Долбинских гор, где количество пыльцы *Pinus* aff. *silvestris* равно или выше, чем *Ephedra*, так как сосна здесь селится на гранитах палеозоя, образуя среди голой степи островные боры.

Группа спектров *Ephedra*, таким образом, подразделяется на следующие подгруппы: Pinaceae, включающую два типа спектров — олигоцен-миоценовый (IV свита континентальных отложений) и миоценовый (аральская свита), и *Pinus* — *Ephedra*, включающую три типа спектров: миоцен-плиоценовый и нижнечетвертичный (павлодарская свита и нижнечетвертичные отложения); верхнечетвертичные; современные.

Сопоставление групп, подгрупп и типов спектров голосеменных дано на фиг. 7.

<sup>1</sup> Отложения третьей свиты не охарактеризованы пылью, так как исследованные образцы не содержали пыли и спор.

## VI. ФЛОРИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СПЕКТРОВ И ИХ СТРАТИГРАФИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Как видно из материала, изложенного в предыдущих главах палеогеографические условия, в которых формировались осадочные отложения Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья, имея много общих черт, в то же время в целом ряде деталей были различными, в особенности в начале третичного периода. Поэтому, несмотря на то, что оба исследуемых района находились в близких широтных условиях, видовой состав их спорово-пыльцевых спектров имеет различия.

В самом деле, если подсчитать общее количество видов голосеменных, представленных в спектрах Приаралья и Прииртышья, и сравнить спектры их синхронно формировавшихся свит, то получаются следующие соотношения<sup>1</sup>:

а) тасаранская, саксаульская и опоковая свиты представлены всего 71 видами голосеменных (от 23 до 36 видов в каждой из свит в отдельности), из которых у тасаранских с опоковыми спектрами 10 общих видов, у саксаульских с опоковыми — 10 общих видов;

б) чеганская свита Приаралья и Прииртышья представлена также 59 видами голосеменных, из которых 12 видов общих;

в) ащеайрыкская и первая свиты Прииртышья и кутанбулакская (первая) свита Приаралья представлены 51 видом, из которых 12 видов общих;

г) вторая свита континентальных отложений в Прииртышье и чиликтинская (вторая) свита в Приаралье представлены всего 43 видами голосеменных, из которых 16 видов общих.

Если обратиться к ареалам современных родов и видов голосеменных, к которым принадлежит пыльца ископаемых видов или с которыми она имеет близкое сходство, то можно действительно прийти к выводу, что исходные флоры этих двух районов имели различные центры. Для Северного Приаралья, по-видимому, такой исходной флорой была древняя средиземноморская субтропическая, тропическая и умеренная флора, для Западной же Сибири и Прииртышского Казахстана — азиатская умеренная.

В то же время присутствие общих видов и родов в спорово-пыльцевых спектрах всех синхронно формировавшихся свит подтверждает положение Е. В. Вульфа и других о том, что третичный период ознаменовался становлением новой смешанной флоры на огромных пространствах суши северного полушария. Для территории северных пределов Средней Азии и прилегающего к ней Казахстана эта флора развивалась на базе древне-

<sup>1</sup> Следует оговориться, что количество видов пыльцы голосеменных взято приблизительно, в соответствии с числом видов, определенных при анализах. Вполне допустимо, что количество видов в отложениях аналогичных свит может несколько измениться при дальнейшем накоплении материала.

средиземноморского комплекса с большей или меньшей примесью умеренного азиатского, по-видимому, восточноазиатского, и умеренного же китайского элемента.

Кроме того, сходство и различие флористических элементов зависело и от различного географического положения участков палеогеновой суши и различного же рельефа и литологического состава субстрата, на котором формировались те или иные растительные элементы ландшафта.

Мугоджары и юго-западные берега Киргизской суши, непосредственно связанные со Средней Азией, были местом, где развивалась древняя тропическая средиземноморская флора, долгое время сохранявшая ксерофитный облик. На северо-восточных берегах Киргизского материка, ближе связанных с юго-восточной Азией, развивалась более умеренная флора — азиатско-американского типа. Древняя суша Киргизского материка была местом смешения этих флор, а в дальнейшем — местом формирования новой умеренной флоры своеобразного ксерофильного облика.

Существовавшая еще с нижних отделов палеогена, а возможно, и значительно ранее, вертикальная зональность в распространении растительности отразилась на составе спорово-пыльцевых спектров, полученных из третичных морских и континентальных отложений.

Спектры нижнего палеогена содержат и пыльцу вечнозеленых растений нижнего пояса горных склонов, и пыльцу растений с опадающей листвой из более высоких обитаний, и пыльцу растений пояса хвойных лесов.

Нижнепалеогеновая флора Средиземноморья и Казахского материка, видимо, включала некоторое количество реликтов от древней тропической, возможно гондванской, флоры с *Phyllocladus*, *Araucaria*, *Gnetum*, *Casuarinaceae*, *Welwitschia*, современные ареалы которых связаны в большинстве случаев с Южной Америкой, Африкой и Австралией (фиг. 8).

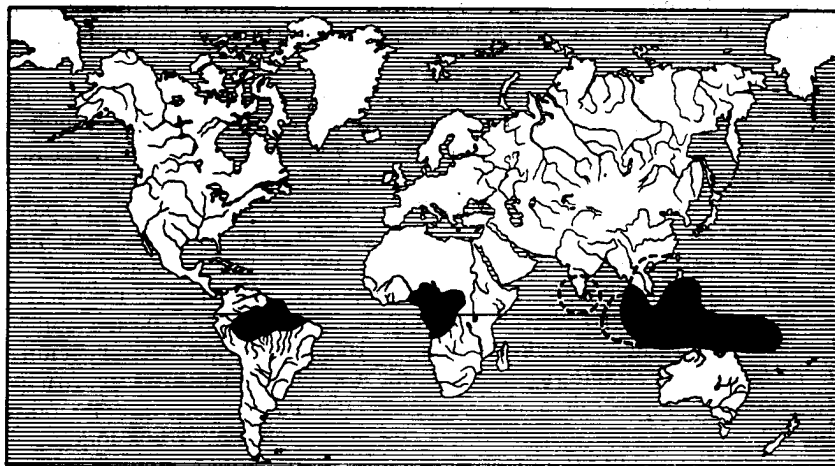
В начале палеогена климат Павлодарского Прииртышья, а в особенности Северного Приаралья, по-видимому, был жарким и влажным, о чем свидетельствует участие в спектрах большого количества пыльцы рода *Cedrus* (видов, не имеющих аналогов среди современной флоры), *Podocarpus* и ряда видов спор древовидных папоротников.

В эоцене, возможно во вторую половину его, изменение физико-географических условий повлекло за собой осушение климата, возможно региональное, что сказалось на составе растительности участков суши, примыкающих к приаральскому и прииртышскому морям. Особенно сказалось это осушение климата на территории юга Мугоджар и, возможно, западных берегов Киргизской суши в период отложения тасаранской и нижних горизонтов саксаульской свит. Об этом говорят обилие пыльцы и макроскопических остатков ксерофитов с жестко-кожистой листвой, находки большого количества пыльцы растений из сем. *Myrtaceae*, *Proteaceae*, *Euphorbiaceae* и даже *Cactaceae*, находки пыльцы *Welwitschia*, *Ephedra* и др.

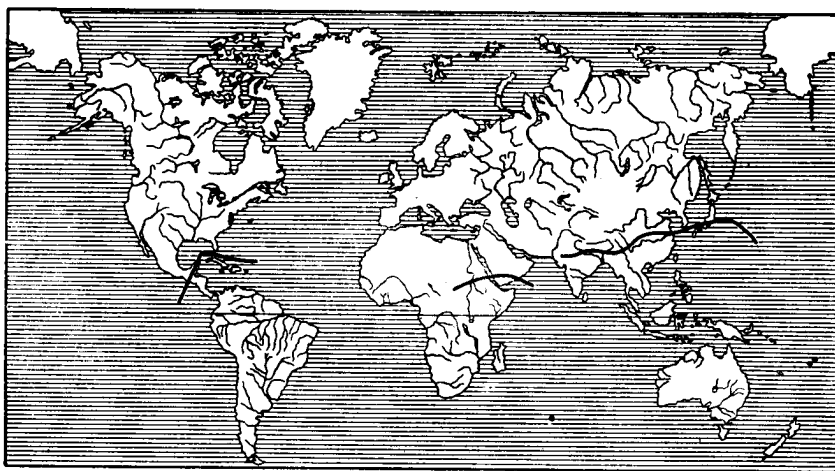
В период отложения нижних и средних горизонтов саксаульской свиты в Приаралье, а также песчаников опоковой свиты в Павлодарском Прииртышье на территории прилитеральных зон Киргизского материка имелись пустынные ассоциации с *Zygophyllaceae*, *Chenopodiaceae*, *Umbelliferae* и др.

Среди голосеменных в это время были широко развиты различные виды родов *Pinus*, *Dacrydium*, *Podocarpus* и сем. *Araucariaceae*. Отмечены единичные находки *Ephedra* таких видов, которые не имеют аналогов среди современных видов (*Ephedra eocenipytes* W o d h. и др.). Возможно, что некоторые виды рода *Ephedra*, произраставшие на окраинах эоценового Киргизского материка, имели предков за пределами распространения древней средиземноморской флоры, так же как и род *Welwitschia*. Но этот вопрос

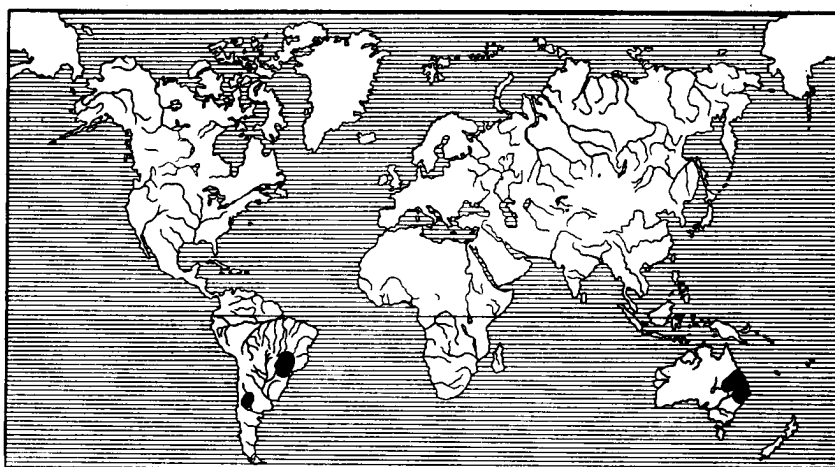




1



2



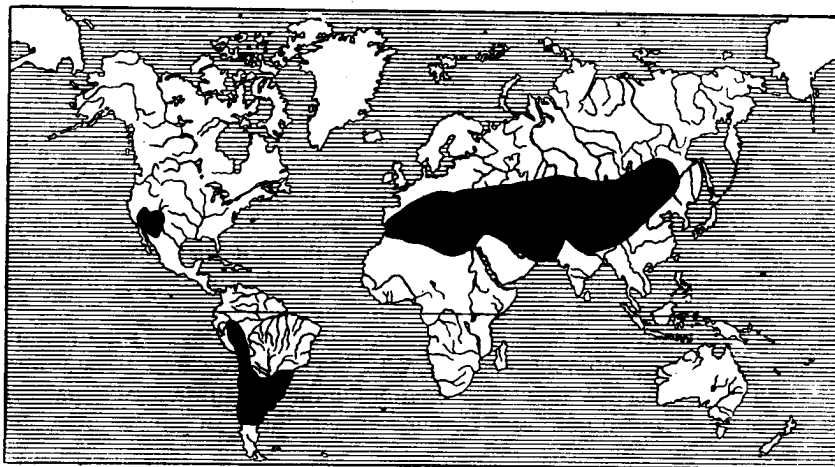
3

Фиг. 8. Ареалы современных видов рода *Gnetum* L., *Araucaria* Juss.,  
*Podocarpus* L. Herit.

1 — *Gnetum* L.; 2 — *Podocarpus* L. Herit.; 3 — *Araucaria*

не входит в компетенцию автора и остается открытым. Исследования М. М. Ильина, П. П. Овчинникова и других ученых приводят к мысли, что флора *Ephedra* Казахстана, может быть, является дериватом древней средиземноморской флоры. Ареал современного распространения рода *Ephedra* разорван и имеет центры и в Средиземном море и в Азии, а также в Южной и Северной Америке (фиг. 9).

Заметное увлажнение и некоторое похолодание климата в нижнем и среднем олигоцене (в начале его) совершенно изменили облик растительного покрова суши, а последующие тектонические движения, изменившие размеры и конфигурацию материков, послужили причиной того, что изме-



Фиг. 9. Ареал современных видов рода *Ephedra* L.

нились и флористический состав растительного покрова за счет мигрантов из северо-восточных районов, а также состав растительности за счет развития аутохтонных и аллохтонных умеренных элементов.

На Киргизском материке и на юго-западных участках Мугоджар начинают развиваться смешанно-широколиственные леса, в Мугоджарах, по-видимому, с преобладанием средиземноморских вечнозеленых и жестколистных элементов, на Киргизском материке — с преобладанием азиатских листопадных умеренных.

Спектры чеганских отложений Северного Приаралья — более ксерофитные, чем спектры Павлодарского Прииртышья. Леса с болотным кипарисом впервые появились на Киргизской суше, в северо-восточных ее районах. Последнее хорошо увязывается с флорой сравнительно умеренных смешанно-широколиственных лесов с *Taxodium* из олигоценовых отложений кулундинских степей Западной Сибири.

Развитие смешанно-широколиственных лесов с большим или меньшим участием болотного кипариса одновременно наблюдается и в Крымско-Кавказской области также с начала олигодена. Последние данные по Азово-Кубанской впадине несколько изменяют деталь нарисованной автором в 1953 г. схемы продвижения сравнительно умеренной флоры с *Taxodium* с востока и более раннее появление пыльцы *Taxodium* в спектрах азиатских.

Более детальное исследование массового материала по северному Предкавказью, а также новый материал по западному Предкавказью показали, что в ряде регионов появление большого количества пыльцы *Taxodium* приурочено не только к среднеолигоценовым, но и к нижнеолигоценовым отложениям, т. е. к хадумскому горизонту, который синхронизируется

с отложениями чеганских глин. Правда, принадлежность этой пыльцы именно к виду *Taxodium aff. distichum* еще не доказана, но находки пыльцы этого рода обычно связываются с эпохой развития широколиственных лесов, а спектры хадумских отложений, в которых обнаружено большое количество пыльцы *Taxodium*, содержат значительное количество пыльцы древесных пород, возможно, широколиственных.

Чеганское время в Приаралье и Прииртышье знаменуется притоком различных хвойных, в настоящее время приуроченных в основном к атлантическим берегам Северной Америки [сосны из секций *Strobus*, *Taeda Australes*, *Banksia*, а также *Taxodium Rich.* (фиг. 10).]

В конце среднего и в верхнем олигоцене обнажаются большие пространства суши в связи с интенсивными поднятиями в области Мугоджар и окраин Казахского нагорья. В Северном Приаралье и в Павлодарском Прииртышье это время примерно совпадает с почти полным выпадением из спектров пыльцы *Taxodium distichum*. Этот период знаменуется широким распространением различных видов сосен и других родов сем. *Pinaceae* (роды *Picea*, *Keteleeria*, *Abies*, *Tsuga*), основное число видов которых в настоящее время приурочено к атлантическому побережью Северной Америки и Западной Европы, Средиземноморью и юго-востоку Азии (фиг. 11 и 12). При этом основная масса родов и видов, близких к ныне обитающим на востоке Азии, отмечена в спектрах Павлодарского Прииртышья. В спектрах Северного Приаралья их значительно меньше.

Спектры, содержащие наибольшее число видов сосен и характеризующиеся абсолютным преобладанием пыльцы рода *Pinus* над всеми видами других хвойных, обычно связаны с появлением и широким развитием широколиственной листопадной флоры со значительным участием сережкоцветных.

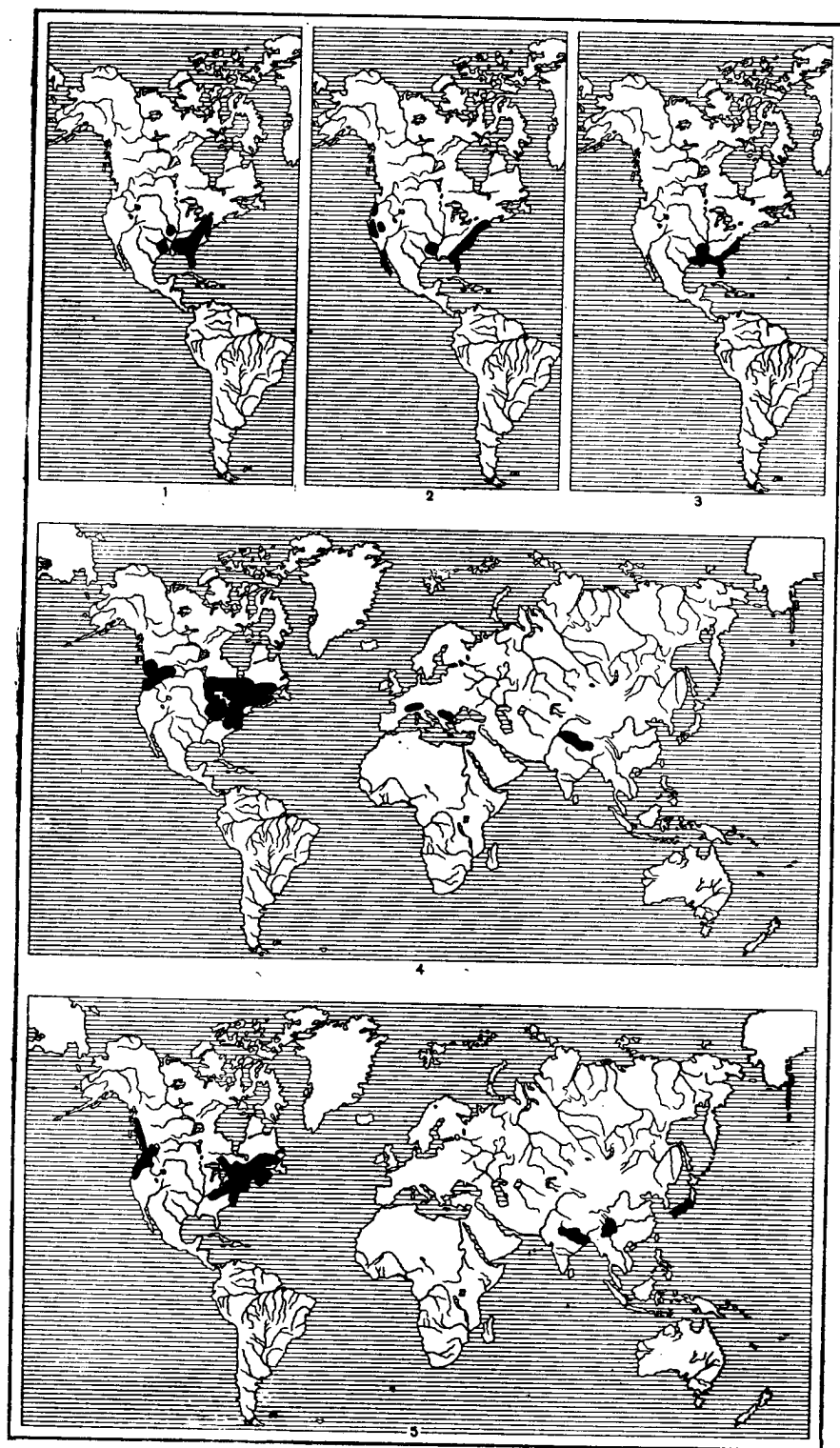
Волна распространения широколиственной умеренной листопадной флоры, в основномдвигающаяся из азиатских центров (Китай?), охватила все пространство обширного Киргизского материка и Западной Сибири, от оз. Зайсан до оз. Чаны, и на запад — до Мугоджар. Но это широкое распространение широколиственной флоры нельзя рассматривать как сплошное покрытие, как это предполагали большинство исследователей на основании листовых отпечатков. Распространены были широколиственные породы на большой территории, но распространение это было не сплошным, а приуроченным к соответствующим высотным отметкам и к обитаниям с достаточно богатыми влажной почвами.

Одновременно с развитием широколиственных лесов распространены были обильно произраставшие хвойные: на песчаных террасах рек, на кристаллических массивах нагорья, на высоких берегах мелеющего моря располагались самые разнообразные сообщества сосновых и смешанных хвойных лесов с различными видами елей, кедров, сосен, *Tsuga* и тиссов.

На литоральных моря и солончаковых почвах обильно развивались полупустынные и пустынные ассоциации с массой травянистых ксерофитов, которые проникали внутрь страны. В это время в северных и южных районах Казахстана, по-видимому, уже начали закладываться элементы саванного типа, в Приаралье же укоренялись полупустынные сообщества.

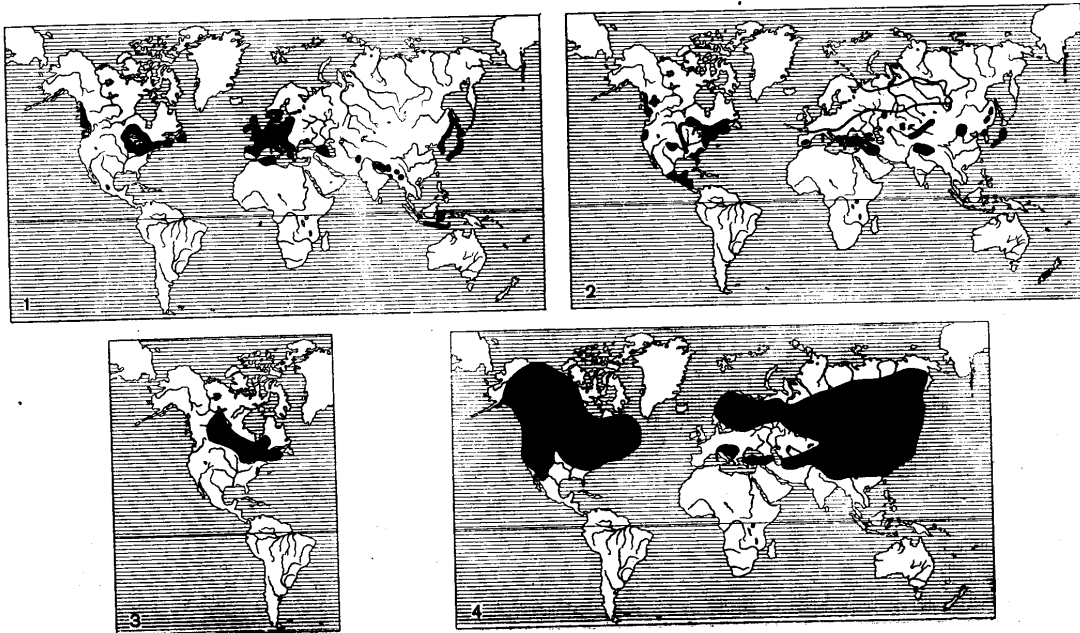
В самых верхних горизонтах чеганской свиты и в нижних горизонтах первой свиты континентальных отложений Павлодарского Прииртышья, а также в нижних горизонтах кутанбулакской свиты Северного Приаралья спектры изобилуют пыльцой хвойных значительно более умеренного типа, чем в морских отложениях.

В верхних горизонтах среднего олигодена и в верхнем олигоцене некоторое осушение климата и постепенное похолодание его сказываются в почти полном исчезновении пыльцы *Taxodium* и в постоянном участии пыльцы *Ephedra*.



Фиг. 10. Ареалы современных видов *Pinus* секции *Australes* Loud.; *Pinus* секции *Taeda* Spach., *Pinus* секции *Strobus* Shaw. и родов *Taxodium* Rich. и *Tsuga* Carr.

1— *Pinus palustris* Mill.; 2— *Pinus* секции *Taeda* Spach., 3— *Taxodium* Rich.,  
4 — *Pinus* секции *Strobus* Shaw.; 5 — *Tsuga* Carr.



Фиг. 11. Современное распространение рода *Taxus* L., сем. Cupressaceae, *Pinus* секции *Banksia* М а у г., и рода *Picea* Dietr.

1—*Taxus* L.; 2—Cupressaceae; 3 — *Pinus* секции *Banksia* М а у г.; 4— *Picea* Dietr.

Приток хвойных, приуроченных в настоящее время к восточным окраинам Азиатского материка, именно в это время особенно интенсивен. В составе спектров хвойно-широколиственных лесов умеренного типа особенно ярко выражено участие видов, подобных восточносибирским и азиатско-китайским: например *Picea alata* sp. nov. (pollen), подобная *Picea jezoensis* C a r t t., *Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen), *Abies protofirma* sp. nov. (pollen), *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen) и др. Во всех спектрах второй свиты континентальных отложений Павлодарского Прииртышья широко распространена сосна типа *Pinus silvestris*. В спектрах синхронной ей чиликтинской свиты Северного Приаралья участие азиатского элемента выражено значительно слабее.

К концу олигоцена в районе Прииртышья начинается значительное обеднение лесными формациями, которое становится еще заметнее в миоцене и уже к миоцен-плиоцену приводит к почти полной смене лесных ландшафтов открытыми сухостепными. Аналогичное явление наблюдается и в Приаралье, где миоценовая фауна указывает на значительное участие степных и полупустынных элементов в общем комплексе млекопитающих и птиц.

Можно представить себе, что волна наступающих с севера и северо-востока широколиственных листопадных представителей лесной флоры «тургайского типа» (в понимании А. Н. Криштофовича), двинувшаяся на окончательно освободившиеся от моря участки суши и отразившаяся в резком повышении процентного содержания пыльцы широколиственных пород в спектрах, значительно ослабла.

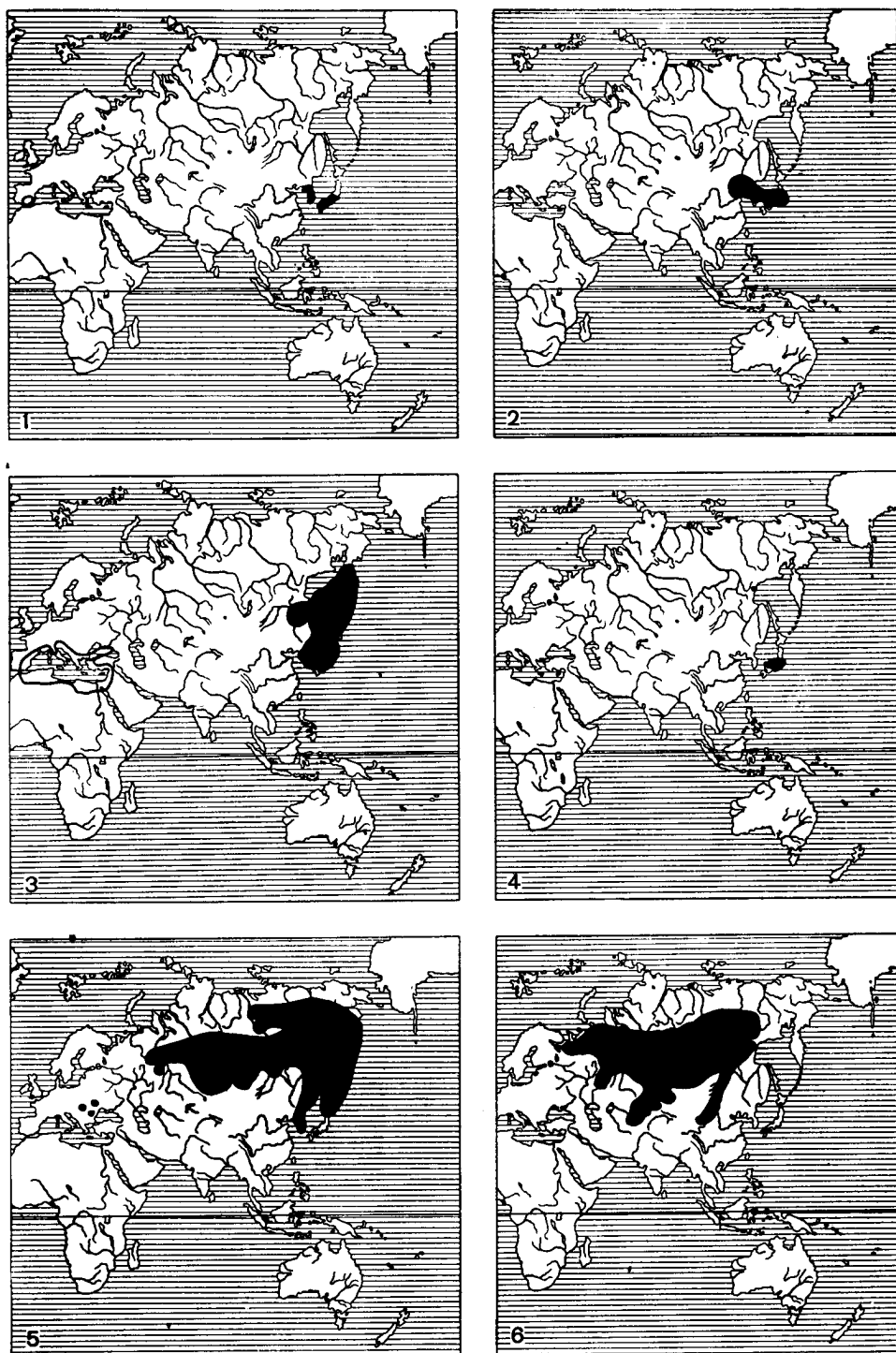
Произошло это, по-видимому, под влиянием общей аридизации и повышения континентальности климата и в связи с этим — распространения средне- и южноазиатских ксерофитов. Лесная растительность, распространившаяся было на обширных территориях не смогла больше развиваться и отступила к западу, оставив в горных районах суши своих хвойных представителей. Отступала она, видимо, в направлении Тургайского пролива, на территории которого, по данным Е. П. Бойцовой<sup>1</sup>, И. М. Покровской, Р. Я. Абузаровой и других исследователей, еще в миоцене существовали большие массивы смешанно-широколиственных лесов с участием болотного кипариса. Широколиственные леса локального распространения существовали в Приаралье в миоценовую эпоху.

В спектрах Павлодарского Прииртышья находки пыльцы *Ephedra* cf. *distachya* L. и *Ephedra* aff. *intermedia* S c h r. становятся все более обычным явлением. Встречается вид *Ephedra* cf. *Przewalskii* S t a p f., находки которой еще раз подтверждают тесную связь прииртышской флоры с пустынными областями Азии.

Время формирования осадков солоноватоводной аральской свиты в Приаралье и широко распространенных гипсоносных глин озерного происхождения в Прииртышье связано уже с ярко выраженным осушением климата и общим обеднением лесной растительности, которая, очевидно, в виде островов сохранялась вблизи озерных водоемов. Фауна этих отложений свидетельствует не только о наличии лесных массивов (бобры, медведи), но и о широком распространении открытых ассоциаций, где обитали пищухи, тушканчики, наземные черепахи и др.

Спорово-пыльцевые спектры олигоцена бедны видами голосеменных. Основная масса их уже перестала существовать на территории Приаралья

<sup>1</sup> По последним данным К. В. Никифоровой и А. Л. Яншина, отложения, относимые Е. П. Бойцовой к нижнему миоцену, являются верхнеолигоценовыми, соответствующими по возрасту четвертой свите континентальных отложений в Павлодарском Прииртышье. К сожалению, к моменту составления сводки по голосеменным автору не удалось еще подтвердить это положение данными спорово-пыльцевого анализа.



Фиг. 12. Современное распространение *Pinus* секции *Cembrae*, *Sciadopitys*, *Picea jezoensis*, *Abies sibirica*, *Abies firma* и рода *Keteleeria*.

1 — *Abies firma* Sieb. et Zucc.; 2 — *Keteleeria* Carr.; 3 — *Picea jezoensis* Carr.; 4 — *Sciadopitys* Sieb. et Zucc.; 5 — *Pinus* секции *Cembrae* Spach., 6 — *Abies sibirica* Ledeb.

и Казахстана. Голосеменные представлены всего пятью-шестью видами, встречающимися в спектрах спорадически.

Постепенное обеднение спектров пылью древесных пород и одновременное обогащение их различными видами травянистых и кустарниковых ксерофитов подводит нас к почти абсолютно «безлесным» спектрам миоцен-плиоцена. Здесь во время отложения павлодарской свиты и песков с обильной гиппарионовой фауной голосеменные играли незначительную роль. Находки пыльцы голосеменных в миоцен-плиоценовых спектрах содержат единичные зерна *Picea*, *Pinus*, *Tsuga*, *Taxus*, *Ephedra*. Это совпадает с почти полным исчезновением пыльцы широколиственных и вообще всяких древесных пород. Флора *Ephedra* развивается параллельно с широким распространением травянистых ксерофитов различных семейств, родов и видов [Chenopodiaceae — 5 sp., Compositae — 3 sp., Plumbaginaceae, Gramineae, Umbelliferae (*Ferula* sp. (?)) и др.].

Однако следует отметить, что, несмотря на то, что резко усилившаяся континентальность климата и значительная аридизация вели к полному исчезновению лесных формаций еще в раннечетвертичное время, — условия влажности и уровень грунтовых вод по долинам рек способствовали развитию галерейных лесов или рощ.

В верхнечетвертичных отложениях мы уже находим лишь единичные зерна пыльцы *Pinus silvestris* и большое количество *Ephedra*.

Итак, флористический анализ пыльцы голосеменных, являющийся частью флористического анализа спорово-пыльцевых спектров вообще, дает возможность выделить руководящие спорово-пыльцевые спектры для целей дробного стратиграфического расчленения морских и континентальных отложений и сопоставить отложения как смежных, так и удаленных районов.

Проследивая флористические комплексы голосеменных в спектрах из последовательно изученных опорных разрезов третичных и более молодых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья, можно подойти к обоснованию дробного стратиграфического расчленения осадочных отложений, чего не позволяет сделать стандартный анализ с простым подсчетом встреченных форм и сопоставлением процентного содержания их. Так, наиболее трудная для расчленения толща солоноватоводных и континентальных отложений Приаралья, Прииртышья и прилегающих к ним Тургая и Западной Сибири обычно делится на свиты на основании литологических особенностей, флористических находок и стандартных пыльцевых анализов, в результате чего возникают разногласия о количестве этих свит как в Тургае, так и в Прииртышье. Р. Я. Абузарова и В. В. Лавров от двучленного деления континентальных отложений Тургая перешли к четырехчленному. Е. П. Бойцова и И. М. Покровская для этого же района предлагают трехчленное деление континентальной толщи.

В Прииртышье при предварительных исследованиях К. В. Никифоровой выделено четыре свиты континентальных отложений. Проведение границы между первой свитой и верхними горизонтами чеганских отложений сильно затруднено в связи с исключительной фациальной изменчивостью последних и значительным однообразием спорово-пыльцевых спектров этих отложений. В настоящее время К. В. Никифорова пришла к выводу, что отложения, залегающие непосредственно на верхних горизонтах чеганских глин с морской фауной и представленные обычно песками с маломощными прослойками глин и с обилием растительных остатков (как правило, в виде растительной трухи), следует относить к первой свите континентальных отложений. Это вполне совпадает с данными спорово-пыльцевого анализа. Большинство спектров из горизонтов песков и озерно-старичных глин с растительной трухой относятся к подгруппе *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*, к которой принадлежат спектры континен-



тальных отложений среднего олигоцена. Все спектры континентальных свит в большей или меньшей степени богаты пылью широколиственных пород и сережкоцветных, а также содержат значительное количество пылцы хвойных. При помощи анализа пылцы голосеменных выделяются руководящие группы и подгруппы спектров, которые выдерживаются в стратиграфической последовательности и в Павлодарском Прииртышье и в Северном Приаралье.

Так, выясняется, что первая свита в Павлодарском Прииртышье (с растительными остатками и раковинами *Cyrena*), представленная мелко-слоистыми глинами, переслаивающимися с песком, и слоистыми глинами с ярозитом и массой растительной трухи, расчленяется на два горизонта. Нижние слои (горизонты) свиты содержат спектры с примесью некоторого количества ксерофитов и еще близки к спектрам верхних горизонтов чеганских глин (оз. Селеты-Тенгиз, обн. 2, скв. 4, пос. Подпуск). В них содержится еще сравнительно небольшое количество пылцы голосеменных. Спектры более верхних горизонтов свиты (Аган-Сай, лог Кара-Кудук и др.) содержат спектры, аналогичные спектрам кутанбулакской свиты в Северном Приаралье с обилием голосеменных. Естественным выводом отсюда будет, что нижние горизонты первой свиты являются как бы переходными от морского к континентальному олигоцену. Основная масса отложений первой свиты отлагалась уже одновременно со слоями кутанбулакской свиты Северного Приаралья и содержит оолитовые железные руды (оз. Кара-Су, обн. 13, 14, 15). Спектры, выделенные из глин и песков в этих пунктах, содержат пылцу *Tsuga crispa* sp. nov. (pollen), *T. torulosa* sp. nov. (pollen), *Pinus minutus* sp. nov. (pollen). В Тургае (если сравнивать с данными Р. Я. Абузяровой, которая строит стратиграфическое расчленение континентальной толщи, придерживаясь схемы В. В. Лаврова, в последнем ее варианте) отложениям первой свиты Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья соответствует «пристинотериевая» свита с примесью ксерофильной флоры в нижних слоях.

К сожалению, мною лично еще не проделаны спорово-пыльцевые анализы континентальных отложений Тургайской впадины и поэтому пока нет достаточных данных, чтобы сопоставить их со свитами Приаралья и Прииртышья на основании руководящих форм голосеменных. Однако наблюдения К. В. Никифоровой и предварительный просмотр спорово-пыльцевых спектров, а также сравнение данных спорово-пыльцевых анализов с выводами В. С. Корниловой (1955) о макроскопических остатках флоры говорят в пользу того, что вторая свита Павлодарского Прииртышья, чиликтинская свита в Приаралье и индикотериевая свита (включая болаттамские слои) Тургайской впадины отлагались одновременно (фиг. 13).

Четвертая свита континентальных отложений в Прииртышье, несмотря на то, что она по возрасту относится к верхнему олигоцену (К. В. Никифорова), по типу спектров принадлежит к верхней группе спектров *Ephedra*, к которой также относятся миоценовые и миоцен-плиоценовые, а также и четвертичные спектры. В этой группе выделяется нижняя подгруппа спектров *Pinaceae*, к которой относятся два типа спектров — олигоцен-миоценовый четвертой свиты и миоценовый — аральской. Группа спектров *Ephedra* выделена на основании того, что время формирования их характеризуется постепенным выпадением большинства видов и родов голосеменных, представленных в двух предыдущих группах. Начало обеднения спектров относится ко времени отложения четвертой свиты континентальных отложений.

Итак, судя по составу спорово-пыльцевых спектров морских и континентальных отложений и флористическому анализу состава пылцы голосеменных в этих спектрах, с учетом палеогеографических данных, выясняется следующее.

Павлодарское Прииртышье			Тургайская впадина				Северное Приаралье
Возраст		Свиты по схеме К. В. Никифоровой	Свиты по схеме Р. Я. Абузяровой	Свиты по схеме В. В. Лаврова	Свиты по схеме Е. П. Бойцовой и И. М. Покровской	Свиты по схемам А. Л. Яншина и Л. Н. Формозовой	
Четвертичные отложения	Q <sub>4</sub>						
	Q <sub>3</sub>	Палевая					
	Q <sub>2</sub>	Голубая					
	Q <sub>1</sub>						
Плиоцен	верхний нижний	Павлодарская					
Миоцен	верхний			Павлодарская	Краснобурые пески и глины		
	средний				Зеленые гипсоносные глины (аральская свита)		
	нижний	Аральская	Аральская	Аральская	Грубообломочные породы	Аральская	
Олигоцен	верхний	Четвертая	Тургайская (песчано-глинистая)	Тургайская	Лигниноносная, песчаная и песчано-глинистая свита	Чаграйская	
	средний	Третья	индрикотериевая Болат-тамская Индрикотериевые слои Пристикотериевые слои	индрикотериевая Болат-тамская Индрикотериевая	Бурые и краснобурые алевроиты	Жаксыккычская	
		Вторая				Чиликтинская	
		Первая			Глины карбонатные (аналог сарыинским слоям)	Кутанбулакская	
	нижний	Чеганская	Чеганская	Чеганская	Чеганская	Чеганская	
Эоцен	верхний	Опоковая	Свита кварцитовых песчаников			Саксаульская	
	средний	Глауконитовая				Тасаранская	
Мел-палеоген		Подглауконитовая					

Фиг. 13. Сопоставление свит морских и континентальных отложений Павлодарского Прииртышья, Тургайской впадины и Северного Приаралья

1. Голосеменные растения имели весьма существенное значение в палеогеновой растительности Киргизского материка, Мугоджар, а также близлежащих участков суши Средней Азии и восточных окраин Кавказа.

2. Для доэоценового времени характерно меньшее участие голосеменных в растительном покрове. Особенно сильного развития голосеменные достигают в верхнем эоцене и среднем олигоцене. В этот период в спектрах наблюдается особенное разнообразие пыльцы видов голосеменных. Наиболее широко в среднем олигоцене развиты представители рода *Pinus*. Начиная с верхнего олигоцена наблюдается резкий спад в распространении голосеменных, продолжающийся в миоцене и плиоцене. К концу плиоцена голосеменные, по-видимому, были представлены в основном только двумя родами: *Pinus* и *Ephedra*.

3. Среди голосеменных палеогена основное место занимали различные представители класса Coniferales; в подчинении были Cuscadaceae, Cinkgoaceae, Gnetaceae и др.

4. Состав голосеменных вообще и класса хвойных в частности был неодинаков в продолжение различных веков кайнозоя; изменение состава голосеменных происходило под влиянием изменения климата, рельефа и расширения площади материков.

5. В более древних отложениях палеогена флористический облик спектров голосеменных был своеобразен. В них сочетались представители древних тропических и субтропических флор фондваны (?) и древнего Средиземноморья при незначительном участии умеренного азиатского элемента.

6. В средне- и верхнеолигоценовое время, под влиянием расширения материков Азии и Европы, а затем исчезновения Тургайского пролива, осуществляется смещение флор, происходящих от древнего субтропического средиземноморья, с флорами умеренными, происходящими из восточных и китайских центров Азии. В результате формируется новая флора, значительно более умеренная и более богатая родами и видами хвойных из сем. Pinaceae, чем флора эоцена.

7. В связи с общим осушением климата и прогрессирующим увеличением континентальности его, в особенности в Приаралье, растительность открытых местообитаний вытесняет древесные ассоциации. Приток хвойных растений из азиатских центров на территорию Киргизии приостанавливается. Хвойные постепенно отступают к горным районам.

8. В миоцен-плиоцене древесная растительность, в том числе и хвойная, почти полностью исчезает на изучаемых территориях и одновременно приобретает большое значение флора *Ephedra*.

9. Проследив последовательные этапы развития голосеменных на территории Приаралья и Казахстана, начиная от нижних горизонтов палеогена и до наших дней, удастся выделить определенные этапы в ее развитии, которые отражаются на составе спектров, извлеченных из палеогеновых, неогеновых и четвертичных отложений последовательно. Эти спектры не только отражают историко-флористические этапы развития голосеменных, но имеют и коррелирующее значение. Выделены группы, подгруппы и типы спектров и некоторые руководящие формы для них (фиг. 14 и 15).

1. Для группы Podocarpaceae — *Cedrus* в Прииртышье характерны:

а) Спектры подглауконитовой свиты

*Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen) — около 20%,

*Podocarpus* (3 sp.):

*Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen),

*Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen),

*P. andiniiformis* sp. nov. (pollen);

*Cedrus* (5—6 sp.) — около 28%:

*Cedrus parvisaccata* Zauer (pollen),  
*C. longisaccata* Zauer (pollen),  
*C. laxireticulata* Zauer (pollen),  
*C. pusilla* Zauer (pollen),  
*C. aff. deodara* Loud.;  
*Picea tasaranica* sp. nov. (pollen),  
*Pinus gerardianaeformis* sp. nov. (pollen),  
*P. banksianaeformis* sp. nov. (pollen),  
*P. protocembra* sp. nov. (pollen), около 18%,  
*Welwitschiacites protomirabilis* sp. nov. (pollen),  
*Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen).

б) Спектры опоковой свиты

*Cedrus* (5 sp.) — около 12%:  
*Cedrus Janchinii* sp. nov. (pollen),  
*C. pusilla* Zauer (pollen), около 5%,  
*C. longisaccata* Zauer (pollen),  
*Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*P. bicornis* sp. nov. (pollen),  
*Picea tasaranica* sp. nov. (pollen),  
*Agathis ovataformis* sp. nov. (pollen),  
*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen);  
*Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen),  
*Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen),  
*Torreyaites* и *Torreya californiformis* sp. nov. (pollen) — около 14%,  
*Pinus* секции *Sembrae* — около 20%.  
В Северном Приаралье верхней части этой группы (т. е. спектрам, опоковой свиты) соответствует группа *Podocarpaceae*, для которой характерно присутствие пыльцы следующих видов:

а) Спектры тасаранской свиты

*Cedrus laxireticulata* Zauer (pollen), около 10%,  
*C. longisaccata* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Picea tasaranica* sp. nov. (pollen),  
*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen),  
*Pinus protocembra* sp. nov. (pollen), около 15%,  
*P. banksianaeformis* sp. nov. (pollen), около 20%,  
*Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen).

б) Спектры саксаульской свиты

*Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen),  
*Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen),  
*P. andiniiformis* sp. nov. (pollen),  
*Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen),  
*Agathis ovataeformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Cedrus laxireticulata* Zauer (pollen), около 10%,  
*C. piniformis* sp. nov. (pollen), около 12%,  
*C. longisaccata* sp. nov. (pollen),  
*C. Janchinii* sp. nov. (pollen), около 20%,  
*C. pusilla* Zauer (pollen),  
*Picea tasaranica* sp. nov. (pollen),  
*Torreya californiformis* sp. nov. (pollen) и *Torreyaites*, около 10%,

*Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen),  
*Pinus* секции *Strobus*, около 30%,  
*Pinus taedaiformis* sp. nov. (pollen), около 20%.

II. Для группы *Taxodium* — *Pinaceae* в Прииртышье и *Taxodium* — *Pinus* в Приарале характерно появление пыльцы рода *Taxodium* Rich., *Tsuga* С а г г., *Pinus peuceformis* sp. nov. (pollen), *P. minutus* sp. nov. (pollen) и др., а также особенное обилие видов рода *Pinus*, представленного различными секциями.

В Павлодарском Прииртышье подгруппа *Taxodium* этой группы, к которой относятся спектры чеганской свиты, в основном представлена следующими видами:

*Zamites* sp. nov. (pollen),  
*Encephalarites cycadioides* sp. nov. (pollen),  
*Ginkgo bilobaeformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Ginkgoites* sp. (pollen),  
*Abies protofirma* sp. nov. (pollen),  
*Taxodium* aff. *distichum* L. (Rich.), около 44%,  
*Pinus strobiformis* sp. nov. (pollen),  
*P. protosilvestris* sp. nov. (pollen), около 12%,  
*P.* секции *Banksia* М а у г., около 18%.

Подгруппа *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*, к которой относятся спектры первой и второй свит, в основном содержит:

#### а) С п е к т р ы п е р в о й с в и т ы

*Podocarpus* aff. *dacrydioides* A. Rich.  
 Максимум пыльцы рода *Pinus* (до 80%), в том числе:  
*Pinus peuceformis* sp. nov. (pollen), около 15%,  
*P. protosilvestris* sp. nov. (pollen), около 12%,  
*P. minutus* sp. nov. (pollen),  
*Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen),  
*P. alata* sp. nov. (pollen)  
*Keteleeria* gen.,  
*Tsuga crispa* sp. nov. (pollen),  
*Tsuga torulosa* sp. nov. (pollen),  
*Taxodium* aff. *distichum* L. (Rich.).

#### б) С п е к т р ы в т о р о й с в и т ы

*Pinus singularis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Tsuga* aff. *canadensis* (L.) С а г г.,  
*T. crispa* sp. nov. (pollen),  
*T. torulosa* sp. nov. (pollen),  
*Pinus exelsaeformis* sp. nov. (pollen), около 20%,  
*P. longifoliaformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Ephedra* aff. *Przevalskii* Staph.,  
*E.* aff. *distachya* L.

В Северном Приарале подгруппа *Cedrus* — *Taxodium*, соответствующая подгруппе *Taxodium* Прииртышья и включающая спектры чеганской свиты, в основном представлена следующими видами:

*Ginkgo* aff. *biloba* L. и *G. bilobaeformis* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen), около 10%,  
*Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen),  
*Cedrus* aff. *libani* L a w s.,  
*C.* aff. *atlantica* M a n e t t i,  
*C. pusilla* Z a u e r (pollen), около 12%.

Максимум пыльцы рода *Pinus* (около 60%), среди них:

*Pinus singularis* sp. nov. (pollen),  
*Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.), около 12%,  
*Gnetumites* sp. (pollen).

Подгруппа *Pinus* — *Taxodium* — *Tsuga*, к которой относятся спектры кутанбулакской и чиликтинской свит, в основном содержит:

#### а) Спектры кутанбулакской свиты

*Taxus baccataeformis* sp. nov. (pollen), 5—10%,  
*Pinus* aff. *koraiensis* Sieb. et Z u s s. (около 10%),  
*P. minutus* sp. nov. (pollen),  
*P.* секции *Eupitys*, около 30%,  
*P. singularis* sp. nov. (pollen),  
*Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.),  
*Tsuga crispa* sp. nov. (pollen),  
*Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen),  
*Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen).

#### б) Спектры чиликтинской свиты

*Pinus taedaeformis* sp. nov. (pollen),  
*P. singularis* sp. nov. (pollen), от 10 до 5%,  
*P.* секции *Eupitys*,  
*P. minutus* sp. nov. (pollen),  
*Ephedra* gen. (2 sp.),  
*Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.),  
*Taxus baccataeformis* sp. nov. (pollen), 5—10%.

III. Для группы *Ephedra*, выделенной только для Прииртышья, характерно прогрессирующее обеднение видового состава голосеменных, выпадение целых родов и семейств их и особенно интенсивное развитие *Pinus* aff. *silvestris*, а затем *P. silvestris* и рода *Ephedra*.

Основными руководящими видами для подгруппы *Pinaceae* этой группы, включающей спектры четвертой и аральской свит, являются:

*Ephedra* aff. *intermedia* S c h r.,  
*Picea alata* sp. nov. (pollen),  
*Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen),  
*Pinus* секции *Cembrae*,  
*P. aff. silvestris* L.,  
*P. aff. exelsa* W a l l.

Для подгруппы же *Pinus* — *Ephedra*, в которую включены спектры павлодарской свиты и всех свит четвертичных отложений, основными руководящими видами являются:

а) Для спектров павлодарской свиты и нижнечетвертичных отложений—  
*Ephedra* gen. (3 sp.), около 26%,  
*Pinus* aff. *koraiensis* Sieb. et Z u s s.,  
*P. aff. strobus* L.,  
*P. aff. silvestris* L.,  
*Tsuga* aff. *canadensis* (L.) C a r r.,  
*T. crispa* sp. nov. (pollen),  
*T. torulosa* sp. nov. (pollen), +<sup>1</sup>  
*Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.) +

б) Для спектров свит голубой, палевой и позднечетвертичных отложений —

<sup>1</sup> Знак + обозначает единичные находки.

*Picea* секции *Eurpicea*,  
*Pinus* aff. *cembra* L.,  
*P.* aff. *strobus* L.  
*P.* aff. *silvestris* L.,  
*Ephedra* (2 вр.), около 22%.

10. Коррелирующие группы спектров позволяют: выделить подглауконитовую толщу песков и глин в Прииртышье в самостоятельную, наиболее древнюю свиту — мел-палеоценовую; сопоставить опоковую свиту Прииртышья с саксаульской и отчасти с тасаранской свитами Приаралья; сопоставить верхние горизонты ащеайрыкской свиты О. С. Вялова (?) в Тургае с нижними горизонтами кутанбулакской свиты в Приаралье и с нижними слоями первой свиты в Павлодарском Прииртышье, а континентальные озерные отложения первой свиты в Прииртышье — со средними и верхними горизонтами кутанбулакской свиты в Приаралье; выделить в отдельную группу свиты: четвертую, аральскую, павлодарскую и свиты четвертичных отложений. Для этой группы характерен упадок развития голосеменных. По видимому составу голосеменных следует выделить отложения четвертой свиты в особую подгруппу олигоцен-миоценового возраста, а отложения аральской свиты — в подгруппу миоценового возраста; выделить на основании видового состава голосеменных ряд типов спектров, характеризующих миоцен-плиоценовые, нижне-, средне- и верхнечетвертичные и современные отложения.

11. Границы флористических групп спектров совпадают с границами свит, выделенных при помощи фациального анализа. Флористический анализ спорово-пыльцевых спектров дает возможность детально расчленять эти свиты в тех случаях, когда изучение их литологического состава не дает должного эффекта.

12. Схема стратиграфического положения руководящих групп пыльцевых спектров голосеменных является частью общей схемы стратиграфического положения руководящих спорово-пыльцевых спектров и голосеменных, покрытосеменных и спор в комплексе; в настоящей работе автор сделал попытку выявить возможность разработки такой схемы на примере изучения пыльцы голосеменных, выделенных из третичных и более молодых отложений Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья.

В дальнейшем эта схема должна быть значительно расширена и уточнена при помощи изучения спорово-пыльцевых спектров неогеновых и верхнепалеогеновых отложений Северного Приаралья, а также в процессе пересмотра материалов по Тургайскому прогибу, с проведением анализа состава пыльцы голосеменных по той схеме, которой придерживался автор при изучении голосеменных в Приаралье и Прииртышье.

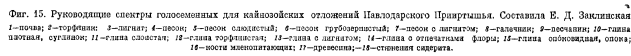
В заключение следует отметить совершенную необходимость введения в практику спорово-пыльцевых исследований третичных отложений флористического анализа. Последнее позволит использовать ареалы современных видов и родов для решения вопросов о происхождении и миграции флор, а также облегчит сопоставление разновозрастных отложений на территориях, значительно удаленных одна от другой.

Надо полагать, что это в настоящее время единственно правильный путь к расшифровке данных спорово-пыльцевого анализа и к расширению возможностей применения его в области стратиграфии.

[illegible]

Фиг. 14. Руководящие спектры толосеменных для палеогеновых отложений Северного Приаралья. Составила Е. Д. Зяблинская





## VII. МОРФОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЫЛЬЦЫ ГОЛОСЕМЕННЫХ, ВЫДЕЛЕННОЙ ИЗ КАЙНОЗОЙСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ ПАВЛОДАРСКОГО ПРИИРТЫШЬЯ И СЕВЕРНОГО ПРИАРАЛЬЯ

Спорово-пыльцевые спектры, выделенные автором из палеогеновых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья, разнообразны по составу; они содержат более 300 различных видов пыльцы и спор, среди которых пыльца голосеменных играет немалую роль, и участие ее в спектрах, принадлежащих различным стратиграфическим горизонтам, во многих случаях может иметь коррелирующее значение.

Так как использование данных спорово-пыльцевого анализа для стратиграфического расчленения третичных отложений с каждым годом расширяется, а отсутствие соответствующих атласов и справочников заметно затрудняет аналитическую работу, автор решается опубликовать данные по пыльце голосеменных до завершения всей предпринятой им работы по морфологическому описанию третичных пыльцы и спор Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья.

К сожалению, до сих пор еще нет схемы порядка описания и наименования ископаемых пыльцы и спор, но, по-видимому, одним из правильных методов является сравнение ископаемых форм с известными формами ныне живущих растений. Конечно, это применимо лишь при описании пыльцевых оболочек, извлеченных из отложений послепалеозойского времени, когда уже появились растения, принадлежащие к тем же семействам, а может быть, и родам, что и многие растения современных растительных ассоциаций. В частности это применимо к ископаемым оболочкам пыльцы и спор третичных растений, так как флора третичного периода в основной массе была уже близка к современной флоре тропиков, субтропиков и, отчасти, умеренных зон.

Поэтому, описывая формы пыльцевых зерен голосеменных, выделенных из третичных отложений, и по возможности приводя их к естественной системе, автор прибегал к употреблению наиболее распространенных в палеонтологии обозначений. Для обозначения предположительной принадлежности к современному семейству, роду или виду употреблялось окончание *ites*, например *Pinites*. Сходство с пыльцой современного вида достаточно близкое по совокупности признаков обозначалось сокращенно «aff» (*affinis*); при близком сходстве, но невозможном полном сравнении из-за плохой сохранности — «cf.» (*conformis*). Морфологическое сходство с современным видом обозначалось окончанием *formis* при условии установленного рода, например *Pinus longifoliaformis*. В том же случае, если ископаемые формы были тождественны с формами современными, им придавалось современное наименование, но после него в скобках ставилось *fossilis*. Обычно это употребляется для наименования плиоценовых и четвертичных видов. Этим автор указывал на принадлежность

формы к ископаемому растению. Такой способ характеристики ископаемых пыльцевых зерен, с одной стороны, приближает определение к естественной системе, а с другой — показывает, что автор не считает возможным полностью отождествлять по пыльце ископаемый вид растения с современным даже и в том случае, если морфологическое сходство пыльцы их очевидно.

Только в тех случаях, когда встреченная хорошей сохранности ископаемая форма пыльцевой или споровой оболочки имела характерные (выделяющие ее среди прочих известных ископаемых форм) и повторяющиеся морфологические особенности, но не имела аналогов среди пыльцы современных видов растений, ей придавалось новое название, основанное на характере этих морфологических особенностей. При этом чтобы показать, что вид описан только по пыльце, добавлялось в скобках слово «pollen»<sup>1</sup>. Впоследствии, когда будут созданы систематические справочники по морфологии пыльцы современных растений, наименования ископаемых форм в большей мере могут быть уточнены. В настоящее же время очень важно, чтобы одни и те же формы всегда имели одно и то же название и ископаемый материал был бы сравним.

Автор полагает, что, возможно, им допущены некоторые погрешности в определении пыльцы, а поэтому замечания, которые могут возникнуть у лиц, использующих его работу, он с готовностью примет во внимание при дальнейшей работе.

Описание встреченных форм делалось параллельно с подсчетом зерен при анализе. Поэтому выявление основных морфологических признаков ископаемых пыльцевых зерен (оболочек) зачастую было сделано по одному-двум экземплярам. Все пробы обрабатывались ацетилирующей смесью, так что ископаемая пыльца была приведена в состояние, сравнимое с эталонным материалом. Большинство описанных форм документировалось при помощи микрофотографирования или зарисовок. При дальнейших аналитических работах вносились поправки на отклонения в размерах и в характере структурных элементов. Такой метод описания допускает, конечно, пробелы и неточности определения, которые должны исправляться по мере накопления фактического материала.

Комплекс пыльцы голосеменных, встреченных в спорово-пыльцевых спектрах палеогена, содержит три морфологически различных типа зерен (фиг. 16):

I. Пыльцевые зерна сфероидальные, однокамерные, без воздушных мешков, однопоровые или беспоровые (фиг. 16, графа I, 1—8). К этому типу относится пыльца *Taxaceae* и *Taxacites*, *Taxodiaceae*, *Pinaceae* (род *Tsuga*), *Araucariaceae* и *Araucarites*; *Cupressaceae* и *Cupressites*; *Gnetaceae* (*Gnetumites*).

II. Пыльцевые зерна эллипсоидальные, беспоровые, однобороздные или безбороздные, без складок или со складками, без воздушных мешков или с зачаточными воздушными мешками (фиг. 16, графа II, 1—5). К этому типу относится пыльца *Ginkgoaceae*, *Cycadaceae*, *Ephedraceae* и *Ephedrites* и *Welwitschiaceae* и *Welwitschiacites*.

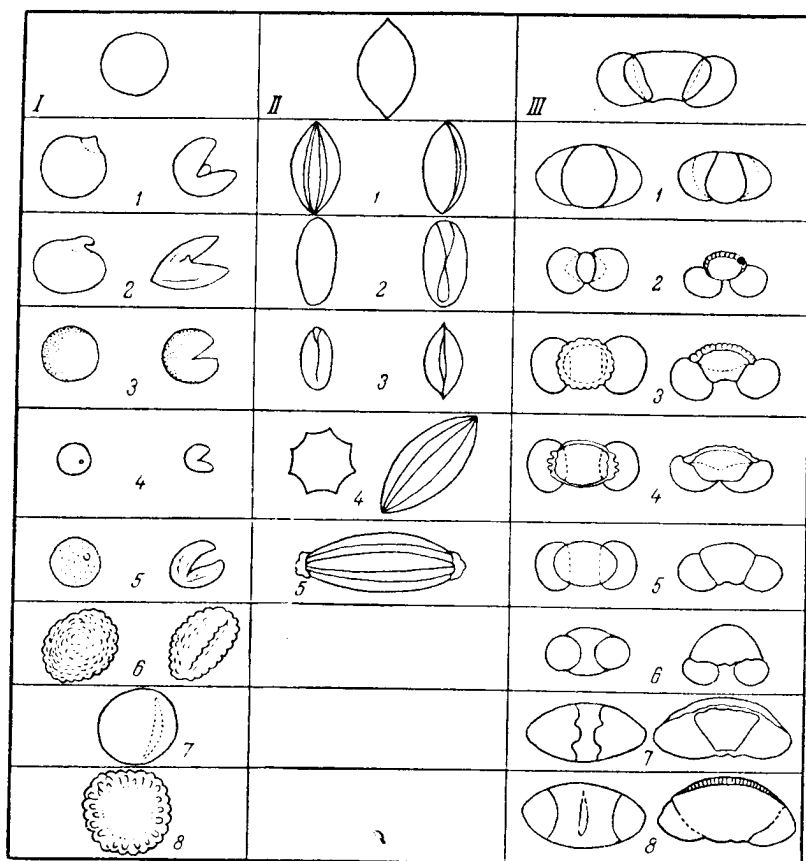
III. Пыльцевые зерна сложной формы, обычно трехкамерные, в отдельных случаях четырехкамерные, с центральным телом и воздушными мешками (фиг. 16, графа III, 1—8). К этой группе относится пыльца *Pinaceae* (роды *Pinus*, *Picea*, *Abies*, *Cedrus*, *Keteleeria*), *Podocarpus* и *Dacrydium*.

Пыльца семейства гинкговых и цикадовых в настоящей работе охарактеризована недостаточно полно из-за редкости ее находок в кайнозойских спектрах. Кроме того, современная флора дает для них очень бедный сравнительный материал, значительно беднее, чем для других семейств. До-

<sup>1</sup> Аналогично «spm.» Эрдтмана (Erdtman, 1947).

статочно напомнить, что из обширного ранее рода *Ginkgo* в настоящее время известен только один вид — *Ginkgo biloba* L. Пыльца сем. Pinaceae охарактеризована полнее, так как сравнительный материал давал возможность довольно широкого сопоставления с пылью современных растений.

Отождествление описываемой пыли с видами или родами ископаемой пыли, упомянутой в литературе, производилось не по голотипам,



Фиг. 16. Схематическое изображение различных морфологических типов пыли голосеменных.

I — пыльца сферическая, однопорая или беспорая (1—5), однобороздная или безбороздная (6—8): 1 — тип *Taxodium*; 2 — тип *Sequoia*; 3 — тип *Taxus*; 4 — тип *Torreja*; 5 — тип *Cupressaceae*; 6 — тип *Sciadopitys*; 7 — тип *Araucariaceae*; 8 — тип *Tsuga*. II — пыльца эллипсоидальная, однобороздная (1—3) или безбороздная (4—5). 1 — тип *Ginkgoaceae*; 2, 3 — тип *Cuscutaceae*; 4 — тип *Ephedra*; 5 — тип *Welwitschia*. III — пыльца сложной формы с воздушными мешками: 1 — тип *Pinus protocembra*; 2 — тип *Podocarpus*; 3 — тип *Pinus* секции *Strobus*; 4 — тип *Pinus sibirica*; 5 — тип *Pinus silvestris*; 6 — тип *Pinus* секции *Banksia*; 7 — тип *Cedrus*; 8 — тип *Picea*.

а по описаниям или микрофотографиям. Голотипы в большинстве случаев оставались для нас недоступными.

Все препараты, по которым велось описание ископаемых форм, относятся к коллекции ГИН АН СССР № 3082. Препараты из Павлодарского Прииртышья имеют индекс  $\frac{3}{K}$  и  $\frac{H}{K}$ , а из Северного Приаралья  $\frac{3я}{K}$ .

Микрофотографии сделаны в фотолaborатории Отдела стратиграфии ГИН АН СССР заведующим лабораторией А. И. Никитиным при непосредственном участии автора. Зарисовки выполнены автором.

ОБЩИЙ СПИСОК ВИДОВ, ПРИВЕДЕННЫХ  
В ОПИСАНИЯХ

**КЛАСС CYCADALES**

СЕМ. CYCADACEAE

*Zamites* (pollen).  
*Encephalarites cycadioides* sp. nov. (pollen).

**КЛАСС GINKGOALES**

СЕМ. GINKGOACEAE

*Ginkgo bilobaeformis* sp. nov. (pollen),  
*Ginkgoites* (pollen).

**КЛАСС CONIFERALES**

СЕМ. TAXACEAE

*Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen).  
*T. baccataeformis* sp. nov. (pollen).  
*Taxites* (pollen).  
*Torreya californiformis* sp. nov. (pollen).

СЕМ. PODOCARPACEAE

*Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen).  
*P. andiniiformis* sp. nov. (pollen).  
*P. nageiaformis* sp. nov. (pollen).  
*Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen).  
*P. gigantea* sp. nov. (pollen).  
*Podocarpus* aff. *dacrydioides* A. R i g h.  
*Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen).

СЕМ. ARAUCARIACEAE

*Araucaria elegans* sp. nov. (pollen).  
*Agathis ovataeformis* sp. nov. (pollen).

СЕМ. PINACEAE

*Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen)  
*A. protofirma* sp. nov. (pollen).  
*Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen).  
*Picea tasaranica* sp. nov. (pollen).  
*P. schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen).  
*P. alata* sp. nov. (pollen) (ex. gr. *P. jezoensis* C a r r.).  
*Cedrus* aff. *deodara* L o u d.  
*C. laxireticulata* Z a u e r (pollen).  
*C. piniformis* sp. nov. (pollen).  
*C. Janschinii* sp. nov. (pollen).  
*C. parvisaccata* Z a u e r. (pollen).  
*C. pusilla* Z a u e r (pollen).  
*C. aff. libani* L a w s.  
*C. longisaccata* sp. nov. (pollen).  
*Pinus cembraeformis* sp. nov. (pollen).  
*P. aff. koraiensis* S i e b. et Z u c c.

*P. microsibirica* sp. nov. (pollen).  
*P. sibiriciformis* sp. nov. (pollen).  
*P. ex. gr. sibirica* (R u p r.) M a y r.  
*P. protocembra* sp. nov. (pollen).  
*P. ex. gr. protocembra*.  
*P. strobiformis* sp. nov. (pollen).  
*P. peuceformis* sp. nov. (pollen).  
*P. exelsaeformis* sp. nov. (pollen).  
*P. ex gr. exelsa* W a l l.  
*P. gerardianaeformis* sp. nov. (pollen).  
*P. longifoliaformis* sp. nov. (po len).  
*P. ponderosaeformis* sp. nov. (pollen)  
*P. bicornis* sp. nov. (pollen).  
*P. minutus* sp. nov. (pollen).  
*P. taedaeformis* sp. nov. (pollen).  
*P. singularis* sp. nov. (pollen).  
*P. banksianaeformis* sp. nov. (pollen).  
*P. halepensisformis* sp. nov. (pollen).  
*P. protosilvestris* sp. nov. (pollen).  
*P. aff. silvestris* L.  
*Tsuga crispa* sp. nov. (pollen).  
*T. torulosa* sp. nov. (pollen).

#### CEM. TAXODIACEAE

*Sciadopitys tuberculata* sp. nov. (pollen) [ex gr. *S. verticillata* S i e b. et  
Z u c c.].  
*Sequoia semperviriformis* sp. nov. (pollen).  
*Taxodium* aff. *distichum* L. (R i c h.).  
*Taxodiumites* sp.  
*Cunninghamia* aff. *lanceolata* L a m b.

#### CEM. CUPRESSACEAE

*Thuyoites* (pollen).  
*Libocedrus* sp. (pollen).  
*Cupressites* (pollen).  
*C. sp.* (pollen), (aff. *Cupressus pallens* B o l c h.).  
*Chamaecyparites* (pollen).

#### K.IACC GNETALES

#### CEM. WELWITSCHIACEAE

*Welwitschites protomirabilis* sp. nov. (pollen).

#### CEM. EPHEDRACEAE

*Ephedra eocenipites* W o d e h o u s e.  
*E. aff. Przewalskii* S t a p f.  
*E. aff. distachya* L.  
*E. aff. intermedia* S c h r.  
*Ephedrites trinata* sp. nov. (pollen).

#### CEM. GNETACEAE

*Gnetumites* (pollen).

# 1. КЛАСС CYCADALES САГОВЫЕ

## СЕМ. CYCADACEAE — САГОВНИКОВЫЕ

### *Zamites pollen*

Пыльца сем. Cycadaceae и Ginkgoaceae относится к типу эллипсоидальных, беспоровых, однобороздных (или с одной складкой).

#### *Zamites* sp. (pollen)

Табл. I, рис. 1—3

Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

Пыльца имеет сходство со следующими формами, известными по литературным данным:

- 1933. *Cycadopites* sp. W o d e h o u s e. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 485, fig. 1—3.
- 1949. *Bennettiteae* — *Pollenites lucifer* sp. Th i e r g a r t. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. IV/V, Fig. 12.
- 1950. Cycadeen (oder Ginkgoaceen) Pollen R e i s s i n g e r. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, Taf. XVIII, Fig. 16—22.
- 1950. Cycadeen (oder Ginkgoaceen) Pollen R e i s s i n g e r. Там же, табл. XIII, фиг. 13—15.

Пыльцевое зерно эллипсоидальное, однобороздное. Длина зерна около 25  $\mu$ , ширина около 16  $\mu$ , отклонения в размерах в пределах от 3 до 5  $\mu$ . Очертание в боковом положении овальное. На дистальной стороне от одного полюса к другому проходит продольная борозда. У некоторых зерен борозда почти скрыта под завернувшимися краями (табл. I, рис. 2), так как зерно часто сминается таким образом, что края его образуют нечто вроде завернувшегося лепестка. Экзина однослойная (при увеличении в 400 раз), в большинстве случаев гладкая или неяснобороздавчатая. Контур зерна ровный или слабоволнистый.

Ископаемая форма, если судить по описаниям и рисункам, имеет сходство с пылью *Zamia muricata* W i l l d. в том случае, если зерно не смято и сохраняет округло-эллиптическое очертание. Пыльца ныне живущих *Zamia muricata* описана В. В. Зауер (1950) в числе прочих Cycadales. Автор отмечает, что пыльца *Zamia* имеет двуслойную оболочку, что различимо при увеличении в 700 раз.

Если пыльцевое зерно *Zamites* деформировано и несколько сжато вдоль большой оси, оно имеет некоторое сходство с пылью растений семейства Umbelliferae или Leguminosae.

С. Н. Наумовой (1939) формы, подобные *Zamites* sp., включены в общую группу *Intorta*.

Все перечисленные выше синонимы не дают точного определения данной формы, так как авторы относят описанные ими пыльцевые зерна или к семейству цикадовых или к семейству беннетитовых. Как известно, эти семейства являются наиболее древней ветвью голосеменных, ведущих свое начало еще с каменноугольного периода, причем Cycadales имели широкое распространение еще в юрское и меловое время. В более молодых отложениях значение их сильно снижается, и в верхнетретичных отложениях находки пыльцы растений, принадлежащих к семейству Cycadaceae, уже единичны.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1; верхние горизонты чеганских глин.

Распространение: чеганские глины в пределах Казахстана; эоцен — лейас в Германии; верхний и средний мел — в Центральной Сибири.

*Encephalartites cycadioides* sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 4 и 5

Препараты № 149  $\frac{H}{K}$  и 233  $\frac{H}{K}$ .

Голотип: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, чеганские глины и глины второй свиты континентальных отложений среднего олигоцена (препарат № 149  $\frac{H}{K}$ ).

Пыльца имеет сходство со следующими формами, известными по литературе:

1930. *Cycadopites* sp. Woodhouse. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation p. 485, fig. 1—3.

1953. *Encephalartites cycadiformis* Болоховитина. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 65, табл. X, рис. 17.

Пыльцевое зерно однобороздное, эллипсоидальное, беспоровое. Размер по большой оси около 30  $\mu$ , по меньшей — около 20  $\mu$ ; встречаются зерна размерами не более 18  $\mu$  по меньшей оси. Очертание в боковом положении эллиптическое. Борозда длинная, проходит от полюса к полюсу. Мембрана борозды гладкая. У большинства зерен края борозды в области экватора смыкаются. В результате этого края борозды образуют рисунок в виде восьмерки (табл. I, фиг. 4), что является одним из наиболее характерных диагностических признаков для пыльцы *Cycadaceae*. Экзина двуслойная, тонкая. Поверхность экзины неравномерно мелкобугорчатая. У краев борозды оба слоя экзины выклиниваются.

С пылью современного вида *Encephalartos Lehmannii* описанная ископаемая форма имеет большое сходство как по форме и очертаниям, так и по характеру поверхности экзины. Отличием ископаемого вида от современного является более тонкая экзина и меньшее количество ее слоев [в описании В. В. Зауер (1950) для пыльцевых зерен *Encephalartos Lehmannii* указаны три слоя экзины, а пыльцевые зерна ископаемого вида имеют лишь два слоя].

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: меловые отложения Казахстана и Сибири; эоцен Америки (флора Грин-Ривер), где пыльца описана под общим названием *Cycadopites*; нижний и средний олигоцен Казахстана.

Пыльца *Cycadales* трудно отличима от пыльцы *Ginkgoales* и в основном определения ведутся лишь до семейства. С. Н. Наумовой (1939) формы, подобные *Ginkgoaceae* и *Encephalartos Lehmannii*, вместе с пылью хвойных без воздушных мешков объединены в общую группу *Intoria*. Ископаемый вид близок к пыльце современного рода *Encephalartos Lehmannii*, два вида которого описаны В. В. Зауер (1950). В наше время этот род распространен в Южной и Юго-Восточной Африке. Пыльца, подобная *Encephalartites* в третичных отложениях Казахстана, видимо, может рассматриваться как реликт меловой флоры.

Согласно данным В. В. Зауер (1950), наибольшего распространения саговниковые достигли в конце юрского и в начале мелового периода. Однако, по данным Крейзеля (Krausel, 1949), в третичное время они представлены еще 21 видом.



На территории Казахстана ни пыльцы, ни макроскопических остатков *Cusadales* до наших исследований не было найдено. В. В. Зауер отмечает обилие находок цикадовых (листовые отпечатки) в окраинных зонах Сибирской флористической провинции юрского периода (флоры Средней Азии).

В настоящее время семейство саговниковых объединяет 9 родов, причем большинство видов, относящихся к этим родам, являются обитателями тропиков.

Растения рода *Zamia* в настоящее время распространены в тропической и субтропической зонах Америки и представляют собой древовидные или кустарниковые формы, по внешнему виду несколько напоминающие кустарниковые формы пальмы или древовидные папоротники.

## 2. КЛАСС GINKGOALES — ГИНКГОВЫЕ

### СЕМ. GINKGOACEAE — ГИНКГОВЫЕ

На основании находок макроскопических остатков и пыльцы установлено, что гинкговые принадлежат к весьма древним семействам, ведущим свое начало еще с девона (Наумова, 1939; Болховитина, 1952). Наиболее широко гинкговые были распространены в юрское время. В меловом периоде число видов их значительно снижается, а в третичных отложениях встречаются представители только одного рода — *Ginkgo*. Один из видов этого рода, а именно *Ginkgo biloba* L., существует и в наше время — в субтропической зоне.

Пыльца ископаемых видов, относимых к семейству *Ginkgoaceae*, имеет однотипное строение, весьма близкое к строению пыльцевого зерна современного вида *Ginkgo biloba* L.

Пыльцевые зерна эллипсоидальные или округло-эллипсоидальные, однобороздные и беспоровые. Размеры: 30—45  $\mu$  по большей оси и 15—25  $\mu$  — по меньшей. Очертание зерна в боковом положении округлое или эллиптическое. Контур зерна ровный или слегка волнистый. Борозда вытянута параллельно большей оси, широкая, имеет тонкую мембрану. Контур борозды иногда неровный. Экзина однослойная, тонкая (не более 2  $\mu$ ), значительно утончается и резко обрывается к краям борозды, не выклиниваясь. Поверхность зерна гладкая или неяснобугорчатая. Смятое пыльцевое зерно (смятие обычно происходит в направлении, параллельном большей оси) несколько напоминает пыльцу *Cusadaceae*. Наиболее распространенный тип ископаемых зерен, относимых к семейству *Ginkgoaceae*, ближе всего к пыльце современного вида *Ginkgo biloba* L. (табл. I, рис. 12—14). Ископаемый вид отличается от современного лишь более угловатыми очертаниями.

#### *Ginkgo bilobaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 6—11  
 Препараты № 170  $\frac{H}{K}$ , 186  $\frac{H}{K}$  (рис. 6); 198  $\frac{H}{K}$ , 244  $\frac{H}{K}$  и 255  $\frac{3}{K}$  (рис. 7);  
 191  $\frac{H}{K}$  (рис. 8 и 9); 334  $\frac{3}{K}$  (рис. 10 и 11)

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, слюдитые глины с растительными остатками; мел — палеоген (препарат № 186  $\frac{H}{K}$ ).

Пыльца имеет сходство со следующими формами, известными по литературе:

1933. *Cycadopites* sp. W o d e h o u s e. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 485, fig. 1—5.  
 1939. *Ginkgo parva* Н а у м о в а (in litt.). *Ginkgo gibberosa* Н а у м о в а (in litt.).  
 1949. *Acuminella marginata* М а л я в к и н а. Определитель спор и пыльцы. Юра — мел., табл. 3, рис. 58.  
 1950. Cycadeen (oder Ginkgoaceen) Pollen R e i s s i n g e r. Die «Pollenanalyse» ausge-  
 dehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, S. 124, Taf. XIII,  
 Fig. 13—23.

Строение пыльцевого зерна подобно приведенному в общей характеристике семейства. Размеры: 35—45  $\mu$  по большей оси и 16—22  $\mu$  — по меньшей.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: наиболее достоверны данные о находках пыльцы *Ginkgo* из юрских отложений Урала и Западной Сибири, а также из меловых и юрских отложений Казахстана. Известна пыльца *Ginkgo* из меловых и третичных отложений от эоцена до среднего олигоцена Казахстана, Среднего Урала и Западно-Сибирской низменности.

Присутствие пыльцы *Ginkgo* отмечено в эоцене Западной Германии и Грин-Ривер в Америке, где пыльцевые зерна типа *Ginkgoaceae* многие авторы относили к группе «Cicadeen oder Ginkgoaceen pollen».

#### *Ginkgoites* (pollen)

Табл. I, рис. 15, 16

Препарат № 193  $\frac{H}{K}$

Пыльцевые зерна по внешнему облику подобны пыльце *Ginkgo*. Отличаются значительно большими размерами (до 60  $\mu$  и более по большей оси). Экзина часто имеет разрывы по борозде.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз; четвертая свита континентального олигоцена (верхний эоцен).

### 3. КЛАСС CONIFERALES — ХВОЙНЫЕ

#### СЕМ. TAXACEAE — ТИССОВЫЕ

Пыльца тиссовых относится к типу сфероидальных, безбороздных, беспоровых или однопоровых пыльцевых зерен.

Размеры варьируют в пределах от 16 до 30  $\mu$ , в зависимости от принадлежности к роду или виду. Очертания обычно округлые или неправильные в связи со вторичной деформацией. Пыльцевое зерно безбороздное, часто имеет трещину (*Torreya*), разверзающую его от центра к периферии. Повидимому, трещины образуются в местах, предназначенных для прорастания пыльцевой трубки. Некоторые зерна имеют складки (*Taxus*). Экзина пыльцевых зерен одно- или двуслойная. Поверхность экзины обычно гладкая или имеет бугорчато-шиповатые выросты. В зависимости от наличия или отсутствия скульптурных выростов контур зерна гладкий или неровный. Ископаемая пыльца семейства *Taxaceae*, так же как и пыльца современных растений этого семейства, имеет морфологическое сходство с пыльцой растений семейства *Cupressaceae*. Пыльца, отнесенная нами к роду *Taxus*, отличается от пыльцы, отнесенной к семейству *Cupressaceae*, более толстой и всегда скульптурной экзиной, а также отсутствием трещины.

В третичных отложениях Северного Казахстана автором была найдена пыльца тиссовых, представленная тремя видами, довольно близкими по морфологическим признакам к пыльце современных родов *Taxus* L. и *Torreya* Agn. et L.

В. В. Зауер (1950) отмечала, что пыльца тиссовых в ископаемом состоянии встречается довольно редко, но, по-видимому, это верно только для некоторых ботанико-географических провинций, так как, например, в палеогене Нижнего Дона и Кавказа пыльца тиссовых была обнаружена неоднократно.

### Род *Taxus* L. — Тисс

#### *Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 17, 18

Препарат № 186  $\frac{H}{K}$

**Г о л о т и п:** Павлодарское Прииртышье, Парамоновка, скв. 2; слюдяные глины подглауконитовой свиты (верхний мел).

Пыльцевое зерно сфероидальное, безбороздное, беспоровое; размер 16—20  $\mu$ ; очертание округлое или эллиптическое. Экзина двуслойная (?), скульптура мелкобугорчатая, что обуславливает точечный рисунок на поверхности зерна. Некоторые зерна имеют бугорки с заостренными вершинами, что создает впечатление шиповатости. Экзина часто сминается в мелкие складки, при этом зерно не теряет первоначальной формы и остается сфероидальным. Контур зерна — мелкофестончатый.

Пыльца описанного вида имеет большое сходство с пыльцой *Taxus cuspidata* Sieb. et Zucc., характеристика которой дана в работе В. В. Зауер (1950). Сходство отмечается как по общим морфологическим признакам, так и по размерам.

**М е с т о н а х о ж д е н и е:** см. голотип.

**Р а с п р о с т р а н е н и е:** ископаемые остатки тисса известны еще в юрское и меловое время на островах Дальнего Востока. Веточки и отпечатки листьев (хвой) тисса найдены в ряде пунктов СССР, где они известны начиная от отложений датского яруса до сармата включительно. В палеогене пыльца тисса обнаружена по рр. Уралу, Волге и Дону и на Северном Кавказе. В виде единичных находок пыльца *Taxus* отмечена в палеогене и неогене Среднего Поволжья вместе с пыльцой *Sciadopitys*. А. Н. Криштофовичем (1941) отмечены находки тисса в неогене Дона. В Казахстане пыльца тисса встречается в верхнемеловых и третичных отложениях. Эрдтман (1943) указывает на находки пыльцы *Taxus* в межледниковых отложениях Польши. В настоящее время вид *Taxus cuspidata* Sieb. et Zucc. растет в лесах Дальнего Востока, в Китае, Маньчжурии и Японии.

#### *Taxus baccataeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 19 и 20

Препараты № 193  $\frac{H}{K}$ , 165  $\frac{H}{K}$  (рис. 19); 334  $\frac{H}{K}$  (рис. 20)

**Г о л о т и п:** Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1 опоковые глины, верхний — средний эоцен (препарат № 193  $\frac{H}{K}$ ).

Пыльцевое зерно сфероидальное, безбороздное, беспоровое. Размер от 25 до 29  $\mu$ . У большинства зерен образуется клиновидная трещина от

периферии к центру, но при этом зерна не сминаются и сохраняют первоначальные округлые очертания. Экзина толстая (до 2  $\mu$ ), двуслойная, верхний слой ее имеет бугорчато-шиповидные выросты, расположенные равномерно по всей поверхности зерна. У некоторых зерен выросты расположены радиально. Контур зерна неровный.

От пыльцы *Taxus* aff. *cuspidata* Sieb. et Zucc. пыльца *Taxus baccataeformis* отличается строением поверхности, более толстой экзиной и несколько большей величиной.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: эоцен, нижний и средний олигоцен Павлодарского Прииртышья, средний олигоцен Северного Приаралья. Единичные находки в палеоцен-эоценовых и верхнемеловых отложениях Казахстана.

В настоящее время *Taxus baccata* L. — тисс ягодный или европейский — распространен спорадически почти по всей Западной Европе, по Черноморскому побережью, Кавказу и Малой Азии и в горах Северной Африки. В горных районах тисс достигает до высоты 2300 м над уровнем моря. Характерен для лесной зоны; растет под пологом хвойно-широколиственных лесов.

#### *Taxites* (?) (pollen)

Табл. I, рис. 21

Препарат № 193  $\frac{H}{K}$

Пыльцевое зерно сфероидальное; размер его от 26 до 36  $\mu$ . Иногда наблюдается трещина от периферии к центру. Экзина толстая (до 3  $\mu$ ). Поверхность экзины мелкошиповатая. У некоторых зерен выросты расположены радиально. По величине зерна имеют сходство с пыльцой современного вида *Taxus baccata* L.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1; опоковые глины среднего эоцена. В палеогеновых спорово-пыльцевых спектрах Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья встречается в комплексе с различными видами *Cedrus*, *Sciadopitys*, *Pinus* и представителями ксерофитной флоры покрытосеменных.

#### *Torreya californiformis* sp. nov. (pollen)

Табл. I, рис. 22 и 23

Препараты № 198  $\frac{H}{K}$  (рис. 22), 259  $\frac{3}{K}$  (рис. 23)

Голотип: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз; глины с отпечатками растений, вторая свита континентальных отложений среднего олигоцена.

Пыльцевое зерно сфероидальное, безбороздное, беспоровое или с одной мало заметной порой. Величина пыльцевого зерна 22—27  $\mu$ . Экзина тонкая, однослойная или двуслойная, гладкая, иногда сминающаяся в мелкие, произвольно расположенные складки. Контур ровный.

С *Torreya californica* Torr., изученным автором по гербарному материалу из коллекции Н. А. Болховитиной, имеет большое сходство по всем морфологическим признакам за исключением небольших отклонений в размерах. Отдельные ископаемые пыльцевые зерна *Torreya californiformis* достигают величины 27  $\mu$ , пыльца же ныне живущей *T. californica* Torr. не превышает 25  $\mu$ .

От описанной В. В. Зауер (1950) пыльцы *Torreya nucifera* Sieb. et Zucc. ископаемая пыльца, определенная как *T. aff. californica*, отличается следующими признаками:

1) диаметр пыльцы *T. aff. californica* не превышает 27  $\mu$ , а большинство пыльцевых зерен *T. nucifera* достигает 33  $\mu$ ;

2) пыльцевые зерна *T. aff. californica* имеют округло-правильные очертания, а *T. nucifera* — округло-неправильное;

3) пыльцевые зерна *T. californiformis* (так же как и у ныне живущей *T. californica* Т о г г.) — гладкие, лишенные каких-либо выростов, пыльца же *T. nucifera* имеет мелкие бугорчатые выросты. Кроме того, толщина экзины *T. nucifera* значительно превышает толщину экзины пыльцы *T. californiformis*.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: Павлодарское Прииртышье, нижний эоцен, низы среднего олигоцена. Северное Приаралье, верхний эоцен — нижний олигоцен. Единичные находки известны из олигоцен-миоценовых отложений Воронежской обл.

Растения, принадлежащие к роду *Torreya* A r n o t t., относятся к вечнозеленым формам. В настоящее время *Torreya californica* произрастает в Калифорнии. Представляет собой дерево, высотой до 35 м; приурочено к лесной зоне. Некоторые виды *Torreya* приурочены к южным широтам. Часть из них произрастает в Южном Китае, в Японии и на п-ове Флорида.

#### СЕМ. PODOCARPACEAE — НОГОПЛОДНИКОВЫЕ

Ископаемые растительные остатки растений из сем. Podocarpaceae, определенные до вида, на территории СССР известны еще с 1859 г., когда Г. В. Абилом были определены отпечатки листьев из третичных толщ Киевщины. Находки древесины и листьев *Podocarpus* обычны для эоцена и палеоцена Донбасса и Киевской обл. В более древних отложениях известны находки древесины различных *Podocarpoxylo* в средней и верхней юре, в мелу (где в нижних и средних отделах этот род представлен наиболее широко). В своей книге, посвященной обзору растительности прошлых веков, А. Сьюорд (1936) упоминает о находках хвойного, так называемого *Archaeopodocarpus*, который может быть отнесен к наиболее древним представителям сем. Podocarpaceae.

Нигде в литературе не упоминается о находках листьев или древесины *Dacrydium*. Причиной этого может быть некоторое несогласие относительно систематического положения этого рода, который, как известно, некоторые авторы относят к семейству тиссовых. Возможно, что ранние находки «тиссовых» содержали в себе часть видов, принадлежащих к роду *Dacrydium*.

Пыльцевые данные свидетельствуют о чрезвычайно раннем появлении растений сем. Podocarpaceae. Пыльца типа *Podocarpus* найдена уже в пермских отложениях. Как отмечает В. В. Зауер, пыльца пермских Podocarpaceae отличается большей величиной, чем выделяемая из третичных отложений. Кроме того, пыльцевые зерна Podocarpaceae из перми имеют густую, часто двойную сетку на воздушных мешках, значительно более четкую, чем сетка у пыльцы Podocarpaceae из третичных отложений. По внешнему облику более древние формы пыльцы Podocarpaceae имеют большое сходство с *Podocarpites gigantea* и *P. kashstanica*, чем с *Podocarpus aff. Nageia* или с другими мелкими формами, обычно встречающимися в третичных отложениях.

Большое разнообразие пыльцы Podocarpaceae отмечается в меловых отложениях Казахстана, Приуралья, Сибири, Дальнего Востока, а также в нижнетретичных отложениях Азиатской и юга Европейской частей СССР.

Недостаточное знакомство с морфологией пыльцы различных видов современных Podocarpaceae привело к неправильному взгляду на прекращение распространения ногоплодниковых уже в олигоцене. Авторы многих

описаний спорово-пыльцевых спектров из кайнозойских отложений относили пыльцу, весьма близкую по морфологическим признакам к пыльце описанных видов *Podocarpus*, к особому виду *Pinus*, условно называемому ими *Pinus Haploxyton*. Так, например, пыльца, описанная Потонье, Тиргартом и др. под названием *Pinus Haploxyton*, или *Pinus Haploxyton* Тур., по-видимому, в действительности в большинстве случаев принадлежит к роду *Podocarpus*, что конечно не исключает возможности находок пыльцы сосен, принадлежащих к подроду *Haploxyton* в отложениях меловой и третичной систем.

Современное географическое распространение семейства, представленного в настоящее время шестью родами (*Podocarpus*, *Dacrydium*, *Phorphaera*, *Phyllocladus*, *Saxegotha*, *Microcachrys*), приурочено к тропическому поясу южного полушария. Многие виды *Podocarpaceae*, как *Podocarpus chilense* A. Rich., *P. dacrydioides* A. Rich., *P. Totara* N. Don и роды *Saxegothae* Lindl. и *Dacrydium* Soland., составляют значительную часть хвойных и смешанных тропических и субтропических лесов тропической и южной части Южной Америки, Африки, Новой Зеландии. Многие виды деревьев, принадлежащие к роду *Podocarpus*, являются основными лесообразующими породами в горных частях Южной Африки, где они составляют массивы с подлеском из можжевельника.

Отдельные виды *Podocarpus* широко распространены в Австралии, Японии, Южном Китае и Южной Америке. Обычными спутниками различного рода *Podocarpus* во влажных тропиках является *Araucaria* и *Agathis*. Кустарниковые формы *Podocarpaceae* распространены в южном полушарии на юге умеренной зоны.

Все пыльцевые зерна, выделенные из палеогеновых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья, относящиеся к сем. *Podocarpaceae*, принадлежат к двум родам: *Podocarpus* L'Herit. и *Dacrydium* Soland. Пыльцевые зерна этих родов относятся к типу пыльцы хвойных, состоящей из центральной части, или тела, и двух или более воздушных мешков, прикрепленных к телу с брюшной стороны (фиг. 16, III). Величина пыльцевых зерен варьирует, в зависимости от принадлежности к виду, от 50 до 120 м. Борозда, расположенная на брюшной стороне тела, выражена неясно или совсем не обнаруживается. Пор нет. Экзина тела обычно двух- или трехслойная на спинной части тела и однослойная или двуслойная на брюшной. Воздушные мешки представляют собой выросты экзины, обычно однослойные. Структура и скульптура экзины тела и воздушных мешков различны. Экзина тела обычно имеет крупнозернистую или столбчатую структуру и бугорчатую или лакунообразную скульптуру. На спинной поверхности зерна экзина утолщается подобно щиту у пыльцы сем. *Pinaceae*. Утолщение это проецируется в боковом положении в виде гребня. Экзина воздушных мешков имеет сетчатую структуру. Контур тела неровный, волнистый; контур мешков — обычно ровный.

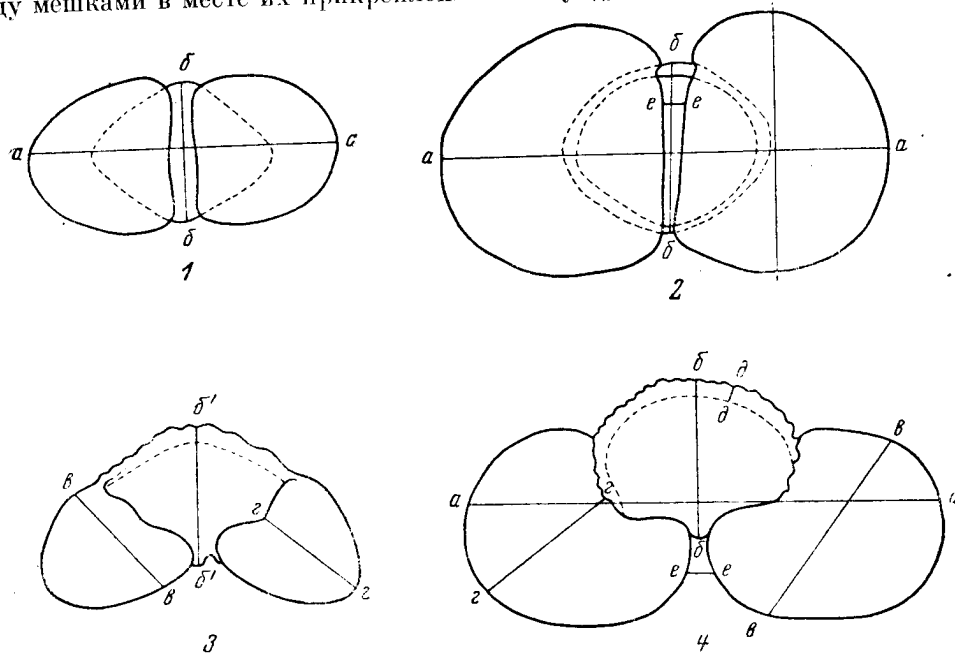
Внешне пыльцевые зерна родов *Podocarpus* и *Dacrydium* сходны с пыльцевыми зернами сем. *Pinaceae*, в частности с видами родов *Pinus* и *Abies*. В отношении признаков морфологического различия между пыльцой *Podocarpaceae*, снабженной воздушными мешками, и *Pinaceae*, — специальных исследований нет. В. В. Зауер (1950) указывает следующие черты отличия пыльцевых зерен *Podocarpus* от сем. *Pinaceae* (в частности, рода *Pinus*): более мелкие размеры, резко очерченные зародышевые борозды, тонкие, обычно смятые воздушные мешки.

Однако в ископаемом состоянии в спорово-пыльцевых спектрах встречаются такие пыльцевые зерна *Podocarpaceae* (в особенности рода *Podocarpus*), которые по ряду признаков значительно уклоняются от норм, приведенных В. В. Зауер для современной пыльцы рода *Podocarpus*. Также и среди ископаемой пыльцы рода *Pinus*, сходной с пыльцой рода *Podocarpus*.

*carpus*, встречено много форм, уклоняющихся от обычных норм для пыльцы современных видов этого рода. Поэтому для определения палеогеновой пыльцы этих родов пришлось заняться выявлением их основных, характерных диагностических признаков.

За основу диагностических признаков ископаемой пыльцы родов *Podocarpus* и *Dacrydium* брались следующие элементы:

- 1) форма и очертание тела пыльцевого зерна (в полярной и боковой проекциях);
- 2) форма и очертание воздушных мешков;
- 3) способ прикрепления воздушных мешков к телу;
- 4) структура и скульптура оболочек тела;
- 5) характер сетчатости воздушных мешков;
- 6) размеры: а) общая длина пыльцевого зерна (наибольшая ось, проходящая через тело и мешки), б) ширина и высота тела, в) ширина (диаметр) и высота воздушного мешка, г) толщина экзины, д) расстояние между мешками в месте их прикрепления к телу (фиг. 17).



Фиг. 17 Основные элементы измерения пыльцевых зерен сем. Podocarpaceae, имеющих воздушные мешки.

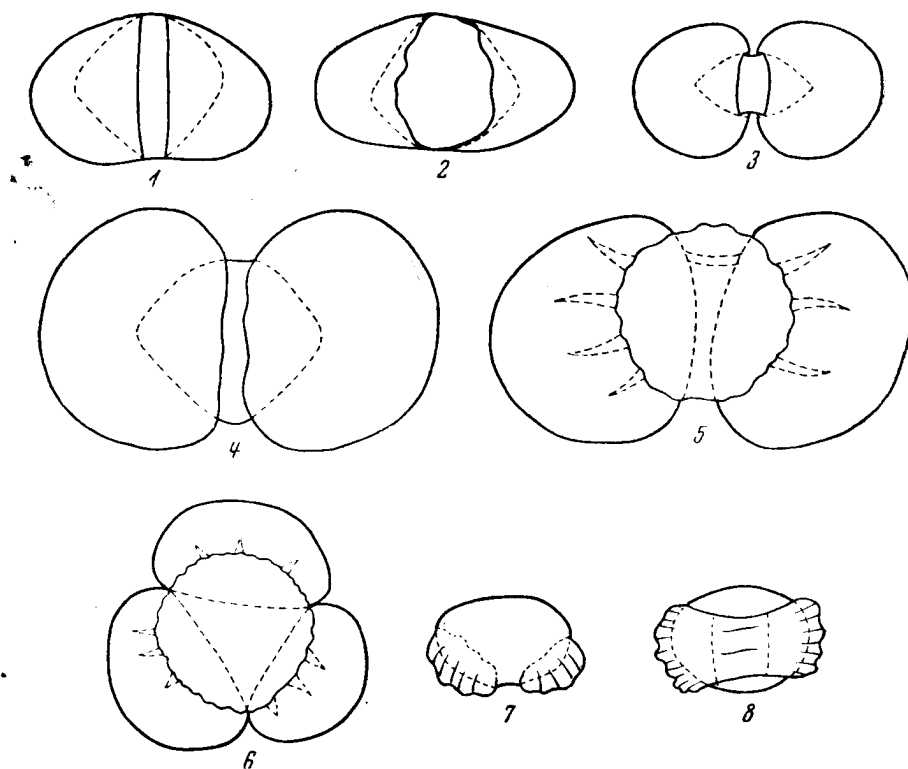
1, 2 — полярная проекция; 3, 4 — боковая проекция; а-а — общая длина зерна; б-б — ширина тела; б'-б' — высота тела; а-а — ширина воздушного мешка (диаметр); г-г — высота воздушного мешка; д-д — ширина (толщина) экзины тела — высота гребня; е-е — расстояние между мешками в месте их крепления к телу

Разумеется, измерения имеют значение только в случае, если пыльцевое зерно не деформировано, не смято и не разорвано. Замеры производились при строго полярном или строго боковом положении зерна, в зависимости от того, какие элементы его требовалось измерить (см. фиг. 17). Так как описание пыльцы велось по глицериновым препаратам, т. е. в жидкой среде, то можно было расположить пыльцевые зерна в нужном положении при помощи легкого постукивания карандашом или препаровальной иглой по поверхности покровного стекла.

Все описанные в настоящей работе пыльцевые зерна Podocarpaceae не имели ясно выраженной зародышевой борозды.

По форме и очертанию все выделенные нами виды родов *Podocarpus* и *Dacrydium* можно разбить на следующие группы (фиг. 18):

1. Пыльцевые зерна с округло-ромбоидальным очертанием тела в полярной проекции, с двумя воздушными мешками, прикрепленными к телу широкими основаниями на его брюшной части. Границы прикрепления мешков к телу проецируются либо в виде двух параллельных линий, либо в виде двух кривых, составляющих дуги эллипса.



Фиг. 18. Схема очертания различных видов пыльцевых зерен сем. Podocarpaceae (роды *Podocarpus* и *Dacrydium*).

1, 2 — пыльцевые зерна с округлым телом ромбоидального очертания и с двумя воздушными мешками, прикрепленными широкими основаниями (полярная проекция); 3, 4, 5 — пыльцевые зерна с округлым телом и ромбовидным очертанием в полярной проекции, с двумя воздушными мешками, диаметр которых превышает высоту тела; мешки прикреплены узкими основаниями; 6 — пыльцевое зерно с округлым телом и тремя воздушными мешками (полярная проекция); 7 — пыльцевое зерно с правильно эллипсоидальным телом и двумя воздушными мешками, диаметр которых меньше высоты тела (боковая проекция); 8 — то же в полярной проекции.

Высота тела и диаметр мешков приблизительно равны. В полярной проекции (когда пыльцевое зерно обращено к наблюдателю спинной или брюшной стороной<sup>1</sup>) линии очертания тела и мешков не образуют угла (фиг. 18, 1, 2). Размер пыльцевых зерен этого типа от 50 до 80  $\mu$ . Пыльцевые зерна имеют сходство с пылью современного вида *Podocarpus Selowii* Klotzsch.

2. Пыльцевые зерна с округлым телом, несколько сдавленным по оси, перпендикулярной к полярной, и с ромбовидным очертанием в боковой

<sup>1</sup> Брюшная сторона, по Вудхаузу, наружная; по Козо-Полянскому, — дистальная (внешняя) по отношению к положению микроспоры в тетраде. Спинная сторона, по Вудхаузу, внутренняя, по Козо-Полянскому, — проксимальная (внутренняя) по отношению к положению микроспоры в тетраде.



проекции. Воздушных мешков два, диаметр их значительно превышает высоту тела. Мешки прикрепляются суженными основаниями к боковым частям тела и сильно сдвинуты один к другому. Внутренняя линия прикрепления воздушных мешков на брюшной части тела проецируется в виде двух параллельных прямых. Внешняя линия очертания воздушных мешков образует с линией очертания тела значительный угол, приближающийся к прямому. Сетка на мешках четкая и крупная. Поверхность тела мелкобугорчатая или неравномерно крупнобугорчатая. В некоторых случаях поверхность мешков собрана в радиально расположенные складки, отходящие от места прикрепления мешков. Величина (общая длина) пыльцевых зерен в зависимости от их видовой принадлежности варьирует от 50 до 150  $\mu$ . Пыльцевые зерна этого типа имеют сходство с пылью *Podocarpus Nageia* R. В г., но в большинстве случаев значительно крупнее их (фиг. 18, 3, 4, 5).

3. Пыльцевые зерна с округлым телом и с тремя воздушными мешками, прикрепленными с брюшной поверхности тела. Величина мешков равна или несколько превышает величину тела. Очертание тела — почти правильная округлость, очертания воздушных мешков также округлы. Сетка на мешках мелкая (4—5  $\mu$ ), поверхность спинной части тела неравномерно бугорчатая. Размеры тела 45—47  $\mu$  (см. фиг. 18, 6). К этому типу зерен относится *Podocarpus dacrydioides*, описанный Эрдтманом по коллекционным материалам из Новой Зеландии (Erdtman, 1943, табл. XXV, фиг. 429).

4. Пыльцевые зерна с правильно эллипсоидальным телом. Мешки прикреплены суженным основанием к боковым частям тела и сильно сдвинуты к брюшной части его. В полярной проекции прекрасно видна внутренняя граница прикрепления воздушных мешков, которая проецируется в виде двух параллельных линий, близко расположенных одна к другой.

Диаметр мешков несколько превышает высоту тела. Основными морфологическими признаками пыльцы этого типа являются крупная сетка мешков и сборчатая складчатость их экины. Складки расположены радиально. Кроме того, этот тип зерен выделяется своей четкой и рельефной скульптурой экины тела, которая представляет собой морщиноподобные выросты на его поверхности. Скульптура тела обуславливает его волнистый контур. Величина пыльцевых зерен от 40 до 80 или до 90  $\mu$ . Схематически зерна изображены на фиг. 18, 7 и 8.

У мелких зерен этого типа мешки значительно меньшего размера, чем тело. Камеры мешков не целиком заполнены воздухом и несколько обвисают, собираясь в складки и морщины. В проекции воздушные мешки кажутся свисающими в виде бахромы, обычно прозрачной и слабо окрашенной. К этому типу зерен относится пыльца современного рода *Dacrydium* S o l a n d.

Сетчатая структура экины мешков, проецирующаяся на их поверхность в виде более или менее четкого сетчатого рисунка, не отражается на строении поверхности их, так как представляет собой шнуровидные утолщения экины на внутренней стороне (Монозон-Смолина, 1949).

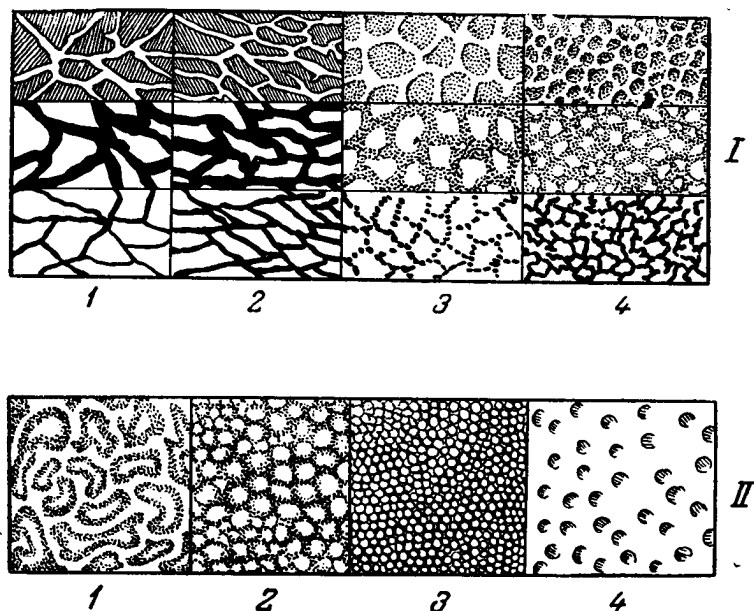
Воздушным мешкам пыльцы *Podocarpaceae* присуща сетка двух типов: четкая, крупная, обычно с продольно вытянутыми ячейками (фиг. 19, 1, 2); менее четкая, часто трудно уловимая, с ячейками различной конфигурации (фиг. 19, 1, 3, 4).

Кроме того, при описании пыльцевых зерен иногда встречаются промежуточные и комбинированные типы сеток.

Скульптура поверхности тела пыльцы хвойных с воздушными мешками обуславливается характером строения одного или двух верхних слоев экины, облегающей его. Тело пыльцы *Podocarpaceae* обычно покрыто двумя слоями экины, несколько более толстой на спинной поверхности и более тонкой на брюшной стороне. Характер складок экины, смятий,

бугорчатости или ямчатости является также диагностическим признаком при определении видов пыльцы и всегда выдерживается одинаково у представителей одних и тех же видов.

Пыльца *Podocarpaceae*, встречаемая мною в меловых, палеогеновых и неогеновых отложениях Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья, не отличается большим многообразием. Скульптура ее поверхности в основном может быть трех типов: мраморовидно-складчатая (фиг. 19, II, 1), бугорчатая (фиг. 19, II, 2, 3), мелкоямчатая (фиг. 19, II, 4).



Фиг. 19. Строение различных типов сетки воздушных мешков и скульптур поверхности тела пыльцы ископаемых видов сем. *Podocarpaceae*.

I — строение сетки воздушных мешков; 1 — сетка четкая с неравными, беспорядочно распределенными или продольно вытянутыми ячейками различной величины и различных очертаний; 2 — сетка четкая с неравными, обычно крупными ячейками, вытянутыми продольно от линии прикрепления мешков к их периферии; 3 — сетка крупная, более или менее четкая, или прерывистая, с толстыми, кажущимися рельефными тяжами. Очертание ячеек неправильно-округлое; 4 — сетка мелкая, прерывистая, с неправильными и разнообразными очертаниями ячеек, часто неуловимыми из-за того, что тяжи, составляющие сетку, прерываются. II — скульптура поверхности тела: 1 — мраморовидно-складчатая; 2 — бугорчатая; 3 — мелкобугорчатая; 4 — мелкоямчатая.

В общем можно прийти к выводу, что среди всего разнообразия форм ископаемой пыльцы сем. *Podocarpaceae*, относимой в основном к родам *Podocarpus* и *Dacrydium*, выделяются следующие характерные особенности, позволяющие одновременно отличать ее от пыльцы сем. *Pinaceae*:

- 1) диаметр воздушных мешков обычно превосходит высоту тела; исключением является род *Dacrydium*, пыльца которого не имеет аналогов среди сем. *Pinaceae*;
- 2) мешки сильно сдвинуты к брюшной стороне тела;
- 3) мешки в большинстве случаев несколько собраны в складки, радиально расходящиеся от центра к периферии;
- 4) линии прикрепления мешков четко выражены на брюшной стороне зерна, тесно сдвинуты и представляют собой две параллельные линии или овал с вытянутыми вершинами;

5) сетка мешков четкая, крупная и проицирующаяся в виде двойных линий, с ячейками, обычно вытянутыми продольно, или нечеткая, прерывистая и мелкая;

6) скульптура экзины тела мраморовидно-складчатая, или неравномерно бугорчатая, или мелкоямчатая.

### Род *Podocarpus* L. Herit.— Ногоплодник

Пыльцевые зерна относятся по морфологическим признакам к третьей группе (фиг. 16, *III*). Тело округло-ромбоидальное, мешки крупные, плотно надвинутые на тело с брюшной стороны, прикреплены к телу широкими или узкими основаниями. Внутренние границы прикрепления воздушных мешков близко сходятся и проицируются в виде двух параллельных прямых. Экзина тела бугорчатая, сетка на мешках четкая, с продольно вытянутыми ячейками.

Ископаемая пыльца Podocarpaceae (род *Podocarpus*) выделена С. Н. Наумовой (1939) в отдельную подгруппу *Platysaccus* из группы хвойных с воздушными мешками — *Saccata*.

### *Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen)

Табл. II, рис. 1  
Препараты № 186  $\frac{H}{K}$  и 170  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, скв. 1, 2; слюдистые глины с растительными остатками подглауконитовой свиты, верхний мел (препарат № 186  $\frac{H}{K}$ ).

Длина зерна 50—70  $\mu$ , высота тела около 35  $\mu$ , ширина воздушных мешков 32—36  $\mu$ , высота мешков около 35  $\mu$ .

Тело округло-ромбоидальное, очертание в боковой проекции — ромбическое. Мешки прикреплены к брюшной поверхности зерна, плотно охватывают поверхность тела широкими основаниями. Линии прикрепления воздушных мешков на брюшной стороне, при полярном положении, проицируются в виде двух четких параллельных линий с небольшим промежутком между ними.

Экзина тела двуслойная, тонкая, оба слоя на спинной и боковых сторонах зерна одинаковой толщины. Граница между нижним и верхним слоем экзины просматривается с большим трудом. На некоторых экземплярах наружный слой экзины, более толстый на спинной части тела и более тонкий на брюшной и боковых сторонах его, постепенно переходит в экзину мешков. Поверхность бугорчатая, из плотно расположенных бугорков. Контур тела слегка волнистый. Сетка на мешках четкая, крупно-продольно-ячеистая.

Пыльцевое зерно по морфологическим признакам довольно близко к *Podocarpus Sellowii* Klotzsch., приведенному в работе В. В. Зауер (1950), но не имеет четко выраженного щита. У пыльцы *Podocarpus sellowiformis* выделить границы щита не удалось.

По общим морфологическим признакам пыльца *Podocarpus sellowiformis* несколько приближается к форме, описанной Н. А. Болховитиной как *Podocarpus gracilentia* из комплекса спор и пыльцы верхне- и среднемиловых отложений Казахстана и Центральной Сибири (1953, стр. 77, табл. XI, фиг. 15).

От пыльцы сем. Pinaceae описанный вид отличается ромбовидным очертанием тела в боковой проекции, плотной насадкой воздушных мешков на тело зерна и отсутствием четкой границы между утолщенным слоем экзины спинной части зерна и более тонкой на боковых и брюшных сторонах его.

В тех же отложениях встречается пыльца того же вида, но значительно худшей сохранности (табл. II, рис. 2; препараты № 170 и 186).

Границы прикрепления воздушных мешков у этой формы проецируются прямыми параллельными линиями, расстояние между которыми достигает 12  $\mu$ .

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Северный Казахстан, мел — палеоген — олигоцен; Северное Приаралье, нижний палеоген.

В настоящее время растения из сем. Podocarpaceae приурочены к тропическим и субтропическим зонам Америки, Африки и Австралии.

*Podocarpus andiniformis* sp. nov. (pollen)

Табл. II, рис. 3—7

Препараты № 170  $\frac{H}{K}$ , 161  $\frac{H}{K}$ , 364  $\frac{3}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, скв. 1, 2; слюдистые глины датского (?) яруса верхнего мела (препарат № 170  $\frac{H}{K}$ ).

Пыльца имеет близкое сходство со следующими формами, известными по литературным данным:

- 1934<sub>2</sub>. *Pinus edulis* Potonie. Zur Mikrobotanik der Kohlen und ihrer Verwandten, zur Morphologie der fossilen Pollen und Sporen, Taf. 2, Fig. 4.
- 1935. *Pinus haploxyton* — Typ. Rudolph. Mikrofloristische Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen, Taf. IV, Fig. 1, 2.
- 1940. *Pinus haploxyton* — Typ. Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung. Schrift..., Taf. IV, Fig. 11; Taf. VII, Fig. 2.
- 1949<sub>1</sub>. *Pollenites* cf. *alabus* Rob. Potonie—Thiergart. Der Stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. II, Fig. 20, 22.
- 1949. *Pinus Haploxyton* — Typ. Rudolph Thiergart. Там же, табл. III, фиг. 17, 18, 41.
- 1950. Coniferpollen verschiedener Arten von Podocarpaceen — Typ. Reissinger. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, Taf. XV, Fig. 12.
- 1950. Podocarpaceenpollen Reissinger. Там же, табл. XVIII, фиг. 38.
- 1950. Cf. *Podocarpus* sp. Kirchheimer. Mikrofossilien aus Salzablarungen des Tertiärs, Taf. XX.
- 1953. *Podocarpus cretaceae* Наумова, Болховитина. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, табл. XI, фиг. 10, стр. 76.
- 1953<sub>1</sub>. *Pinus*, подрод *Haploxyton*. Заключинская. Материалы к истории флоры и растительности палеогена Северного Казахстана в районе Павлодарского Прииртышья, табл. V, рис. 20.

Длина зерна около 73  $\mu$ ; высота тела 45—48  $\mu$ , ширина тела равна его высоте; ширина воздушных мешков около 50  $\mu$ , высота — 35—38  $\mu$ ; расстояние между линиями прикрепления мешков 6—9  $\mu$ .

Тело сфероидальное, очертание в боковой проекции несколько угловатое — приближается к ромбу. Общая толщина экзины около 4  $\mu$ . Экзина тела двуслойная; слои, как правило, равной толщины, но на некоторых экземплярах внешний слой несколько тоньше внутреннего. На спинной и боковых сторонах общая толщина оболочки несколько больше, чем на брюшной. Шит неясно выражен. Поверхность тела неравномерно бугорчатая, скульптура шита трудно различима, на брюшной стороне поверхность мелко- и редкобугорчатая, бугорчатость проецируется (при высоком положении тубуса) в виде мелко- и редкоточечного рисунка.

Форма мешков приближается к сфероидальной. У большинства экземпляров мешки несколько сдавлены по высоте и оттянуты по направлению от брюшной поверхности. Мешки прикреплены или широким, или несколько суженным основанием. Граница прикрепления мешков в полярной проекции (мешками кверху) четко выделяется в виде двух параллельных

линий или правильного овала. Сетка на периферийных поверхностях мешков крупная, четкая и у некоторых экземпляров состоит из двойных линий, рельефно выделяясь при обычном увеличении. Форма ячеек сетки округло-прямоугольная. Величина ячеек резко уменьшается к внутренней поверхности мешков и становится мелкой, до точечной, в месте прикрепления мешков к телу.

По морфологическим признакам (форма, размеры, характер сетки мешков и пр.) описанный вид чрезвычайно близок к пыльце *Podocarpus spicata* (*Podocarpus andinus*) Р о е р р, изученной по гербарному материалу Эрдтманом (Erdtman, 1943, табл. 25, фиг. 430). Величина пыльцы современного вида *Podocarpus andinus* варьирует в пределах от 56 до 70  $\mu$ , причем крупные зерна встречаются чаще, чем мелкие.

От *Podocarpus* aff. *Sellowii* зерно *Podocarpus andinus* отличается большей округлостью мешков, наличием более ясной сетки на них и более частой встречаемостью зерен с мешками, прикрепленными к телу несколько суженным основанием.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Podocarpus andiniformis* (или морфологически подобная ей) отмечена различными авторами в отложениях среднего и верхнего мела Западной Европы (Германии, Дании), Сибири, Казахстана, а также в третичных отложениях (от эоцена до нижних горизонтов миоцена включительно) в Казахстане, на Южном Урале, в Башкирии, в Приаралье, в Эмбенском районе, на Северном Кавказе, в Среднем и Нижнем Поволжье, на Нижнем Дону и в Прикаспии. В Прииртышье отмечена автором в чеганских глинах (нижний олигоцен) и в палеоцен-эоценовых отложениях. В последнее время пыльца, подобная описанной выше, встречена в верхнемеловых отложениях Приднепровья.

Родина *Podocarpus andinus* Р о е р р. [*P. spicata* Р о е р р., *Nageia andinus*, *Podocarpus valdiviana* (Nelson) Senilis] — Чилийские Анды. Растение является одним из наиболее устойчивых видов из семейства ногоплодниковых.

***Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen)**

Табл. II, рис. 8—11

Препарат № 191

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1; чеганские глины с зубами акул (нижний олигоцен).

Пыльца морфологически близка к следующим формам, известным по литературным данным:

- 1939. Класс *Aporosa*, группа *Saccata*, подгруппа *Platysaccus* Н а у м о в а. Споры и пыльца углей СССР, стр. 355.
- 1940. Cf. *Podocarpus* Thiergart. Die Micropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Schrift..., Taf. IV, Fig. 9.
- 1943. *Pollenites macroalatus* Stockmans. Les lignites inéniens de Mol (Belgique), tab. 2, fig. 11.
- 1949. Cf. *Podocarpus* Thiergart. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. IV—V, Fig. 40.
- 1950. Coniferpollen verschiedener Arten von Podocarpaceen.—Typ Reissinger. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, Taf. XV, Fig. 11.
- 1950. *Podocarpus* sp. З а у е р. Морфологическое описание пыльцы Gymnospermae. В кн. «Пыльцевой анализ», табл. II, фиг. 15 и 16.
- 1953<sub>2</sub>. *Podocarpus* З а к л и н с к а я. Описание некоторых видов пыльцы и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронежской области, стр. 104, табл. I, фиг. 4.
- 1953. *Podocarpus kainarensis* Болховитина. (*Platysaccus kainarensis* Болховитиной). Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 76, табл. XI, фиг. 13.

Общая длина зерна 75—82  $\mu$ , средняя — 80  $\mu$ ; ширина — 35  $\mu$ ; ширина воздушных мешков (около 38  $\mu$ ) равна его высоте. Встречаются мелкие

экземпляры, размеры которых близки к размерам пыльцы современного вида *Podocarpus Nageia* R. В г.

Тело зерна округло-ромбоидальное. На спинной и боковых частях экзина двуслойная, а на брюшной — однослойная. Экзина на спинной стороне образует утолщение, подобное щиту у пыльцы *Pinassea*. Внешний слой экзины значительно тоньше внутреннего и не имеет структуры. Внутренний слой экзины имеет складчато-столбчатую структуру, которая выражается на спинной и боковой поверхностях тела в виде бугристости. На границе, которую можно мысленно провести между спинной и брюшной поверхностями тела, внешний слой экзины прекращается, образуя едва заметный узкий шнуровидный валик, различимый только в боковой проекции. Внутренний слой экзины к этой границе несколько утоняется и теряет структурность.

Воздушные мешки имеют сфероидальную форму. Диаметр (ширина) мешков превышает диаметр (ширину и высоту) тела. К телу мешки прикреплены сильно суженными основаниями и значительно сдвинуты к брюшной стороне тела. Внутренняя граница прикрепления мешков с брюшной стороны проецируется в виде двух параллельных или слегка изогнутых в форме овала линий, расстояние между которыми равно 5—15  $\mu$ .

Сетка на воздушных мешках мелкая и у большинства экземпляров четкая, с округлыми ячейками, величина которых не превышает 3,2  $\mu$ . Тяжи сетки тонкие и ровные, и при высоком поднятии тубуса микроскопа, при обычном увеличении, кажутся темными (см. табл. II, рис. 11). Ячейки сетки по всей поверхности мешков равновелики и уменьшаются только в области прикрепления мешков к телу.

Угол в месте пересечения контура мешков и тела приближается к прямому. У некоторых экземпляров мешки несколько вытянуты по длине, но можно допустить, что это результат деформации при изготовлении препарата (погружение в глицерин-желатиновую среду).

При любом положении зерна, в полярной или боковой проекции, контуры тела ясно просвечивают сквозь нежную и прозрачную ткань воздушных мешков.

У некоторых экземпляров пыльцевых зерен экзина на спинной поверхности несколько сминается в продольные складки. У некоторых экземпляров такие же складки образуются и на брюшной части. Последнее обуславливает более темную окраску вдоль длинной оси тела.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца типа *Podocarpus nageiaformis* имеет довольно широкое распространение как по вертикали (от верхней юры до сармата), так и в широтном направлении. В литературе пыльца *Podocarpus* под различными названиями (см. синонимику) упоминается в верхней юре Башкирского Приуралья, в меловых отложениях Сибирской платформы, Казахстана и Западной Европы, в палеоцене Среднего Поволжья, эоцене и олигоцене Дальнего Востока (Эльген), Казахстана, Прикаспия, Приаралья, Урала, среднего и нижнего течения Волги, нижнего Дона, Приазовья, Северного Казахстана, Западной Украины и Западной Европы, в сарматских отложениях низовьев Днепра, Северного Кавказа и Западного Прикаспия.

Такое широкое распространение и устойчивость описанной формы позволяют полагать, что растение, продуцировавшее эту пыльцу, обладало широким ареалом и широкой экологической амплитудой. Возможно, это растение входило в состав полихронных флор А. Н. Криштофовича (1946), которые особенно долго существовали на обширных пространствах материковой суши с конца мезозоя. Впоследствии, как полагал А. Н. Криштофович, такие полихронные флоры конца мезозоя положили начало со-

временной растительности земного шара (в различных его ботанико-географических провинциях.)

Современное распространение *Podocarpus Nageia* R. Br. (*P. Nagei* Pilg.) ограничено горными районами Южной Японии и Южного Китая. Устойчивость против низких температур у *P. Nageia* несколько ниже, чем у *P. andinus* Poer., что и обуславливает его узкий современный ареал.

***Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. (pollen)**

Табл. II., рис. 12—15

Препарат № 255  $\frac{3}{K}$

**Г о л о т и п:** Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, лигнитонные глины второй свиты континентальных отложений олигоцена (средний олигоцен).

Пыльца *Podocarpites kasakhstanica* sp. nov. относится к типу зерен сем. Podocarpaceae с резко ограниченным телом и мешками, превышающими своими размерами величину тела (фиг. 18, 3, 4, 5). Подобные формы пыльцевых зерен, но не тождественные им, отмечались в значительно более древних отложениях, чем третичные.

Рейссингер (Reissinger, 1950) описывает форму, близкую к нашей, под названием «Pollen Podocarpaceen — Typus (Reissinger)».

С. Н. Наумова (1939) пыльцу, подобную *Podocarpites kasakhstanica*, в числе прочих Podocarpaceae относит к группе *Saccata*.

В. С. Малявкиной описана и изображена пыльца значительно более крупных размеров, но по формам тела и воздушных мешков имеющая большое сходство с пыльцой *Podocarpites kasakhstanica*. Форму эту по морфологической номенклатуре В. С. Малявкина назвала *Dipterella tricocca* cf. *typica* (1949, табл. 3, фиг. 7).

Однако, как это будет видно из приводимого ниже описания, выделенный нами вид из третичных отложений обладает достаточно характерными морфологическими особенностями, чтобы отнести его к роду *Podocarpus*.

Общая длина зерна 125—128  $\mu$ ; ширина тела, около 67  $\mu$ , равна его высоте; высота воздушных мешков около 70  $\mu$ , ширина — около 80  $\mu$ .

Форма тела близка к сфероидальной. Очертание в полярной проекции ромбоидально-округлое.

Экзина, покрывающая тело, двуслойная; у большинства зерен двуслойность экзины просматривается слабо. Структура экзины столбчатая, что обуславливает наличие поперечной штриховатости спинной области и бугорчатую поверхность зерна. На спинной поверхности зерна экзина толще, чем на брюшной. Границы щита не удалось обнаружить, так как пыльцевые зерна в большинстве случаев ложатся в полярной проекции. Наличие же и границы щита, если он действительно ясно выражен, обычно просматриваются лишь при боковом положении зерна.

Воздушные мешки почти правильно сфероидальные. Ширина их превышает ширину тела. Мешки прикреплены к телу суженным основанием и сдвинуты на его брюшную сторону. Границы прикрепления мешков к телу с брюшной стороны проецируются в виде двух дугообразных линий, наибольшее расстояние между которыми достигает 15  $\mu$ . У большинства зерен концы этих линий сходятся и тогда внутренняя линия границ прикрепления воздушных мешков проецируется в виде овала.

Сетка на воздушных мешках мелкая, прерывистая, неясная. Ячейки сетки заметно мельчают в месте прикрепления мешков на брюшную сторону. На спинной поверхности, ближе к месту прикрепления мешков.

сетка имеет такой же мелкий, неясный рисунок, как и вся поверхность мешков.

Линии очертания воздушных мешков и тела при пересечении образуют угол, близкий к прямому. Контуры тела — неровные, иногда фестончатые, прекрасно просматриваются сквозь прозрачную ткань воздушных мешков.

Пыльца *Podocarpites kasakhstanica* в составе олигоценового комплекса встречена автором впервые. Все формы, перечисленные выше в числе морфологически близких, относятся к формам, выделенным из более древних отложений.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: как упоминалось выше, пыльца, весьма близкая по морфологическим признакам к описанному виду, отмечена еще в спорово-пыльцевых спектрах юрского и мелового комплексов Сибири, Казахстана и Урала. В Павлодарском Прииртышье известны единичные находки в верхнем мелу, эоцене и нижнем олигоцене. В Северном Приаралье основные находки приурочены к среднему олигоцену. Распространение пыльцы *Podocarpites kasakhstanica* в третичных отложениях прослеживается впервые. Можно полагать, что производившее пыльцу растение, было в палеогене одной из реликтовых флор мезозоя.

*Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 1—4

Препарат № 255  $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, обн. 6, песчано-глинистые отложения четвертой свиты континентального олигоцена (верхний олигоцен).

Общая длина зерна 112—120  $\mu$ ; ширина тела 65—75  $\mu$ , высота тела около 80  $\mu$ , ширина воздушных мешков около 85  $\mu$ , высота 65—70  $\mu$ .

Тело сфероидальное, округлое в очертании. Экзина тела толстая, значительно толще экзины мешков; двуслойность экзины при увеличении в 400 раз трудно различима. На спинной части тела экзина имеет столбчатую структуру, что обуславливает ее поперечную штриховатость. На спинной же части тела структурные элементы выделяются в виде тесно расположенных бугорков с вдавленными вершинками, вследствие чего поверхность зерна имеет мелкоямчатую скульптуру.

На брюшной стороне поверхность тела почти гладкая или плоскобугорчатая, что различимо лишь на тех препаратах, у которых воздушные мешки не близко сдвинуты к центру.

Воздушные мешки почти правильно сфероидальные. Сетка на мешках четкая, двойная. Крупная основная сетка хорошо выступает в виде рельефных тяжей с угловатыми ячейками; промежуточная сетка мелкая, с неравномерными ячейками. В местах прикрепления мешков к телу сетка становится мельче.

Расстояние между местами прикрепления мешков на брюшной стороне не более 3—5  $\mu$ ; чаще мешки смыкаются. Границы прикрепления мешков в полярной проекции обычно проецируются в виде двух параллельных прямых или слегка расходящихся линий.

По форме и очертанию тела пыльца *Podocarpites gigantea* очень близка к *P. kasakhstanica*. Отличиями первого вида являются: более правильное очертание, более толстая экзина, яснее выраженная скульптура поверхности тела, более четко выраженная сетка на мешках, которая у *P. gigantea* всегда имеет двойной рисунок.

Наличием двойной сетки, размером и формой тела *P. gigantea* очень похожа на пыльцу современного рода *Abies* H i l l., но отличается от по-



следнего отсутствием гребня и правильным округлым очертанием воздушных мешков; у пыльцы *Abies* Н i II. мешки несколько вытянуты по высоте, а тело снабжено широким, ясно выраженным гребнем с мелкофестончатым контуром.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: Павлодарское Прииртышье, нижние горизонты палеогена — олигоцен. Северное Приаралье, эоцен — олигоцен. Основная масса находок связана с отложениями эоцена и нижнего олигоцена.

*Podocarpus* aff. *dacrydioides* A. Rich.

Табл. III, рис. 7

Препарат № 331  $\frac{3}{K}$

Пыльцевое зерно, в отличие от предыдущих видов, имеет три воздушных мешка. Общий диаметр зерна, включая тело и мешки, при строго полярной проекции 80—85  $\mu$ , диаметр тела около 45  $\mu$ , ширина воздушных мешков 30—40  $\mu$ , высота около 30  $\mu$ .

Сетка на воздушных мешках мелкая, с толстыми тяжами; ячейки сетки радиально вытянуты. Поверхность тела мелкобугорчатая, на спинной стороне смята в произвольные складки.

Пыльца описанной формы почти тождественна пыльце современного вида *Podocarpus dacrydioides* A. Rich., описанного Эрдтманом (1943, табл. XXV, фиг. 429).

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, р. Кара-Су, континентальные отложения среднего олигоцена.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Podocarpus* aff. *dacrydioides* отмечена в верхнеюрских отложениях близ г. Тюмени и в палеогеновых отложениях юга Европейской части СССР (единичные находки), в олигоценых спектрах Павлодарского Прииртышья встречена впервые.

Род *Dacrydium* Soland.—Дакридиум

Пыльца *Dacrydium* Soland. относится к типу пыльцевых зерен (фиг. 18, 7, 8), для которых характерны мелкие размеры (до 50  $\mu$ ) и особое строение воздушных мешков: мелких и не вздутых, а морщинистых и сбранных в складки.

*Dacrydium elatumiformis* sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 8—12

Препараты № 170  $\frac{H}{K}$  и 186  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слюдистые глины датского (?) яруса (препарат № 170  $\frac{H}{K}$ ).

Длина зерна около 50  $\mu$ , ширина около 35  $\mu$ , высота около 35  $\mu$ ; ширина мешков около 30  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, в боковой проекции — овального очертания. Экзина тела тонкая, однослойная, с зернистой структурой. Поверхность тела на спинной стороне мелко- и редкобугорчатая. Воздушные мешки небольших размеров, округлые, несколько сплюснутые и чаще всего, из-за смятия, имеют неправильные очертания; прикрепляются они к телу суженным основанием и сильно сдвинуты на брюшную сторону. Граница между мешками и телом не всегда ясно выражена. Экзина между мешками

на брюшной стороне часто бывает смята в продольные складки. Контур тела и воздушных мешков неровный.

Пыльца *Dacrydium elatumiformis* имеет большое сходство с пылью современного вида *D. elatum* Wall., описанного В. В. Зауер (1950) и Эрдтманом (1943), отличаясь от нее лишь более четко выраженными воздушными мешками. Форма мешков у современного вида *D. elatum* несколько напоминает форму мешков пыльцы *Cedrus*. В то же время пыльца *D. elatumiformis* имеет некоторое сходство с пылью современного вида *D. Francini*, отличаясь от него менее четкой границей прикрепления воздушных мешков и значительно более тонкой экзиной тела.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: пыльца *Dacrydium* отмечалась в третичных и меловых отложениях СССР в виде единичных находок. Автором найдена в верхнемеловых и палеогеновых отложениях Северного Казахстана, в палеогене Северного Кавказа (фораминиферовые слои) и в палеоцене средней Волги.

Современное распространение рода *Dacrydium* — о-в Тасмания, тропики Австралии, Новой Зеландии. Типичное хвойное горных районов влажной субтропической зоны.

#### СЕМ. ARAUCARIACEAE — АРАУКАРИЕВЫЕ

Семейство Araucariaceae — древнейшее из класса голосеменных и имеет, по-видимому, южное происхождение. Растительные остатки *Araucarites* отмечаются еще с нижнего карбона.

С. Н. Наумовой (1939, табл. I) пыльцевые зерна, подобные *Araucaria*, были выделены в особую группу под рубрикой: «пыльца из группы *Infriata*, подгруппа *Psophosphaera*».

Остатки *Araucaria* встречены и в пермских отложениях, но наибольшего распространения это семейство достигло в триасе. В юре и в мелу находки разнообразных видов Araucariaceae известны в Сибири и Казахстане. В третичных отложениях сохранились, по-видимому, только два рода Araucariaceae, с небольшим количеством видов. Отдельные находки отпечатков *Araucaria* отмечались для палеоцена и олигоцена Украины.

В настоящее время араукариевые имеют ограниченное распространение в Австралии, Южной Америке, на островах Полинезии и в Новой Гвинее. Здесь они составляют светлые тропические леса паркового типа, без густого подлеска. В основном все представители этого семейства имеют ксерофильный облик (в особенности это относится к роду *Araucaria* Juss.) и обладают кроной с вечнозеленой листвой.

Пыльца растений сем. Araucariaceae встречена автором в меловых и нижнетретичных отложениях Казахстана и Приаралья. Пыльцевые зерна Araucariaceae относятся к типу одноклеточных, сферидальных, лишенных воздушных мешков, однобороздных с двуслойной скульптурной экзиной.

В палеогеновых отложениях изучаемого района выделяются два вида пыльцы Araucariaceae, по морфологическим признакам близкие к пыльце рода *Araucaria* Juss. и *Agathis* Salisb.

#### *Araucaria elegans* sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 13

Препараты № 193  $\frac{H}{K}$ , 165  $\frac{H}{K}$  и 182  $\frac{H}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 2, опоковые глины среднего — верхнего эоцена (препарат № 182  $\frac{H}{K}$ ).

Формы, морфологически близкие, известные по литературным данным:

1953. *Araucaria incisa* Б о л х о в и т и н а. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 67, табл. X, фиг. 24—26.

Пыльцевое зерно сфероидальное, округлое в очертании, одноборозд-ное. Диаметр зерна от 46 до 60  $\mu$ , средний — около 50  $\mu$ .

Зародышевая борозда меридиональная, не доходит до полюсов. Поверхность борозды гладкая, затянутая тонкой бороздной мембраной. Экзина образует ластообразный выступ над одним из краев борозды. Если пыльцевое зерно расположено кверху бороздой, то ластовидный выступ экзины проицируется в виде кольцеобразного утолщения — валика. Экзина двуслойная, тонкая. Внутренний слой экзины толще внешнего и структура его неясна; внешний слой — тонкий с мелко- или крупномоччатой структурой. В проекции стенки ямок (лакун) выступают по краю зерна в виде шиповатых выростов, что придает контуру зерна ложношиповатый вид.

Описываемая пыльца по морфологическим признакам сходна с пыльцой современного вида *Araucaria brasiliana* A. R i c h., но несколько меньше ее по размерам (Зауер, 1950).

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: в ископаемом состоянии встречается очень редко, возможно вследствие плохой сохранности. (В литературе присутствие пыльцы *Araucaria* в спорово-пыльцевых спектрах палеогена отмечается очень редко.) Автором *Araucaria* найдена в отложениях бурой свиты (верхний эоцен), в глинах верхнего майкопа (средний олигоцен) Северного Кавказа; в опоковидных глинах (эоцен) и в отложениях нижнего олигоцена Северного Казахстана.

В настоящее время род *Araucaria* распространен в Южной Америке, Австралии и на архипелагах южной части Тихого океана. *A. brasiliana* A. R i c h. — светолюбивое ксерофитное растение, образует в южной умеренной зоне светлые леса со слабо выраженным подлеском (чаще всего *Ilex*). В Чили араукария распространена совместно с *Podocarpus*, *Libocedrus*, *Saxegothaea*.

#### *Agathis ovataeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. III, рис. 14

Препарат № 2  $\frac{3я}{К}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, г. Тас-Аран, тасаранская свита, средний эоцен.

Пыльцевое зерно сфероидальное, в очертании — правильная окружность. Диаметр зерна около 35  $\mu$ . Зародышевая борозда — меридиональная, расположена далеко от полюсов. Экзина двуслойная; внутренний слой ее более толстый, чем внешний. Поверхность зерна мелкобугорчатая. Бугорчатые выросты представляют собой правильные полушария, расположенные плотно одно к другому, что придает контуру зерна правильно-фестончатые очертания. Высота бугорков 0,5—0,8  $\mu$ . Рисунок на поверхности зерна крупносетчатый. Экзина образует ластообразный выступ по одному из краев борозды. Если зерно расположено бороздой вверх, то ластообразный выступ проицируется в виде дугобразного утолщения. Если же зерно лежит не бороздой кверху, а в любом другом положении, то борозда часто не видна за ластообразным выростом экзины.

С пыльцой современной *Agathis ovata* W a r b. ископаемый вид почти тождествен; лишь в единичных случаях встречаются расхождения в величине зерна.

От пыльцы *Araucaria* J u s s. описанный вид отличается меньшим размером, более толстой экзиной, наличием бугорчатых выростов и более четко выраженной бороздой.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Agathis* (*Dammara*) отмечена в юрских отложениях средней полосы СССР, в палеоцен-эоцене юга Европейской части СССР, в эоцене и олигоцене Павлодарского Прииртышья, в отложениях среднего и верхнего эоцена и нижнего олигоцена Северного Приаралья и в бурой свите Северного Кавказа. Также отмечено присутствие ее в виде единичных зерен в бучакских слоях (палеоцен-эоцен?) нижнего Дона.

#### СЕМ. PINACEAE — СОСНОВЫЕ

Третичные отложения (в особенности это относится к верхним отделам палеогена и к неогену) чрезвычайно богаты пыльцой растений из сем. Ринасеев. В отличие от юрских и меловых хвойных, большинство родов, а в ряде случаев и видов их имеет весьма близкое родство с современными представителями флоры южных широт. Сем. Ринасеев в третичных отложениях Северного Казахстана и Приаралья представлено шестью родами (*Keteleeria*, *Abies*, *Tsuga*, *Picea*, *Pinus* и *Cedrus*), которые, в свою очередь, представлены большим числом видов. Род *Pinus* в кайнозой насчитывает до десяти видов. Как упоминалось ранее, голосеменные в настоящее время занимают весьма скромное место во флоре изучаемой территории. Сем. Ринасеев, например, представлено всего двумя видами *Pinus*, одним видом *Picea*, одним видом *Larix* и двумя видами *Abies*. При этом основная масса видов приурочена к горным местообитаниям. Лишь один вид — *Pinus silvestris* L. — обитает на северной окраине Казахстана, в равнинной его части.

Ринасеев на территории Казахстана и в Приаралье особенно разнообразно были представлены в середине олигоцена, что, возможно, объясняется возобновлением общей аридизации климата, которая несколько приостановилась в начале олигоцена, и в связи с оживлением тектонических явлений. Ассоциации, в которых сочетались различные виды сосен, развились, по-видимому, на участках суши с высокими отметками; в это же время влажные широколиственные леса заняли пониженные участки.

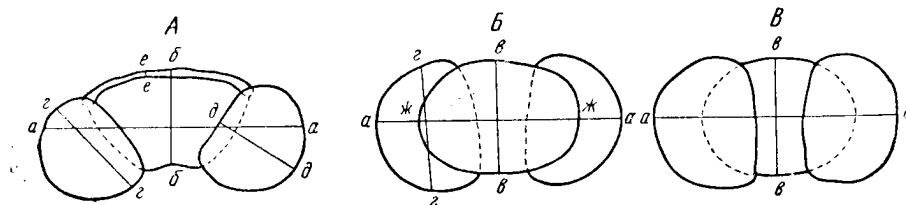
Если проследить последовательную эволюцию голосеменных на территории Казахстана, то станет очевидным, что сем. Ринасеев представляет особый интерес и для стратиграфических построений и для палеофитологических целей. К тому же пыльца Ринасеев в достаточной мере обладает характерными признаками для ее распознавания. Поэтому морфологии пыльцы современных и ископаемых растений Ринасеев посвящено немало трудов, из которых следует отметить работы М. Х. Монозон-Смолиной (1949), В. В. Зауер (1950, 1954), Н. А. Болховитиной (1952, 1953) и И. С. Штэпа (1954).

Пыльца всех родов и видов сем. Ринасеев, за исключением *Larix* и *Tsuga*, состоит из центрального тела и двух воздушных мешков. Эта особенность сближает пыльцу большинства видов Ринасеев с пыльцой Родограеев.

Пыльца Ринасеев, имеющая воздушные мешки (кроме *Cedrus*), обладает некоторыми общими характерными особенностями. В большинстве случаев эта пыльца имеет достаточно хорошо выраженную зародышевую борозду на брюшной (дистальной) стороне тела и утолщенный слой экзины, образующий так называемый «щит» на спинной (проксимальной) стороне. Воздушные мешки представляют собой разрастание экзины в виде полых камер, обычно формы, близкой к сфероидальной. Расположены воздушные мешки в большинстве случаев по бокам тела.

Пыльца *Cedrus* не имеет резко отграниченного щита. Утолщенный слой экзины на спинной поверхности тела обычно непосредственно, без резких границ, переходит в ткань воздушных мешков, которые образованы не внутренним слоем экзины, а внешним. Воздушные мешки *Cedrus* не являются обособленными образованиями на теле пыльцевого зерна, а составляют с ним как бы единое целое.

При определении пыльцы Pinaceae, снабженной воздушными мешками, за основные диагностические признаки принимались: 1) общие размеры зерна и размеры его отдельных частей (центрального тела, воздушных мешков); 2) форма и очертание зерна и форма и очертание основных частей его; 3) структурные особенности отдельных частей зерна.



Фиг. 20. Основные элементы измерения пыльцевых зерен Pinaceae, имеющих воздушные мешки.

A — боковая проекция; Б — полярная проекция при положении телом вверх; В — полярная проекция при положении телом вниз; а—а— общая длина пыльцевого зерна; б—б— высота тела; в — в — ширина тела; г—г— ширина мешков; д—д— высота мешков; е—е— высота гребня; ж—ж— длина тела

Так как форма и размеры отдельных частей пыльцевого зерна могут меняться в зависимости от его положения, то при определении ископаемых пыльнок хвойных все измерения и наблюдения производились либо в строго полярном положении зерна, либо в строго боковом. Направления, по которым велись основные измерения при определении видов, схематически изображены на фиг. 20<sup>1</sup>.

Измерения велись при положении пыльцы в боковой проекции (А), в полярной проекции, спинкой вверх (Б), и в полярной же проекции — воздушными мешками вверх (В). К сожалению, не всегда удавалось одно и то же зерно замерить во всех трех позициях; в этих случаях замеры производились по нескольким зернам и затем брались крайние отклонения и средняя величина для каждого элемента замеров.

Почти для всех родов, пыльца которых снабжена воздушными мешками, удалось установить ряд таких устойчивых величин (размеров) отдельных элементов, которые могли быть приняты за диагностические эталоны. К сожалению, для пыльцы *Keteleeria*, из-за ее редкой встречаемости, устойчивого эталона размеров не выведено. Поэтому определения пыльцы *Keteleeria* велись по тем диагностическим признакам, которые даны в ключе В. В. Зауер (Пыльцевой анализ, 1950).



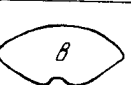
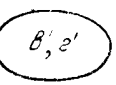



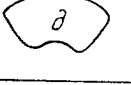

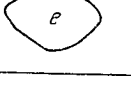
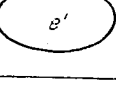
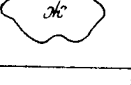
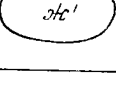

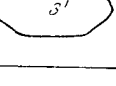
Весь комплекс диагностических признаков для определения видов и родов пыльцы хвойных с воздушными мешками, выделенных из кайнозойских отложений, сводится к следующим элементам:

1. Форма тела и его очертание (второе является функцией первого). Основные формы тела можно характеризовать как сфероидальные и эллипсоидальные; отклонения определяются рисунком очертаний тела в полярной или в боковой проекциях (фиг. 21).

<sup>1</sup> При микрофотографировании, которое делается с постоянных препаратов, не всегда удается найти пыльцевое зерно, расположенное в строго полярном или строго боковом положении, и поэтому размеры их на снимках могут несколько уклоняться от тех, которые указаны на основании измерений пыльцевого зерна в подвижной среде.

Сфероидальное тело может иметь следующие очертания:  
 а) округлое в полярной и боковой проекциях (*Pinus ponderosa*);  
 б) ромбовидно-округлое — в полярной проекции, трапециевидно-округлое — в боковой (*Pinus Gerardiana*).

Эллипсоидальное тело может иметь следующие очертания:  
 а) эллиптическое в полярной проекции (*Pinus taeda* L.);  
 б) угловато-эллиптическое в боковой проекции (*Cedrus pusilla* Zaue'r);  
 в) эллиптическое в полярной проекции и трапециевидное в боковой (*Abies Hill.*);

I. Сфероидальная форма тела		II. Эллипсоидальная форма тела	
Проекция:		Проекция:	
полярная	боковая	боковая	полярная:
			
			
			
			
			
			

Фиг. 21. Схематическое изображение очертания тела пыльца с воздушными мешками у различных видов сосен

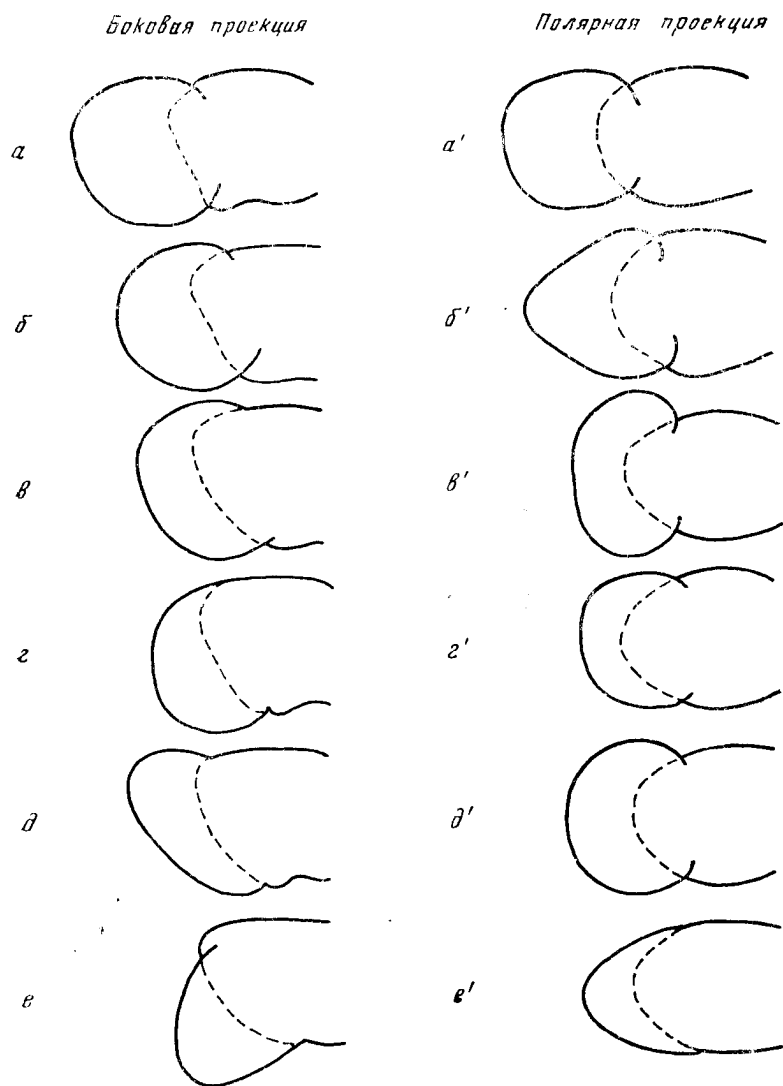
а—а'—окружность в боковой и полярной проекциях; б—трапециевидно-округлые очертания в боковой проекции; б'—ромбовидно-округлые очертания в полярной проекции; в—г—эллиптическое очертание в полярной проекции; в—г—угловато-эллиптическое очертание в боковой проекции; д—трапециевидное очертание в боковой проекции и д'—эллиптическое очертание в полярной проекции; е—треугольное очертание в боковой проекции и е'—эллиптическое очертание в полярной проекции; ж—трапециевидно-округлое очертание в боковой проекции и ж'—эллиптическое очертание в полярной проекции; з—трапециевидное очертание в боковой проекции и з'—угловато-овальное очертание в полярной проекции

г) эллиптическое в полярной проекции и треугольное в боковой (*Cedrus longisaccata* Z a k l.);

д) эллиптическое в полярной проекции и трапециевидно-округлое в боковой (*Pinus silvestris* L.);

е) угловато-овальное в полярной проекции и трапециевидное в боковой (*Pinus секции Australes* L o u d.).

2. Форма воздушных мешков и их очертания. Форма воздушных мешков в основном близка к сфероидальной, но, в зависимости от принадлежности к тому или иному роду или виду, конфигурация их несколько отклоняется от этой формы, что нередко определяется способом прикрепления мешков к телу зерна. Можно выделить следующие основные формы мешков (фиг. 22):



Фиг. 22. Схематическое изображение очертаний воздушных мешков и различных типов их прикрепления к телу.

$a-a'$ —сфероидальные;  $b-b'$ —угловато-сфероидальные;  $e-e'$ —эллипсоидальные;  $z-z'$  и  $d-d'$ —полусфероидальные;  $e-e'$ —конусообразные

а) сфероидальные, прикрепленные к телу несколько суженными основаниями (мешки значительно больше полусферы); в боковой и полярной проекциях — почти правильная окружность (фиг. 22,  $a, a'$ );

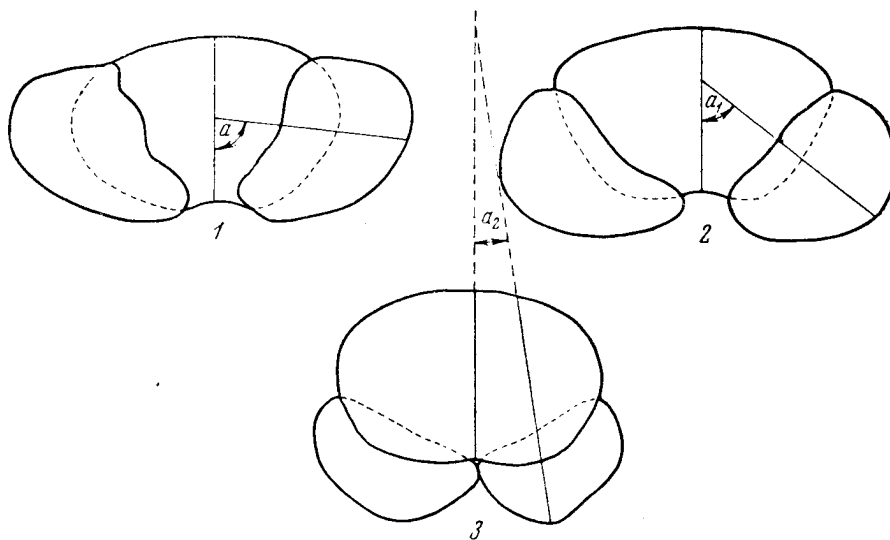
б) угловато-сфероидальные, прикрепленные к телу суженными основаниями; очертание в полярной проекции почти треугольное, в боковой проекции — окружность (фиг. 22,  $b, b'$ );

в) эллипсоидальные, прикрепленные к телу суженным основанием; очертание в полярной проекции — правильный овал, в боковой — полуокружность (фиг. 22,  $\epsilon$ ,  $\epsilon'_1$ );

г) полусфероидальные, прикрепленные к телу широким основанием; очертание в полярной проекции — почти правильная полуокружность; в боковой проекции — полуокружность или полуовал (фиг. 22,  $\zeta$ ,  $\zeta'$ ,  $\theta$ ,  $\theta'$ );

д) конусообразные, прикрепленные к телу широким основанием; в боковой и полярной проекциях — треугольные очертания (фиг. 22,  $e$ ,  $e'$ ).

3. П р и к р е п л е н и е в о з д у ш н ы х м е ш к о в к т е л у. Воздушные мешки, образованные внутренним или внешним слоем экзины, отходят от тела у пыльцы различных родов или видов в различных ме-



Фиг. 23. Схема прикрепления воздушных мешков:

- 1 — воздушные мешки прикреплены к боковым сторонам тела, угол  $a$  близок к прямому;
- 2 — мешки несколько сдвинуты к брюшной стороне тела, угол  $a_1$  меньше прямого;
- 3 — мешки прикреплены к брюшной стороне тела, угол  $a_2$  небольшой, острый

стах. В зависимости от этого ось мешков (высота их) находится в различных соотношениях с осью симметрии тела (высотой его). Если мешки отходят от боковых сторон зерна, то линия высоты мешка образует внутренний угол с высотой тела, близкий к прямому (фиг. 23, 1,  $a$ ).

Если мешки несколько сдвинуты к брюшной стороне, то внутренний угол между высотой мешков и высотой тела будет меньше прямого (фиг. 23, 2,  $a_1$ ).

И, наконец, если мешки прикреплены к брюшной стороне зерна, то угол между высотой тела и высотой мешка будет острый, небольшой ( $15-20^\circ$ ); чем теснее будут сдвинуты к брюшной стороне мешки, тем меньше будет угол (фиг. 23, 3,  $a_2$ ). Точка пересечения высот мешков и высоты тела в этом случае находится вне зерна.

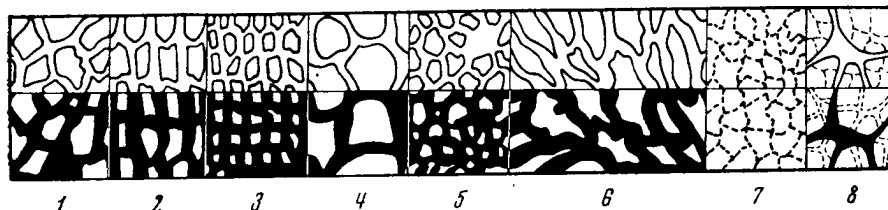
4. С т р у к т у р а э к з и н ы м е ш к о в. Экзина воздушных мешков пыльцы *Pinassea* обладает сетчатой структурой, весьма схожей с *Podocetraceae*. Сетка мешков вырисовывается на их поверхности в виде более или менее четкого рисунка (фиг. 24). Рисунок сетки может быть ясным или неясным. Среди ясно выраженной, четкой сетчатости можно выделить:

- а) неравномерную сетку (фиг. 24, 1);
- б) равномерно-прямоугольную сетку с крупными или мелкими ячейками (фиг. 24, 2, 3);



в) округлоячеистую с крупными или мелкими ячейками (фиг. 24, 4, 5);  
г) неравномернойячеистую с крупными или мелкими вытянутыми ячейками (фиг. 24, 6).

К неясно выраженной можно отнести одинарную или комбинированную сетчатость — крупная сетка налегает на мелкую (фиг. 24, 7, 8).

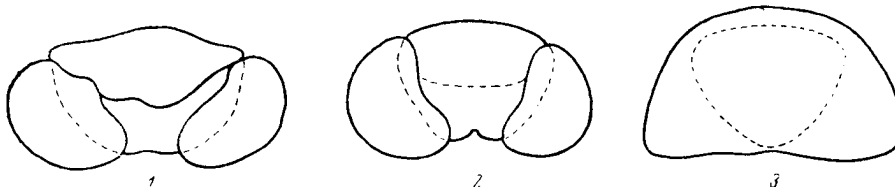


Фиг. 24. Схема различных типов сетки воздушных мешков у пыльцы сем. Pinaceae.

1 — сетка четкая, неравномернойячеистая; 2 — то же, равномернойячеистая, с крупными ячейками; 3 — то же с мелкими ячейками; 4 — сетка четкая, округло-ячеистая, с крупными ячейками; 5 — то же с мелкими ячейками; 6 — сетка четкая, неравномернойячеистая с вытянутыми ячейками; 7 — сетка неясно выраженная, прерывистая, одинарная; 8 — сетка неясно выраженная, комбинированная

Обычно величина ячеек сетки крупнее на периферийных частях воздушных мешков и мельче на участках, близких к границе с телом.

5. Структура и скульптура экзины тела. У большинства пыльцевых зерен Pinaceae с воздушными мешками поверхность тела на спинной и брюшной части не одинакова. Зависит это от того, что



Фиг. 25. Схематическое изображение различных видов пыльцы сем. Pinaceae (боковая проекция).

1 — пыльцевые зерна, тело которых снабжено ясно выраженным щитом; 2, 3 — пыльцевые зерна, границы щита которых выражены неясно

экзина неравномерно отслаивается от тела, имеет неодинаковую толщину на различных участках его и снабжена неодинаковыми скульптурными выростами. Брюшная поверхность тела имеет тонкую однослойную экзину (гладкую или снабженную мелкими, неравномерно разбросанными выростами, бугорками, извилистыми складками, ямками).

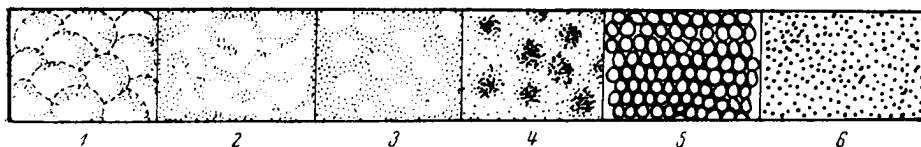
На спинной поверхности тела экзина двуслойная, структурная и имеет скульптурные выросты. Это так называемый щит. Одни ископаемые виды и роды имеют ясно выраженный щит (фиг. 25, 1), у других границы щита менее резко выражены или совпадают с границей прикрепления мешков, или перекрывают ее (фиг. 25, 2, 3). В частности, у пыльцы *Cedrus* ясно выраженной границы щита нет и утолщенная экзина спинной поверхности тела непосредственно переходит на мешки, являясь их оболочкой.

Щит у пыльцы Pinaceae может иметь резкие границы, с небольшим валиком по краю (род *Abies*), или границы без валика (*Pinus silvestris*). По своему строению двуслойный щит может иметь слои равной или неравной толщины.

В зависимости от ясности структуры или от наличия скульптурных выростов на поверхности экзины, поверхность щита бывает:

а) крупнобугорчатая, бугорчатость неравномерная или равномерная (фиг. 26, 1);

- б) мелкобугорчатая, бугорчатость равномерная или неравномерная (фиг. 26, 3, 4);  
 в) мраморовидно-складчатая (фиг. 26, 2);  
 г) крупно- или мелкоямчатая (фиг. 26, 5);  
 д) неясно- или ясноточечная (фиг. 26, 6).



Фиг. 26. Скульптуры щитов пыльцы сем. Pinaceae.

1 — поверхность крупнобугорчатая; 2 — поверхность мраморовидно-складчатая; 3, 4 — поверхность мелкобугорчатая; 5 — поверхность мелкоямчатая; 6 — поверхность неясно- или ясноточечная

6. Контур тела. Утолщенный слой экзины на спинной части тела при боковом положении зерна проецируется в виде так называемого гребня. Ширина и контур гребня и контур тела зерна являются одним из диагностических признаков при определении и в значительной степени зависят от строения щита.



Фиг. 27. Типы очертания спинной части тела (контур гребня) пыльцы сем. Pinaceae:

1 — контур ровный; 2 — контур мелковолнистый; 3 — контур крупноволнистый; 4 — контур крупнозубчато-волнистый; 5 — контур неясно- или слабоволнистый

В зависимости от структуры экзины и скульптуры поверхности щита гребень имеет различный контур: он может быть ровный, или волнистый (мелко или крупно), или зубчатый (фиг. 27, 1—5).



Фиг. 28. Схематическое изображение различных пыльцевых зерен сем. Pinaceae со щитом.

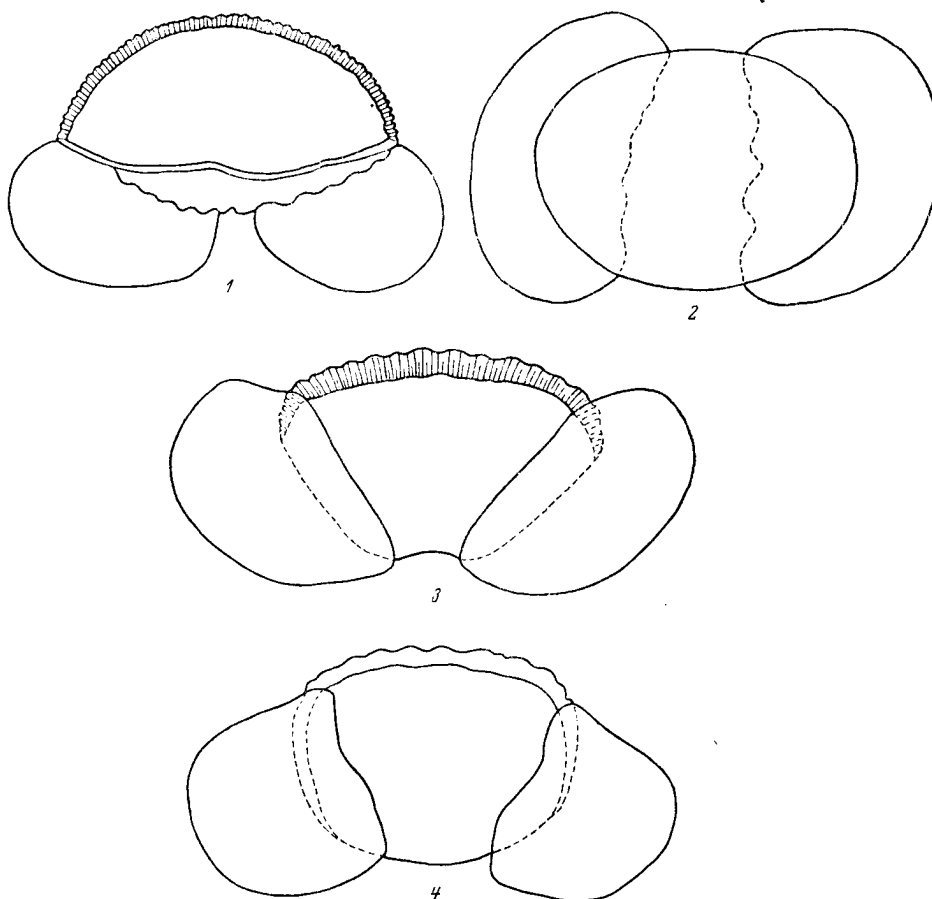
1 — контур тела ровный; 2 — контур тела волнистый только в области прикрепления воздушных мешков; 3 — контур тела волнистый

В зависимости от того, прерывается щит до места прикрепления мешков или, несколько утолщаясь, перекрывает границу прикрепления мешков к телу, контур тела в полярном и боковом положениях различен у разных видов. Например, если щит прекращается у линии прикрепления мешков, как у пыльцы *Pinus silvestris* или у большинства *Pinus* секции *Strobilus*, то тело имеет волнистый контур лишь на спинной части (лучше

всего это наблюдается при боковом положении зерна, но различимо и в полярной проекции). Если же щит простирается за границу прикрепления воздушных мешков, то в боковой проекции контур спинной части зерна изображается волнистой линией, а над мешками заметно утолщение. В полярной же проекции контур тела изображается волнистой линией и на спинной и на боковой частях (фиг. 28). Это часто наблюдается у пыльцевых зерен некоторых представителей *Pinus* секций *Strobus*, *Cembrae*, *Pseudostrobus*, *Paracembrae* и некоторых других.

### Род *Abies* Hill

В работе В. В. Зауер (1950) приведены достаточно четкие диагностические признаки, характеризующие пыльцу растений рода *Abies* и отличающие ее от пыльцы прочих родов сем. *Pinaceae*. Придерживаясь в основном



Фиг. 29. Схема строения пыльцы родов *Abies* и *Keteleeria*.

1, 2— *Abies sibirica* и *Keteleeria*; 3, 4— *Abies firma* (1, 3 и 4— боковая проекция, 2— полярная проекция)

этих данных, удалось выделить из общего комплекса пыльцы *Pinaceae* кайнозоя Приаралья и Казахстана два вида пыльцы *Abies*. Общие признаки обнаруженной нами ископаемой пыльцы *Abies* следующие.

Общая длина пыльцевых зерен колеблется от 105 до 200  $\mu$ , высота тела — от 55 до 95  $\mu$ , высота воздушных мешков — от 50 до 75  $\mu$ , ширина гребня — от 5 до 12  $\mu$ .

Форма тела эллипсоидальная, в очертании овальная в полярной проекции и округло-трапецевидная — в боковой. Борозда расположена на брюшной стороне тела.

Экзина тела двуслойная, со столбчатой структурой. Щит ясно выражен. На спинной части зерна экзина щита сильно утолщается и в боковой проекции изображается в виде широкого гребня. Очертание гребня крупно- или мелковолнистое. Поверхность щита мраморовидная, обусловленная шиуровидно-извилистой скульптурой. Поверхность брюшной части тела мелкобугорчатая. Структура экзины мешков четкая, крупно- или мелко-сетчатая.

Воздушные мешки сфероидальные, в очертании — почти правильная окружность. Мешки прикрепляются к телу суженным основанием, линия прикрепления четкая. Высота мешков всегда больше ширины их. В боковой проекции линия очертания тела и мешков образует угол, близкий к прямому.

Отличительными признаками, характеризующими пыльцу растений рода *Abies*, можно считать (фиг. 29):

- 1) наличие ясно выраженного щита и гребня на спинной части тела;
- 2) шаровидную форму воздушных мешков;
- 3) четкую границу прикрепления мешков к телу и наличие ясно выраженного угла между линиями контура тела и мешков;
- 4) величину пыльцевых зерен, обычно превышающую величину пыльцевых зерен *Picea*.

К сожалению, пыльца пихты ныне живущих видов описана весьма слабо, в литературе известны лишь описания пыльцы *Abies firma* Sieb. et Zucc. (Зауер, 1950), *A. sibirica* Ledeb. (Erdtman, 1943), *A. cephalonica* Loud., *A. pinsapo* Boiss., *A. concolor* Mill. (по зарисовкам автора). Поэтому для определения видов, выделенных из кайнозойских отложений Приаралья и Казахстана, имеется очень бедный сравнительный материал.

*Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen)

Табл. IV, рис. 1, 2

Препарат № 255  $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, глины с растительными остатками второй свиты континентального олигоцена (средний олигоцен).

Формы, морфологически близкие, известные по литературным данным:

1940. *Abies*. Thiergart. Die Micropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. I, Fig. 6, 8.

Общая длина зерна 112—122  $\mu$ ; длина тела 90—100  $\mu$ , высота 47—60  $\mu$ , высота воздушных мешков 47—50  $\mu$ , ширина 45—50  $\mu$ ; высота гребня 3,5—6  $\mu$ . Строение пыльцы — обычное для рода *Abies*.

По форме тела и очертаниям, а также по структуре щита и мешков ископаемая пыльца имеет большое сходство с пыльцой современного вида *Abies sibirica*. Небольшие расхождения отмечаются лишь в размерах пыльцевых зерен. По данным В. В. Зауер, пыльца *Abies sibirica* Ledeb. имеет высоту мешков 51—69  $\mu$ , у ископаемой формы высота мешков не превышает 54  $\mu$ , а в среднем составляет 50  $\mu$ .

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Abies sibiriciformis* под названием *Abies* sp. отмечена, судя по опубликованным иллюстрациям и спискам,

в пыльцевых спектрах плиоцена Западной Европы, Европейской части СССР, в третичных отложениях (преимущественно в миоценовых) Башкирии, Урала и в четвертичных отложениях севера Европейской части СССР, Зауралья, Сибири и на Дальнем Востоке. Кроме того, пыльца *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen) и *Abies* aff. *sibirica* неоднократно обнаруживалась в олигоценовых (преимущественно в средней части) отложениях Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья. Ископаемые остатки растений рода *Abies* sp. найдены еще в меловых отложениях Сибири и Урала, в палеоцене Поволжья, в олигоцене и эоцене Украины и в миоцене Европейской и Азиатской частей СССР.

Современное распространение *Abies sibirica* — северо-восток Европейской части СССР, Восточная Сибирь, Казахстан, Монголия, Тувинская автономная область. Дерево приурочено обычно к долинам рек, растет в смеси с елью. В горных районах поднимается до высоты 1200—2000 м над уровнем моря. Растение морозоустойчивое, выносит континентальный климат. Возможно, что заметное увеличение континентальности климата, похолодание и уменьшение общей влажности воздуха в связи с отступанием олигоценового моря и повлекло за собой распространение прародителя *Abies sibirica* на Казахстанском континенте.

***Abies protofirma* sp. nov. (pollen)**

Табл. IV, рис. 3

Препарат № 1  $\frac{3я}{К}$

**Г о л о т и п:** Северное Приаралье, г. Тас-Аран, тасаранская свита морского эоцена (средний эоцен).

Пыльца относится к типу зерен, изображенных на фиг. 29, 3, 4.

Общая длина зерна 112—120  $\mu$ ; длина тела 64  $\mu$ , высота 48—50  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 47—50  $\mu$ , высота 50—60  $\mu$ ; ширина гребня 6,4  $\mu$ .

Тело округло-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции — гексагональное. Экзина тела двуслойная; нижний слой тоньше, чем верхний. Структура экзины на спинной поверхности зерна — столбчатая. Экзина на спинной части тела сильно утолщена и образует щит с довольно ясными границами. В боковой проекции прекрасно выражен гребень с волнистым контуром. Поверхность тела на брюшной стороне неравномерно-мелкобугорчатая.

Мешки округло-овального очертания, вытянуты по высоте. В боковой проекции мешки имеют округло-трапециевидное очертание. Прикреплены мешки к телу чаще всего суженным основанием; линия очертания внешнего контура тела и мешков образует угол. Сетка на мешках комбинированная — в основном крупноячейчатая, с мелкими добавочными ячейками.

Ископаемая пыльца несколько напоминает пыльцу ныне живущей *Abies firma* Sieb. et Zucc., описанную автором из гербарного материала Сухумского ботанического сада (сборы Н. А. Болховитиной). Отличается от нее формой воздушных мешков; у современного вида мешки имеют более правильную сфероидальную форму.

**М е с т о н а х о ж д е н и е:** см. голотип.

**Р а с п р о с т р а н е н и е:** Павлодарское Прииртышье, нижнеолигоценовые отложения (чеганские глины); Северное Приаралье, отложения эоцена и нижнего олигоцена.

Родина современного вида *Abies firma* Sieb. et Zucc. — Центральная и Южная Япония. Распространена на южных островах, во влажных горных долинах, где растет совместно с *Chamaecyparis obtusa*, *Sciadopitys verticillata*, *Cryptomeria japonica*, *Torreya nucifera* и широколиственными породами.

### Род *Keteleeria* Carr. — Кетелеерия

Общий тип, форма и очертания пыльцы *Keteleeria* изображены на (фиг. 29, 1, 2.) В схеме, как видно из приведенных рисунков, пыльцевые зерна *Keteleeria* весьма близки к *Abies*.

Пыльца *Keteleeria* относится к типу зерен с двумя воздушными мешками, имеет сходство с пылью *Picea* и *Abies*. Некоторые признаки сходства и различия пыльцы этих родов указаны ниже.

Из литературы известно, что пыльца *Keteleeria* почти всегда встречается в виде единичных зерен. Кроме того, во многих случаях принадлежность ее к роду *Keteleeria* подвергается сомнению.

#### *Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. IV, рис. 4—6

Препарат № 198  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, вторая свита континентального олигоцена (средний олигоцен).

Общая длина зерна 140—160  $\mu$ ; длина тела 118  $\mu$ , высота тела около 80  $\mu$ ; ширина воздушных мешков около 70  $\mu$ , высота около 65  $\mu$ ; толщина гребня около 32  $\mu$ ; диаметр ячеек сетки на мешках 3—5  $\mu$ .

Тело округло-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции угловато-овальное. Экзина тела имеет столбчатую структуру. На спинной части тела экзина резко утолщается и образует щит, который проецируется в виде неширокого, но ясно выраженного гребня, покрытого поперечными штрихами.

Воздушные мешки имеют сетчатую экзину, сетка — округло-ячеистая, равномерна по всей поверхности мешков. Поверхность бугорчатая. Поверхность щита мелкобугорчатая, контур — мелковолнистый.

Пыльца *Keteleeria* имеет очень большое сходство с пылью *Abies* и отличается от нее лишь большей величиной зерна и наличием мелкобугорчатого (зернистого) рисунка на поверхности щита; у пыльцы *Abies* щит снабжен скульптурными шнуровидными выростами.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Keteleeria* aff. *Davidiana* В e i s s n. обнаружена в виде единичных зерен в общем комплексе пыльцы Pinaceae в Северном Казахстане, в спектрах чеганской, первой и второй свит (нижний и средний олигоцен) и в некоторых горизонтах четвертой свиты континентального олигоцена (верхний олигоцен). В Северном Приаралье вид единично встречается от эоцена до среднего олигоцена. Присутствие пыльцы *Keteleeria* отмечается в палеоценовых спектрах Западной Европы, в СССР, в неогене Азиатской части СССР, в верхнепалеоценовых горизонтах Приаралья.

Родина *Keteleeria Davidiana* В e i s s n. — Юго-Западный и Западный Китай. В настоящее время этот род включает всего два вида, обитающих в Юго-Западном Китае в составе хвойных лесов; иногда образует самостоятельные рощи. Растет на высоте от 300 до 1500 м над уровнем моря.

#### *Keteleeria* sp. [(K.) aff. *Davidiana* В e i s s n.)]

Табл. V, рис. 1

Препараты № 198  $\frac{H}{K}$  и 146  $\frac{H}{K}$

Размеры пыльцевого зерна — те же или несколько крупнее, чем у *Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen). Плохая сохранность и некоторые отличия в строении оболочек не позволяют провести полную анало-

гию с предыдущим видом. Отличается от пыльцы *Keteleeria* aff. *Davidiana* наличием толстого слоя эскины на воздушных мешках.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, глины с растительными остатками второй свиты континентального палеогена (средний олигоцен).

### Род *Picea* Dietr.— Ель

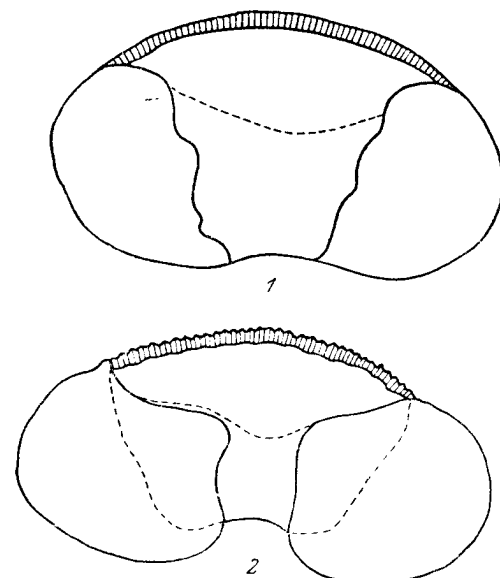
Пыльца *Picea* относится к типу пыльцевых зерен Pinaceae с воздушными мешками. Имея много общих морфологических признаков, объединяющих эту группу, пыльца *Picea* довольно четко отличается от пыльцы родов *Pinus*, *Abies*, *Keteleeria* и других присущими только этому роду признаками.

Пользуясь имеющимися в литературе данными по морфологии пыльцы ныне живущих видов *Picea* (Зауер, 1950; Гричук и др. in litt.) нам удалось выделить несколько видов ископаемой пыльцы *Picea*, принадлежащих к двум секциям.

Пыльца рода *Piceae* состоит из центральной части, или тела округло-эллипсоидальной формы, с овальным или трапецевидным очертанием в боковой проекции, и из двух воздушных мешков. Общие размеры зерна колеблются от 80 до 120  $\mu$ .

У пыльцы современной ели из секции *Euriceae* Willk m. очертание тела в боковой проекции овальное (фиг. 30, 1), у пыльцы же из секции *Omorica* Willk m. — трапецевидное (фиг. 30, 2). В полярной проекции очертание тела пыльцы всех видов обеих секций обычно овальное. Воздушные мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сдвинуты к его брюшной стороне.

У пыльцы обеих секций эскина тела образует ясно выраженный щит. Границы щита у пыльцы *Picea* секции *Euriceae* сглажены, а у щита пыльцы секции *Omorica* более четкие, причем на некоторых экземплярах удастся наблюдать нежные, едва заметные утолщения по его краю.



Фиг. 30. Схематическое изображение пыльцы рода *Picea*:

1—*Picea* секции *Euriceae* Willk m. (боковая проекция); 2—*Picea* секции *Omorica* Willk m. (боковая проекция)

Утолщение эскины на спинной части тела пыльцы обеих секций образует гребень, который более ярко выражен у пыльцы секции *Omorica*. Структура эскины щита у пыльцы обеих секций столбчато-зернистая. Поверхность щита мелкоямчатая, в отличие от мраморовидной у пыльцы *Abies*.

Воздушные мешки *Picea* имеют сетку, ячейки которой обычно мелкие и неясно выраженные; обычно ячейки сетки уменьшаются в размере при приближении к месту прикрепления мешков и переходят в точечный рисунок тела. Зародышевую борозду на ископаемых экземплярах наблюдать

приходится редко, так как выражена она нечетко. Характерным признаком пыльцы, относящейся к секции *Euricea*, является почти полное отсутствие угла между линией очертания тела и мешков. Поэтому пыльцевое зерно в боковой или полярной проекции имеет очертание, близкое к правильному овалу. У пыльцы же, принадлежащей к секции *Omorica*, линия прикрепления мешков выражена четко и линии внешнего очертания тела и мешков в боковой проекции образуют угол, вследствие чего пыльца *Picea* секции *Omorica* несколько напоминает пыльцу *Abies*.

С. П. Наумова (1939) пыльцу, подобную пыльце современных елей, относит, в числе прочих пыльцевых зерен хвойных с воздушными мешками, резко отделяющимся от тела, к классу *Aporosa* *Naum.*, группе *Saccata* *Naum.*, подгруппе *Oedemosaccus* *Naum.*

Ископаемые остатки рода *Picea* известны с мелового периода. В больших количествах пыльца встречается начиная от верхнеюрских отложений. В третичных отложениях пыльца рода *Picea* широко распространена и является обычным компонентом лесных комплексов.

#### *Picea* секции *Euricea* Willkm.

##### *Picea tasaranica* sp. nov. (pollen)

Табл. V, рис. 2, 3

Препарат № 1  $\frac{3\text{я}}{\text{К}}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, г. Тас-Аран, листоватые глины тасаранской свиты (средний эоцен).

Формы, имеющие некоторое сходство с описанной пыльцой, известные по литературным данным:

1949. *Pinojella sacculifera* М а л я в к и н а. Определитель спор и пыльцы. Юра — мел. Табл. 25, фиг. 4, 5.  
 1950. Coniferpollen dem *Picea* typus *Reissinger*. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit, Taf. V, Fig. 18.  
 1953. *Picea* секции *Euricea* З а к л и н с к а я. Описание некоторых видов пыльцы и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронежской области, стр. 67, табл. II, фиг. 16.

Перечисленные формы имеют некоторое сходство с пыльцой *Picea tasaranica* sp. nov. лишь по внешнему облику и по очертаниям зерна в боковой проекции, но в деталях они отличаются от *P. tasaranica*.

Пыльца *Picea tasaranica* имеет следующие измерения: общая длина зерна 92,8  $\mu$ ; высота тела около 45  $\mu$ , ширина около 60  $\mu$ ; ширина воздушных мешков от 45 до 48  $\mu$ , высота около 30  $\mu$ . Гребень неширокий.

Тело зерна — эллипсоидальной формы, с овальным очертанием в полярной проекции и трапециевидно-овальным в боковой. Борозда выражена слабо.

Воздушные мешки тесно посажены на боковые стороны тела, охватывая его большей своей частью с брюшной стороны. Граница прикрепления мешков неясная. Сетка на мешках мелкая и неясно выражена.

Щит на спинной поверхности зерна имеет четкую, но резкокую границу. Гребень узкий, поперечно исчерченный, сходящий на нет к месту прикрепления мешков. Поверхность щита мелкоточечная. Поверхность тела на брюшной стороне неясноточечная.

По внешнему облику и по основным морфологическим признакам, приведенным в описании, пыльца *Picea tasaranica* должна быть отнесена к секции *Euricea*. По общим очертаниям пыльца *Picea tasaranica* несколько напоминает *P. exelsa* *Lipson*, но отличается от нее по величине и форме воздушных мешков. У *P. tasaranica* мешки несколько вытянуты по вы-



соте и в боковой проекции имеют округло-конусовидное очертание, а у *P. excelsa* они уплощены.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: нижний и средний эоцен Приаралья. Пыльца, подобная *Picea tasaranica*, но иногда несколько больших размеров, отмечается в спектрах мел-палеоцена и единично в эоцене и нижнем олигоцене Павлодарского Прииртышья.

*Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. V, рис. 4

Препарат № 2  $\frac{3я}{К}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, г. Тас-Аран, тасаранская свита, листоватые глины, средний эоцен.

Общая длина зерна 115  $\mu$ ; высота тела около 55  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 60  $\mu$ , высота 45  $\mu$ ; высота гребня около 6  $\mu$ .

Форма зерна приближается к овалу, так как граница прикрепления мешков к телу сглажена. Мешки насажены по бокам тела пыльцевого зерна широкими основаниями; граница линии прикрепления мешков улавливается плохо.

На спинной части зерна эскина щита сильно утолщена и образует поперечно исчерченный гребень, который, утоняясь к месту прикрепления мешков, постепенно сходит на нет. При боковой проекции хорошо видна двуслойность эскины гребня. Верхний слой эскины тоньше нижнего, он постепенно переходит на поверхность мешков. Щит на спинной части зерна имеет неясную ямчатую структуру. Рисунок на поверхности щита неясный, иногда поверхность его кажется просто исчерченной, иногда удастся наблюдать мелкоямчатую скульптуру, но выражена она слабо.

Воздушные мешки снабжены мелкой сеткой, которая хорошо выражена на их боковых и брюшных поверхностях, но по мере приближения к границе прикрепления мешков к телу четкость рисунка сетки пропадает и постепенно переходит в мелкую исчерченность.

Пыльца *Picea schrenkianaeformis* по внешнему облику, величине, очертанию, характеру прикрепления мешков, по рисунку и ширине гребня и по форме и очертанию мешков очень близка к пыльце современной *Picea Schrenkiana* F. et M. Однако некоторые морфологические признаки обоих видов пыльцы остаются несходными. Например, щит пыльцы *Picea Schrenkiana* F. et M. имеет правильную мелкоямчатую скульптуру, а щит *P. schrenkianaeformis* sp. nov. — неясноямчатую скульптуру, переходящую в исчерченность. Граница прикрепления мешков у современной пыльцы выражена более четко, чем у ископаемого вида. Внутренний слой эскины гребня у *P. Schrenkiana* более толстый, чем внешний, а у *P. schrenkianaeformis* соотношения обратные. Все это заставляет отнестись осторожно к проведению полной аналогии между современной и ископаемой формами. Поэтому и видовое название формы, описанной как *Picea schrenkianaeformis*, указывает лишь на большое сходство ее с современной пыльцой *P. Schrenkiana*, но не на полное их тождество.

Из песчано-гравийного горизонта континентальных отложений четвертой свиты олигоцена Северного Прииртышья неоднократно была выделена пыльца ели, весьма близкая к *Picea schrenkianaeformis*, но значительно худшей сохранности, что вызвано, по-видимому, условиями захоронения (см. табл. V, рис. 5, описание препарата № 259  $\frac{Н}{К}$ ).

Общая длина зерна 110—120  $\mu$ ; высота тела 53—57  $\mu$ ; ширина мешков около 60  $\mu$ , высота — около 45  $\mu$ ; высота гребня около 5  $\mu$ .

Несмотря на плохую сохранность пыльцевых зерен, удалось установить, что ряд признаков сближает ископаемую пыльцу с *Picea Schrenkiana*. Например, высота гребня у ископаемой формы такая же, как и у современной; линия прикрепления воздушных мешков выражена яснее, чем у *Picea schrenkianaeformis* из эоценовых отложений, и сходна с линией прикрепления у *P. Schrenkiana*. На теле ископаемого зерна заметна мелкая точечность, подобная *P. Schrenkiana*. Скульптура щита неясно-мчатая. Границы щита более ясно выражены, чем у *P. schrenkianaeformis* из эоценовых отложений.

Таким образом, сходство этой пыльцы из континентальных отложений олигоцена с пыльцой *P. Schrenkiana* выражено у некоторых зерен даже более ясно, чем у *P. schrenkianaeformis* из эоценовых отложений.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца, подобная *Picea schrenkianaeformis*, известна из эоценовых отложений Поволжья, в виде единичной находки отмечена в эоценовых отложениях Северного Приаралья. В Павлодарском Прииртышье в основном приурочена к олигоценовым отложениям.

Родина *Picea Schrenkiana* — Джунгарский Ала-Тау, почти весь Тянь-Шань и Китайский Туркестан. Это типично горный вид, растущий на северных склонах горных ущелий совместно с *Abies sibirica*. По Ферганскому хребту *Picea Schrenkiana* образует густые насаждения в смеси с *Abies Semenovii*, *Acer turkestanica*, а на южной границе своего распространения встречается вместе с *Juglans regia*.

По данным Н. В. Павлова (1947), тяньшаньская ель (*P. Schrenkiana*) на территории Казахстана в настоящее время является исключительно горным видом. Возможно, что описанная ископаемая пыльца *P. schrenkianaeformis* — далекий предок современной *P. Schrenkiana*, пришедший с южных гор древней Азии.

#### Секция *Omerica* Willkm.

*Picea alata* sp. nov. (pollen) ex gr. *P. jezoensis* С а г г.

Табл. VI, рис. 1—5

Препарат № 255  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, глины с растительными остатками второй свиты континентальных отложений (средний олигоцен).

Общая длина зерна от 145 до 160  $\mu$ , высота около 65  $\mu$ ; высота воздушных мешков от 40 до 50  $\mu$ , ширина около 70  $\mu$ ; высота гребня 2—4  $\mu$ .

Форма тела эллипсоидальная, очертание в боковой проекции трапециевидное. Гребень широкий, с волнистым краем. Высота гребня по мере приближения к месту прикрепления воздушных мешков постепенно уменьшается, но в некоторых случаях остается неизменной.

Экзина тела двуслойная, внутренний слой тонкий, наружный — толстый и имеет столбчатую структуру в области щита. На спинной части тела экзина образует ясно выраженный щит. На некоторых экземплярах щит по краю имеет рубчик, но у большинства зерен этот рубчик незаметен. Поверхность щита мелкобугорчатая. Щит, как видно, далеко заходит на боковые и брюшную части тела и поэтому боковые его границы при полярном положении зерна хорошо просматриваются сквозь контур тела. Брюшная поверхность тела имеет неясно выраженную мелкобугорчатую скульптуру, которая при высоком положении тубуса микроскопа проецируется в виде редкой точечности. Воздушные мешки имеют сфероидальную форму

с полуокруглым очертанием в полярной и в боковой проекциях. Прикрепляются мешки к телу несколько суженными основаниями, вследствие чего контур тела и мешков образует угол. Этот признак сближает пыльцу *Picea alata* секции *Omorica* с пылью рода *Abies*. Прикреплены мешки к боковым сторонам тела и несколько сдвинуты к брюшной, линия прикрепления мешков на брюшной стороне неясная. У некоторых экземпляров мешки настолько сильно сдвинуты к брюшной стороне, что внутренние линии их прикрепления смыкаются.

Сетка на периферийных поверхностях мешков четкая и ясная; к брюшной и спинной поверхностям ячейки сетки сильно мельчают и переходят в мелкий извилистый рисунок, который сливается с рисунком поверхности тела.

По внешним признакам и по отдельным морфологическим особенностям пыльца *Picea alata* sp. nov., отнесенная нами к секции *Omorica*, имеет близкое сходство с современной пылью *P. jezoensis* S a r g., описанной В. П. Гричук с соавторами (in litt.), отличаясь от нее лишь менее высоким гребнем.

Место нахождения: см. голотип.

Распространение: пыльца, подобная *Picea alata*, отнесенная нами к секции *Omorica*, встречена в высоких горизонтах континентального олигоцена в Казахстане. Отмечена автором в олигоцене и миоцене Северного Казахстана, в эocene Поволжья и в олигоцене и эocene Приаралья, а также в миоценовых отложениях Украины.

В настоящее время *Picea jezoensis* S a r g. обитает в горах Дальнего Востока (Приморье), на Сахалине, на о-ве Иezo в Северной Корее, в Восточной Маньчжурии и на юге Якутии. *P. jezoensis* — горное дерево, которое доходит до верхней границы лесной полосы, но местами его можно встретить спускающимся близко к морю. Растет *P. jezoensis* вместе с сахалинской пихтой, каменной березкой и маньчжурским кедром. Южные варианты *P. jezoensis* на о-ве Иezo растут вместе с различными видами *Magnolia*, лианами и бамбуком.

Надо полагать, что пыльца *Picea* секции *Omorica*, выделенная из третичных отложений Казахстана, принадлежит растению, которое по своей экологии было наиболее близко к современному виду *Picea jezoensis*. Характерно, что появление и распространение пыли *P. alata* sp. nov. совпадает с почти полным исчезновением пыли болотного кинариса (*Taxodium*), что характеризует некоторое осушение климата. В то же время в спектрах отмечается обилие пыли *Pinus*, что, по-видимому, связано с тем же явлением.

### Род *Cedrus* L i n k. — Кедр

В начале 1954 г. вышла в свет монографическая работа В. В. Зауер, посвященная изучению ископаемой пыли *Cedrus* и ее значению для стратиграфии. В этой работе приведено описание пыли современных видов рода *Cedrus*, а также дано описание 21 вида ископаемой пыли. Ископаемые формы *Cedrus*, описанные В. В. Зауер, относятся в основном к меловым и третичным отложениям. Большую часть находок пыли *Cedrus* в третичных отложениях Казахстана В. В. Зауер относит к верхнему олигоцену (лигнитоносная свита восточного борта Тургайского прогиба). При этом автор отмечает, что в этих отложениях встречается в основном пыльца одного вида *Cedrus*, близкого по морфологическим признакам к пыли современного вида *C. deodara*. В миоценовых отложениях Казахстана автор отмечает находки *C. deodariformis*, также близкого к

современному виду *C. deodara*<sup>1</sup>. В более древних третичных отложениях (палеоцен — эоцен) Казахстана автор не отмечает находок пыльцы кедра и относит это за счет того, что отложения доолигоценового времени представлены морскими фациями.

На основании изученного материала по Павлодарскому Прииртышью и Северному Приаралью у нас создано иное представление о времени распространения рода *Cedrus* в палеогеновых флорах на территориях, примыкающих к палеогеновому морскому бассейну, в пределах современного Казахстана.

Пыльца рода *Cedrus* в третичных отложениях Казахстана встречается довольно часто, причем по количеству видов и по абсолютному содержанию наибольший удельный вес ее приходится на нижние горизонты палеогена (палеоцен — эоцен), а затем на более верхние его горизонты — средний олигоцен.

Виды пыльцы *Cedrus*, обнаруженные в эоценовых и палеоцен-эоценовых отложениях Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья, значительно отличаются от видов, выделенных из континентальных отложений олигоцена. Особенным разнообразием форм кедра отличаются спектры из тасаранской свиты Северного Приаралья (средний эоцен). Вторичный расцвет *Cedrus* в Казахстане связан со временем отложения первой и второй свит континентального олигоцена.

Для ископаемой пыльцы рода *Cedrus* в основном характерны те же признаки, которые присущи и пыльце современных видов (Зауер, 1954), но у ископаемых видов эти признаки более подчеркнуты и несколько усложнены в деталях.

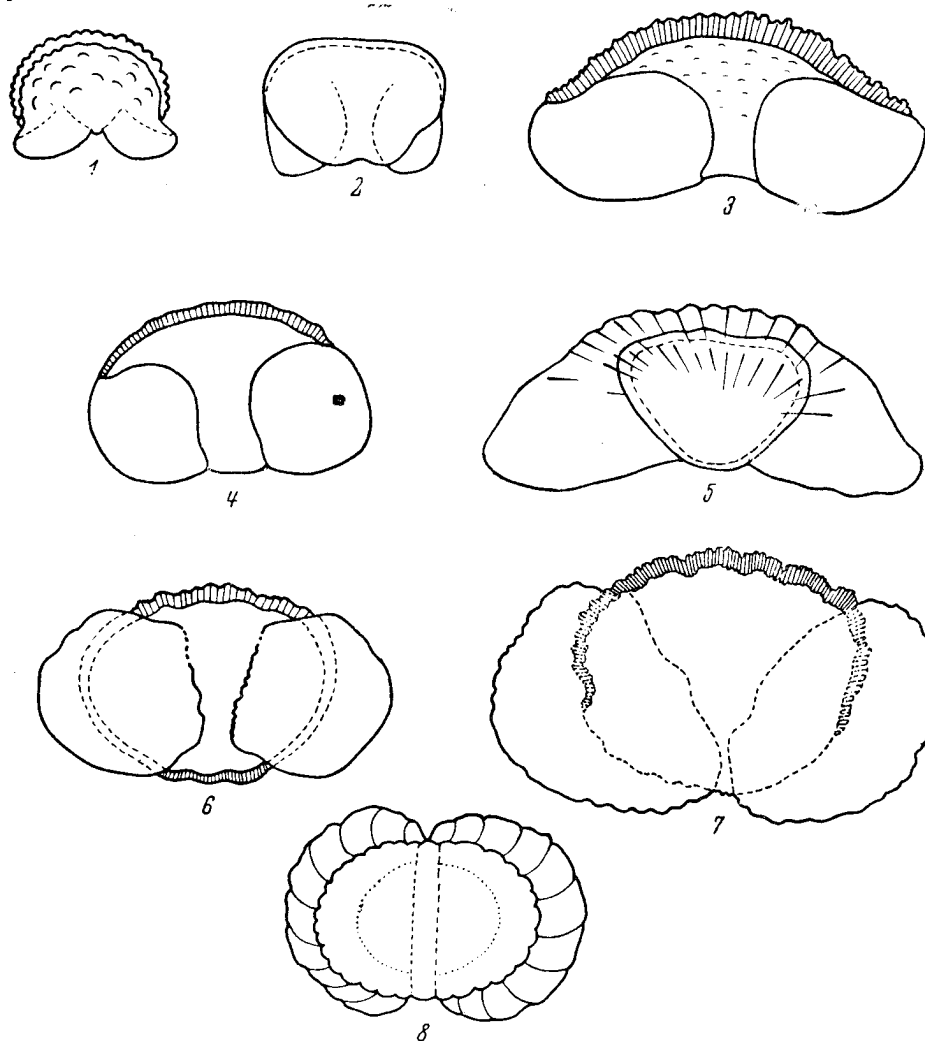
По основным чертам строения пыльца растений рода *Cedrus* близка к пыльце всех двухмешковых Pinaceae, в особенности к пыльце рода *Pinus*. Однако ряд совершенно специфических черт в строении пыльцы *Cedrus* все же позволяет четко выделить пыльцу всех видов рода *Cedrus* из общего комплекса двухмешковой пыльцы сем. Pinaceae. В общем, для пыльцы *Cedrus* характерны следующие признаки: тело эллипсоидальное с округло-треугольным, овальным или трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции (фиг. 31). Экзина тела двуслойная, наружный слой тоньше, чем внутренний. На спинной части зерна внутренний слой экзины сильно или незначительно (в зависимости от принадлежности к виду) утолщается, образуя гребень. На боковых частях зерна утолщение исчезает, а внешний слой экзины отслаивается в виде камер, исполняющих, по-видимому, функции воздушных мешков. Камеры сильно сдвинуты к брюшной части тела. Поверхность спинной части тела обычно крупнобугристая или складчатая, что обуславливает крупный мраморовидный рисунок и в большинстве случаев — неровный контур гребня. Последнее особенно хорошо заметно тогда, когда зерно расположено в боковой проекции.

Воздушные мешки, облеченные вместе с телом общим верхним слоем экзины, отходят от тела сильно расширенными основаниями и у большинства видов имеют округлые или овальные очертания. У некоторых видов *Cedrus* воздушные мешки несколько вытянуты по высоте и тогда в очертании они округло-треугольные. В том месте, где камера воздушных мешков отходит от тела, экзина в большинстве случаев собрана в складки, вследствие чего пыльцевые зерна некоторых видов *Cedrus* имеют неправильно-волнистый контур (фиг. 31, 6—8). В том случае, если складки экзины отсутствуют, контур и мешков и тела ровный (фиг. 31, 1—4).

<sup>1</sup> По данным Казахстанской экспедиции Академии наук СССР, лигнитоносная свита относится к среднему олигоцену. Соответственно миоценовые находки кедра следует относить к верхнему олигоцену.

Экзина тела и мешков обычно имеет сетчатую структуру. При этом неравномерный крупносетчатый рисунок мешков постепенно переходит в мелкочешуйчатую структуру тела.

В общем очертания пыльцевых зерен *Cedrus* несколько напоминают очертания пыльцы рода *Picea*. У пыльцевых зерен рода *Cedrus*, так же как и у рода *Picea*, отсутствует угол между линиями очертания тела и воздушных мешков.



Фиг. 31. Схема различных типов ископаемой пыльцы рода *Cedrus*.

(1, 2, 3, 4, 5, 7 — боковая проекция; 6 и 8 — полярная проекция)  
1, 2 — *Cedrus* типа *Saccata*; 3, 5 — *Cedrus* типа *C. atlantica* M a n e t t i; 4 — *Cedrus* типа *C. libani* L a w s.  
6, 7, 8 — *Cedrus* типа *C. deodara* L o u d.

Размеры пыльцевых зерен у *Cedrus* колеблются от 50 до 110  $\mu$  по большей оси; при этом число видов пыльцы мелких размеров значительно преобладает над числом крупных.

Основными диагностическими признаками пыльцы ископаемых растений рода *Cedrus*, отличающими ее от пыльцы прочих *Pinaceae*, принимали:

- 1) отсутствие резкой границы щита на брюшной поверхности тела;
- 2) наличие ярко выраженного гребня (при боковом положении зерна), широкого или узкого, в зависимости от принадлежности к виду;
- 3) отсутствие резкой границы между мешками и телом в связи с тем, что мешки являются непосредственным продолжением общего с телом слоя экзины.

В. В. Зауер (1954) дополняет эти признаки еще деталями строения сетчатой структуры воздушных мешков, которая, по наблюдениям этого автора, обычно крупно- или мелкоячеистая, налегающая одна на другую.

В палеогене Казахстана автору удалось выделить восемь различных видов пыльцы рода *Cedrus*, схематическое изображение типов которой помещено на фиг. 31.

Находки пыльцы *Cedrus* в палеогеновых отложениях представляют значительный интерес, так как макроскопические остатки растений этого рода в Азиатской части СССР еще не известны.

Основная масса видов, открытых по находкам пыльцы, приурочена к самым нижним отделам палеогена. Следует отметить, что из выделенных верхнемеловых и палеогеновых форм *Cedrus* лишь немногие могут быть отождествлены с современными видами. В большинстве выделенные формы относятся к вымершим видам. Хотя общий характер строения пыльцевых зерен *Cedrus* и близок к современным видам, в деталях наблюдаются большие расхождения.

Находки пыльцы *Cedrus* в Европе и в Америке известны еще с юрского периода. Наиболее широкого распространения этот род достиг в меловом периоде, особенно в верхних его отделах. В верхнемеловых отложениях восточного склона Среднего Урала, по данным В. В. Зауер, в некоторых горизонтах пыльца *Cedrus* преобладает над пыльцой *Pinus* и представлена там большим многообразием форм. В верхнем мелу Западного Казахстана и юга Европейской части СССР отмечены два вида и шесть разновидностей пыльцы *Cedrus*, так же как и в палеогене Северного Казахстана, принадлежащие к формам, сходным с современными видами *C. libani* и *C. deodara*.

В третичных отложениях Горьковской обл., Средней Волги, Нижнего Дона, Прикаспия, Северного Кавказа, Северного Казахстана, Среднего Урала и Башкирии пыльца *Cedrus* встречается в палеоцен-эоцене и единично — в нижнем и среднем олигоцене.

По-видимому, в верхних горизонтах олигоцена род *Cedrus* уже прекратил свое существование на равнинах Евразии в связи с общим осушением климата и отступил в горные районы, защищенные от сильных ветров. Как известно, почти все современные виды кедров очень чувствительны к изменению почвенных и климатических условий. Возможно, что и более древние представители этого рода были также требовательны к природным условиям и поэтому усиление континентальности климата в Казахстане привело к вымиранию многих видов, к сокращению их ареалов и к отступанию оставшихся видов в горные районы более южных широт.

В верхних горизонтах палеогена мы отмечаем уже лишь единичные находки одного или двух видов *Cedrus*. В олигоцене уже широко начали развиваться различные виды *Pinus*, совершенно оттеснив последних представителей кедров.

В настоящее время на всем земном шаре род *Cedrus* представлен всего четырьмя видами с изолированными и ограниченными ареалами в горах Ливана, горах Атласа, в Гималаях и на о-ве Кипр.

Основные типы пыльцевых зерен рода *Cedrus*, выделенных из третичных отложений исследованных районов, следующие:

1. *Cedrus* типа *C. deodara* L o u d. (фиг. 31, 6—8). Пыльцевые зерна преимущественно крупные (120  $\mu$  и более), по внешнему облику несколько напоминают пыльцу *Podocarpus* или *Abies*. Имеют ясно выраженный поперечно исчерченный гребень, обусловленный крупнобугорчатой скульптурой щита.

2. *Cedrus* типа *Cedrus libani* L a w s. (фиг. 31, 4). Пыльцевые зерна несколько меньшей величины (общая длина до 90  $\mu$ ). Экзина щита сравнительно тонкая. Гребень невысокий (до 4  $\mu$ ) со слегка волнистым или гладким контуром.

По внешнему облику пыльца этого типа имеет большое сходство с пыльцой рода *Picea* секции *Euricea*: у нее мелкая сетка воздушных мешков и сравнительно сглаженное очертание, приближающееся в полярной проекции к овалу.

3. *Cedrus* типа *Cedrus atlantica* M a n e t t i (фиг. 31, 3 и 5, крайние вариации). У пыльцевого зерна этого типа сильно увеличенные по высоте воздушные мешки, несколько оттянутые по бокам, поперечно исчерченный, но слабоволнистый гребень и относительно небольшое, в сравнении с воздушными мешками, тело. Экзина воздушных мешков часто смята в произвольные складки. Общий размер зерна 50—90  $\mu$ .

4. *Cedrus* типа *Cedrus microsaccata* Z a u e r (фиг. 31, 1, 2). Пыльцевые зерна резко отличаются от предыдущих более нежной структурой экзины, мелкими размерами (до 50  $\mu$ ) и очень небольшими воздушными мешками, отслаивающимися на брюшной стороне тела. Пыльца этого типа сходна с пыльцой ископаемых видов *Cedrus parvisaccata* Z a u e r, а из современных хвойных более всего имеет сходство с пыльцой различных видов рода *Dacrydium*.

#### *Cedrus* aff. *deodara* L o u d.

Табл. VIII, рис. 1—6

Препарат № 170  $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна около 120  $\mu$ ; высота тела около 95  $\mu$ , длина 98  $\mu$ ; высота воздушных мешков 48  $\mu$ ; ширина гребня около 10  $\mu$ .

Тело округлое, в боковой проекции — почти правильная окружность. Экзина тела толстая и скульптурная, состоит из двух слоев, из которых нижний значительно тоньше верхнего. Верхний слой экзины имеет сложную, видимо столбчатую, структуру, что обуславливает неравномерную поперечную штриховатость экзины, хорошо заметную при боковом положении зерна. Контур тела неровный, мелкофестончатый. На спинной части зерна экзина сильно утолщается и образует неясно выраженный щит, который не имеет резких границ. Брюшная часть тела неравномерно мелкобугорчатая. Зародышевая борозда выражена неясно.

Экзина тела, не утоняясь к боковым частям, непосредственно переходит на мешки, которые и представляют собой разросшиеся выросты верхнего слоя ее. Камеры воздушных мешков крупные, в боковом сечении полуокругло-эллипсоидальные, отходят от тела широкими основаниями.

Границы мешков выражены неясно, так как экзина, образующая их, облекает общим покровом и мешки и тело. Структура экзины на теле и на мешках различна. На мешках структура сетчатая, сетка неравномерная чистая, двойная (крупные ячейки налегают на мелкие). Ячейки сетки вытянуты по направлению от центра к периферии. Размеры ячеек сетки мешков по мере приближения к месту отделения мешков от тела постепенно уменьшаются и сетчатость переходит в мраморовидный рисунок поверхности тела (табл. VIII, рис. 5). Граница между мешками и телом зерна улавливается по наличию угла между линиями очертания спинной части тела и мешков.

Описанный В. В. Зауер (1950) ископаемый вид, названный *Cedrus aff. deodara* L o u d, по морфологическим признакам весьма близок к современному виду *Cedrus deodara* L o u d. (табл. VII, рис. 4), за исключением размеров, которые у первого значительно больше. Из ископаемых форм пыльцы *Cedrus* приведенная форма ближе всего к *C. laxireticulata* Z a u e r, отличаясь от него большей величиной ячеек сетки на мешках, а также тем, что структура его щита не имеет сетчатого рисунка.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слюистые глины подглауконитовой свиты (мел — палеоген).

Р а с п р о с т р а н е н и е: меловые отложения Среднего Урала, меловые и нижнетретичные отложения Павлодарского Прииртышья.

Родина ныне живущего гималайского кедра *Cedrus deodara* — горы Афганистана, Северо-Западные Гималаи, Северный Белуджистан. Растет на высоте от 1000 до 3000 м над уровнем моря совместно с *Pinus exelsa*, *Picea morinda*, *Abies Webbiana*, *Quercus incana* — наиболее засухоустойчивый вид из всех представителей рода *Cedrus*.

#### *Cedrus laxireticulata* Z a u e r

Табл. VIII, рис. 7, 8

Препараты № 170  $\frac{3}{K}$ ,  $3 \frac{3}{K}$

Общая длина зерна от 80 до 90  $\mu$ ; длина тела около 64  $\mu$ , ширина около 54  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 25  $\mu$ , ширина — около 60  $\mu$ ; толщина экзины на спинной части около 6  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, почти правильный овал в полярной проекции. Экзина трехслойная; нижний и верхний слои представляют собой пленчатые бесструктурные образования, плотно прилегающие к среднему толстому слою экзины. Средний слой экзины имеет сложную столбчатую (?) структуру. Поверхность тела — крупнобугорчатая; бугорчатость особенно резко выражена на спинной части тела, где средний слой экзины сильно утолщается, образуя щит — гребень. Гребень прекрасно виден при боковом положении зерна.

При увеличении в 750 раз можно обнаружить, что поверхность зерна сложная. Помимо крупных бугорков, она снабжена мелкими бугорками, которые проицируются крупноточечным рисунком.

Средний слой экзины несколько утоняется к боковым частям зерна, а верхний и нижний отслаиваются в виде воздушных мешков. Границу между мешками и телом можно наблюдать только при строго полярном положении зерна — мешками вверх; в боковой же и полярной проекциях мешками вниз граница между телом и воздушными мешками неразличима. Граница между мешками и телом улавливается лишь по наличию угла в месте пересечения линии очертания тела и мешков. Наличие этого угла и служит одним из признаков для отнесения *Cedrus laxireticulata* к одной секции с современным гималайским кедром. Другим признаком, сближающим описываемый вид с гималайским кедром, является волнистая линия контура тела, а отчасти и мешков.

Воздушные мешки имеют крупносетчатую структуру (ячейки сетки неравной величины), сильно вытянуты вдоль оси (высоты) мешков и образуют радиально расположенный рисунок.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слюистые глины датского (?) яруса; Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранская свита морского эоцена (средний эоцен).

Р а с п р о с т р а н е н и е: меловые и эоценовые отложения Урала, Северного Казахстана, Поволжья и Нижнего Дона; морские эоценовые отложения Приаралья.



*Cedrus piniformis* sp. nov. (pollen)

Табл. IX, рис. 1—4

Препараты № 198  $\frac{H}{K}$ , 146  $\frac{H}{K}$ 

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, вторая свита континентального олигоцена (средний олигоцен, препарат № 198  $\frac{H}{K}$ ).

Общая длина зерна от 65 до 75  $\mu$ ; длина тела от 48 до 55  $\mu$ , высота от 40 до 50  $\mu$ ; высота воздушных мешков 25—30  $\mu$ , ширина их 30—40  $\mu$ .

Тело округло-эллипсоидальное, в очертании — правильная окружность или овал. Экзина тела мелкобугорчатая, образует щит на большей части тела. Щит переходит без резких границ на поверхность мешков, границы прикрепления которых на спинной и боковых частях тела плохо различимы. Брюшная часть тела имеет более тонкую экзину с бугорчатой скульптурой, отличающейся от плотной мелкой бугорчатости щита. Экзина мешков мелкосетчатая. Часто при увеличении в 450 раз сетчатость различима и рисунок мешков представляется неравномерноточечным. Структура мешков постепенно сливается со структурой щита, и точечный или неясносетчатый рисунок мешков без резкой границы переходит в бугорчатость щита.

У некоторых экземпляров щит несколько отслаивается в области прикрепления мешков и налегает на них в виде валиков, что создает впечатление определенной границы (табл. IX, рис. 4). Воздушные мешки, в том случае, если пыльцевое зерно расположено в полярной проекции мешками вверх, имеют округлые очертания. В боковой проекции мешки выдаются за пределы тела весьма слабо. Иногда можно наблюдать едва заметный угол между линиями очертания тела и воздушных мешков. Последнее и послужило причиной для того, чтобы назвать приведенный тип зерен *Cedrus piniformis*.

Пыльца *Cedrus piniformis* отличается от пыльцы современного вида — *C. deodara* — значительно меньшими размерами, менее резко выраженным гребнем, мелкобугорчатой структурой щита и отсутствием четкой сетчатой структуры воздушных мешков.

При беглом просмотре пыльца *C. piniformis* может быть легко припята за пыльцу *Pinus* из секции *Banksia* или *Australes*, но при более тщательном изучении удастся обнаружить один наиболее резко отличающий их признак: наличие верхнего слоя экзины, который общим покровом облекает и тело и воздушные мешки пыльцевого зерна.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: эоцен — олигоцен Приаралья; эоцен — средний олигоцен Павлодарского Прииртышья; эоцен — олигоцен южной части Западно-Сибирской низменности.

*Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen)

Табл. IX, рис. 5—7

Препарат № 170  $\frac{H}{K}$ 

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, слюдяные глины подглауконитовой толщи (верхний мел — палеоцен).

Общая длина зерна около 115  $\mu$ ; длина тела около 100  $\mu$ , высота около 79  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 20  $\mu$ , ширина их около 60  $\mu$ . Гребень широкий.

Тело имеет эллипсоидальную форму, в очертании — овал (фиг. 31, 2).

Очертание пыльцевого зерна в боковой проекции — эллипс с незначительными выпуклостями на брюшной стороне тела, образованными

отслоением экзины в виде воздушных мешков. Экзина двуслойная. Внешний слой тонкий и бесструктурный, нижний толстый и имеет столбчатую структуру. Экзина облекает все тело толстым слосом и только на брюшной стороне, в области зародышевой борозды, однослойна. Щит трудно выделить, так как граница между двуслойным участком экзины на спинной части зерна и однослойным на брюшной выражена неясно. Поверхность экзины мелкосетчатая на спинной стороне зерна и крупносетчатая на участках мешковидных отслоений экзины. В боковой проекции участки отслоившейся экзины изображаются радиально заштрихованными. В боковой проекции экзина гребня имеет четкую поперечную штриховатость, которая и переходит в крупную радиальную штриховатость воздушных мешков.

**М е с т о н а х о ж д е н и е:** пыльца описанного вида впервые обнаружена автором в отложениях верхнего мела Павлодарского Прииртышья.

**Р а с п р о с т р а н е н и е:** эоцен — нижний олигоцен Северного Приаралья, верхний мел — эоцен Павлодарского Прииртышья.

*Cedrus parvisaccata* Z a u e r

Табл. IX, рис. 8—10

Препарат № 186  $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна от 55 до 75  $\mu$ ; длина тела от 55 до 70  $\mu$ ; ширина его 45—50  $\mu$ , высота тела 50—60  $\mu$ ; высота воздушных мешков от 10 до 17  $\mu$ , иногда до 25  $\mu$ ; ширина от 25 до 30  $\mu$ , иногда до 35  $\mu$ ; ширина гребня около 2,5  $\mu$ , иногда до 4  $\mu$ .

Форма тела, в общем сфероидальная, в боковой проекции имеет очертание, близкое к трапеции, расположенной большим основанием к спинной части тела (фиг. 31, 2). Воздушные мешки отходят от брюшной части тела.

Экзина двуслойная. Верхний слой облекает и тело и мешки общим покровом. В боковой проекции можно наблюдать поперечную штриховатость на спинном участке зерна (щит?). Поверхность тела мелкобугорчатая, но бугорчатость не всегда четко выражена. Границы щита улавливаются плохо. Экзина на брюшной поверхности зерна покрыта неравномерно разбросанными бугорками. Воздушные мешки имеют мелкосетчатую структуру. Зародышевая борозда довольно четко выделяется в виде прогиба на брюшной стороне зерна при боковой проекции и в виде более светло окрашенного участка экзины — при полярной проекции, мешками вверх.

Воздушные мешки при боковом положении зерна имеют полуокруглые очертания. Высота мешков обычно меньше ширины их. Воздушные мешки отходят от тела широкими основаниями.

Н. А. Волховитина (1953, стр. 87, табл. XIII, рис. 9—12) приводит описание пыльцы *Cedrus libaniformis* из песков верхнего альба в Западном Казахстане. По очертанию тела пыльца *C. libaniformis* B o l s h. сходна с некоторыми разновидностями *C. parvisaccata* Z a u e r, но по строению и форме мешков они значительно различаются. У пыльцы *C. libaniformis* B o l s h. мешки представляют собой выросты утолщенного и радиально исчерченного слоя экзины, подобно тому, как это наблюдалось у *C. Jan-schinii*. Воздушные мешки у *C. parvisaccata* имеют сетчатую структуру и, кроме того, они гораздо более четко отделяются от тела. Окраска пыльцевых зерен *C. libaniformis* B o l s h. значительно темнее, чем у *C. parvisaccata*.

**М е с т о н а х о ж д е н и е:** Павлодарское Прииртышье, пос. Парамовка, скв. 2, глины с растительными остатками из подглауконитовой толщи (верхний мел — палеоген).

Р а с п р о с т р а н е н и е: верхний мел — нижний, средний олигоцен Павлодарского Прииртышья (глины с растительными остатками и лигнитовые глины из верхних слоев чеганской свиты). Подобная пыльца отмечается также в альбских горизонтах верхнего мела в Западном Казахстане, встречается также в песках нижнего готерива в Крыму, в альбских и сеноманских отложениях восточного склона Урала и в среднем мелу Западной Сибири.

*Cedrus pusilla* Z a u e r

Табл. X, рис. 1—5

Препараты № 170  $\frac{3}{K}$  и 1  $\frac{3я}{K}$

Общая длина около 70  $\mu$ ; высота тела около 50  $\mu$ , ширина 50—60  $\mu$  (иногда больше); ширина воздушных мешков около 30  $\mu$ , высота от 20 до 30  $\mu$ ; ширина гребня 3—4  $\mu$ .

Тело имеет правильную эллипсоидальную форму, в очертании — правильный овал (см. табл. X, рис. 1—4). Мешки отходят от брюшной стороны тела, иногда несколько сдвинуты по бокам, что, повидимому, происходит в результате деформации (фиг. 31, 1).

Экзина общим покровом облекает и тело и воздушные мешки. На спинной части тела экзина двуслойная, а на брюшной — однослойная. Верхний слой экзины непосредственно переходит на камеры воздушных мешков.

Поверхность тела крупнобугорчатая, бугорчатость переходит и на воздушные мешки, экзина которых имеет одновременно неясносетчатую структуру.

Вследствие того, что структура экзины тела и воздушных мешков различна, граница отслоения последних выражена довольно четко. Легче всего обнаружить эту границу при боковом положении пыльцевого зерна. Если же зерно расположено в полярной проекции, мешками вверх, то можно обнаружить зародышевую борозду, которая выделяется в виде светлой полосы между воздушными мешками. Контур тела на спинной части волнистый из-за бугристой поверхности экзины. У некоторых экземпляров экзина спинной части несколько утолщается в месте отслоения воздушных мешков и образует подобие валика над мешками. В таких случаях можно отметить наличие границы щита.

Форма воздушных мешков полушаровидная; высота мешков немного меньше ширины их. У большинства экземпляров мешки не заполнены воздухом и смяты в произвольные складки; это придает пыльце *C. pusilla* некоторое сходство с пыльцой *Dacrydium* из сем. Podocarpaceae. Пыльца *Cedrus pusilla* особенно близка к пыльце *Dacrydium elatum* W a l l. по морфологическим признакам<sup>1</sup>. Различием пыльцы этих видов служит фестончатая складчатость у воздушных мешков *D. elatum*, у пыльцы же *C. pusilla* складки имеют произвольные направления, а мешки по форме близки к мешкам пыльцы рода *Pinus*.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, скв. 1, глины с растительными остатками в подглауконитовой толще (предположительно датский ярус); Северное Приаралье, гора Тас-Аран, груболистоватые глины среднего эоцена (тасаранская свита).

Р а с п р о с т р а н е н и е: по данным В. В. Зауер, вид *C. pusilla* в отличие от *C. parvisaccata* имеет ограниченное вертикальное распространение. Находки *C. pusilla* она отмечает лишь в палеоценовых отложениях Западной Сибири. По нашим наблюдениям, этот вид имеет не столь малое вертикальное распространение, он встречается в небольшом количестве

<sup>1</sup> Пыльца *Dacrydium elatum* описана Эрдтманом (1943) и Зауер (1950).

в эоценовых, палеоценовых и в массе в верхнемеловых отложениях Павлодарского Прииртышья, а также в эоцене и в нижнем олигоцене Северного Приаралья. Находки пыльцы, морфологически сходной с этой формой, но под иными названиями упоминаются разными авторами в спорово-пыльцевых спектрах Западного и Северного Казахстана, от верхнего мела до эоцена включительно.

*Cedrus aff. libani* L a w s.

Табл. X, рис. 6  
Препарат № 170  $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна 80—90  $\mu$ ; высота тела около 50  $\mu$ ; высота воздушных мешков от 30 до 40  $\mu$ , ширина их 45—50  $\mu$ ; высота гребня 3—4  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное. Очертание в боковой проекции овальное. Общее очертание пыльцевого зерна несколько приближается к очертанию пыльцы *Picea*. Зародышевая борозда неясно выражена.

Экзина двуслойная, внутренний слой значительно тоньше наружного, который имеет ясно выраженную столбчатую структуру, определяющую поперечную штриховатость гребня. Поверхность тела — мелкобугорчатая почти на всем зерне, за исключением брюшной стороны, где скульптура экзины резко меняется, переходя в неравномерную, редкую и мелкую, иногда плохо различимую бугорчатость, приближающуюся к шагреневатости. На боковых частях тела экзина не утоньшается, у некоторых экземпляров она даже несколько утолщается и затем отслаивается в виде воздушных мешков.

Камеры мешков крупные, экзина их — с крупносетчатой структурой. На боковых частях мешков поверхность экзины имеет мелкобугорчатую скульптуру, вследствие чего граница отслоения мешков в этих участках незаметна. На брюшной поверхности бугорчатая скульптура на мешках исчезает, сетка видна более четко и поэтому граница между мешками и телом видна яснее. Сетка на мешках крупная, но не такая четкая, как у пыльцы *Pinus*. Ячейки сетки неправильной формы и размеры их неравномерны. Попадаются экземпляры с неясно выраженной сеткой.

По общему облику пыльца *Cedrus aff. libani* почти тождественна пыльце ныне живущего *C. libani* L a w s. (табл. VII, рис. 5, 6), описанной В. В. Зауер (1950, 1954).

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 2, слюдистые глины с растительными остатками (верхний мел — палеоцен).

Р а с п р о с т р а н е н и е: Северный Казахстан, верхний мел — олигоцен; Приаралье, олигоцен.

Современный вид *Cedrus libani* L a w s. (табл. VII, рис. 5, 6) имеет ограниченное распространение. Растет в Малой Азии и Тавре. Относится к представителям высокогорной флоры и обитает на высоте от 1300 до 2000 м над уровнем моря, где образует леса вместе с *Abies cilica* и *Juniperus foetidissima*. Современный ливанский кедр — наиболее холодоустойчивый из всех сохранившихся сейчас представителей рода *Cedrus*.

*Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen)

(ex. gr. *C. libaniformis* B o l c h.)

Табл. X, рис. 7  
Препарат № 170  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, слюдистые глины и глины с растительными остатками из датского яруса (мел — палеоцен).

Общая длина зерна от 70 до 90  $\mu$ ; длина тела 40—50  $\mu$ ; ширина 30—40  $\mu$ ; высота 50—52  $\mu$ ; высота воздушных мешков 35—40  $\mu$ , ширина 35—40  $\mu$ ; высота гребня 5—7  $\mu$ .

Тело округлое. Очертание тела в боковой проекции приближается к округло-треугольному, с широким основанием, обращенным к спинной части. Схематически общие очертания зерна изображены на фиг. 30, 5.

Экзина облекает все зерно, отслаиваясь в виде воздушных мешков, не имеющих четких внутренних границ. Экзина двуслойная: нижний слой — более тонкий; верхний, образующий камеры воздушных мешков, — более толстый.

Воздушные мешки находятся по бокам тела и сильно оттянуты в бока и вниз. В боковом сечении мешки имеют треугольные очертания. Сильно утолщенная экзина на спинной части зерна образует щит. Когда зерно расположено в боковой проекции, то ясно виден гребень, имеющий хорошо выраженную поперечную исчерченность. Контур гребня крупноволнистый. На теле зерна скульптура поверхности экзины складчато-бугорчатая, в месте отслоения воздушных камер бугорчатость исчезает. Экзина камер мешков имеет струйчато-сетчатую структуру, ячейки сетки сильно вытянуты по длинной оси камер — мешков.

Пыльца, подобная *Cedrus longisaccata*, описана Н. А. Болховитиной (1953, стр. 87, табл. XIII, рис. 9—12) из отложений серых косослоистых песков в глинистой толще верхнего альба (мел) под названием *C. libaniformis*. Безусловно, оба эти вида относятся к одной секции и принадлежат к растениям близких видов (возможно, разновидностям одного вида?), но большинство экземпляров пыльцевых зерен *Cedrus longisaccata* крупнее. Кроме того, камеры воздушных мешков *C. longisaccata* значительно сильнее оттянуты по высоте и отличаются характерным треугольным очертанием. В остальном пыльцевые зерна *C. longisaccata* sp. nov. и *C. libaniformis* Bolch. близки.

Местонахождение: см. ГОЛОТИН.

Распространение: Крым, Северный и Западный Казахстан, от верхнего мела до эоцена; Приаралье — эоцен.

Род *Pinus* L.—Сосна

В спорово-пыльцевых спектрах палеогена Казахстана и Приаралья род *Pinus* представлен большим числом видов. Эти виды отличаются один от другого рядом специфических морфологических признаков, позволяющих в большинстве случаев сопоставлять их с современными видами. Конечно, далеко не все встреченные формы удавалось привести к естественной системе, но большая часть ископаемых форм все же настолько близка к современным видам, что нельзя не признать их родственных связей. Очевидно, что многие из обнаруженных форм принадлежали к растениям, которые были непосредственными предками ныне живущих видов. Наряду с ними встречаются и такие формы, которые не находят себе аналогов среди современной флоры. К последним принадлежит, например, пыльца, относимая издавна к подроду *Harpoxylon*; у этой пыльцы воздушные мешки прикреплены к телу широкими основаниями, очертание тела (в полярной проекции) представлено почти правильным овалом, угла между линией очертания тела и мешков нет.

Рудольф (Rudolph, 1935) назвал пыльцу хвойных без ясно отделяющихся воздушных мешков — *Pinus Haploxyylon* typ., подчеркивая этим сходство ее с пыльцой современных сосен, принадлежащих к подроду *Haploxyylon*. Действительно, например, *Pinus pumila*, относящаяся к подроду *Haploxyylon*, имеет пыльцу с воздушными мешками, нерезко отделяющимися от тела и прикрепленными широкими основаниями, а у *Pinus*

*silvestris*, относящегося к подроду *Diploxydon*, воздушные мешки резко отделяются от тела и прикреплены к нему суженными основаниями.

При сравнительно невысоком уровне изученности пыльцы современных растений к 1935 г., классификация ископаемой пыльцы сосен по признаку способа прикрепления воздушных мешков была приемлемой. В настоящее же время, когда изученность пыльцы современных растений сильно продвинулась, выяснилось, что пыльца различных видов сосен, принадлежащих к той или иной секции, имеет ряд других определяющих их систематическую принадлежность признаков, и способ прикрепления мешков к телу далеко не основной среди них. Выяснилось, например, что пыльца многих видов *Pinus*, принадлежащих к подроду *Diploxydon*, имеет мешки с широким основанием, а у пыльцы некоторых видов *Pinus* из подрода *Haploxydon* воздушные мешки прикреплены к телу суженными основаниями. Выяснилось также, что среди пыльцы современных видов сосен аналога ископаемым пыльцевым зернам, обозначавшимся как *Pinus Haploxydon* — тип., нет, но, возможно, что эта пыльца принадлежит одному из предков современных кедровых сосен.

Все виды пыльцы рода *Pinus*, встреченные нами в кайнозойских отложениях Казахстана, можно разделить на две группы (фиг. 32):

1) пыльца с неясно выраженными границами между телом и мешками, с овальным очертанием, с плотно прилегающими к телу воздушными мешками (небольшое число видов);

2) пыльца с ясно выраженными контурами границ прикрепления воздушных мешков к телу (большинство видов).

Первая группа в изученных отложениях представлена только близкими по строению тремя разновидностями, отнесенными нами к одному виду — *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen) (фиг. 32, 1, 2).

Вторая группа представлена десятью морфологически различными формами, принадлежащими, по аналогии с современными видами, к двум подродам — *Haploxydon* и *Diploxydon* (фиг. 32, 3 — 21). Некоторые виды пыльцы этой группы по ряду морфологических признаков определялись по естественной системе.

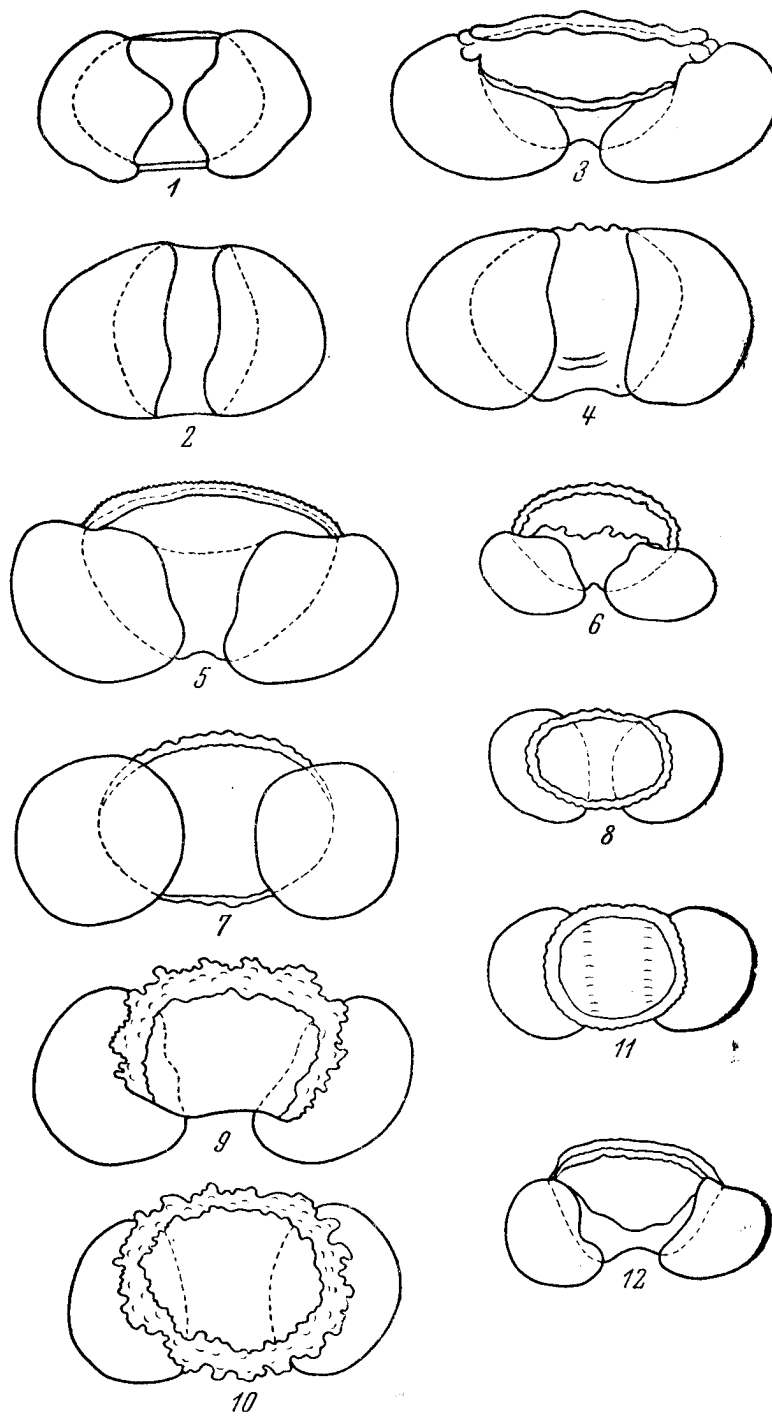
Таким образом, по аналогии с современными видами выделена пыльца сосен, принадлежащих к секциям *Cembrae* Spach., *Strobis* Shaw., *Pseudostrobus* Endl., *Sula* Mayr., *Banksia* Mayr., *Taeda* Spach., *Austrobaileya* Loud., *Eupitys* Spach. и *Paracembrae* Koenig (?). Эти секции включают представителей видов, аналогов которых в ряде случаев удалось найти среди ископаемой пыльцы.

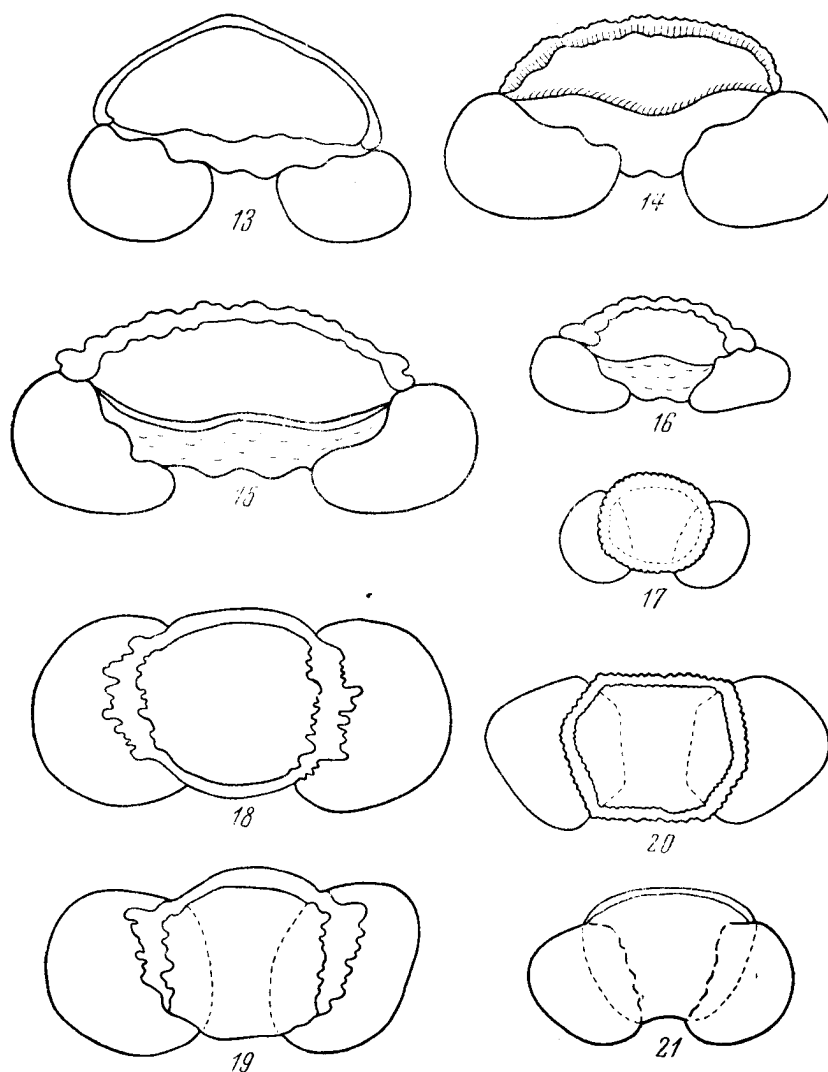
За сравнительный материал брались такие разновидности пыльцы современного вида, которые имели нестандартные признаки, так как именно такие разновидности всегда имеют большие сходства с ископаемой пыльцой. По-видимому, в большинстве случаев различные отклонения от стандарта в общем строении пыльцевого зерна служат проявлением «атавизма».

Некоторые виды ископаемой пыльцы остались непривязанными к естественной системе, так как им не были найдены аналоги среди современных представителей. Возможно, в дальнейшем, когда знание пыльцы современных сосен будет расширено, и эти виды смогут быть привязаны к естественной системе; в этом случае их видовые названия должны быть изменены.

#### ПОДРОД *HAPLOXYDON* КОЕНИГ Секция *Cembrae* Spach.

Пыльцевые зерна, отнесенные к секции *Cembrae*, характеризуются следующими основными морфологическими признаками (фиг. 32, 1—8):





Фиг. 32. Схематическое изображение основных типов пыльцевых зерен рода *Pinus*, выделенных из палеогеновых отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья.

1, 2—секция *Cembrae*; 3, 4—*Pinus koraiensis*; 5, 6—*P. sibirica*; 7, 8—*P. microsibirica* sp. nov. (pollen); 9, 10, 11—секция *Strobus*; 13—секция *Banksia*; 14—секция *Taeda*; 15, 16—секция *Sula*; 17—*Pinus minutus* sp. nov. (pollen); 18, 19—секция *Pseudostrobus*; 20—секция *Australes*; 21—секция *Eurpitys*; (1, 2, 6, 8, 10, 11, 17, 18, 20 даны в полярной проекции, остальные — в боковой).



- 1) тело эллипсоидальной формы, очертание в боковой проекции округ-  
лос, овальное или близкое к трапецевидному;
- 2) экзина тела двуслойная, оба слоя обычно одинаковой толщины; об-  
разует ясно выраженный щит с достаточно четкой границей;
- 3) ниже щита, на брюшной части тела, обычно ясно выражена струк-  
тура;
- 4) мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сильно смещены  
к боковым сторонам тела;
- 5) гребень на спинной части тела волнистый, у большинства экземпля-  
ров несколько утолщается над границей прикрепления мешков, образуя  
так называемые «плечики»;
- 6) сетка на мешках крупная и четкая.

*Pinus cembraeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. X, рис. 8—13

Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, верхние горизонты чеган-  
ской свиты (нижний олигоцен).

Общая длина зерна около 75, иногда до 85  $\mu$ ; длина тела от 45 до 50  $\mu$ ,  
ширина 45—50  $\mu$ , высота 44—48  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 30—35  $\mu$ ,  
высота их от 35 до 40  $\mu$ ; высота гребня 1,4—3  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, округлое, несколько уплощенное. Очертание  
в боковой или полярной проекциях округло-овальное или трапеце-  
видно-овальное. Воздушные мешки — по сравнению с телом доволь-  
но крупные, иногда несколько уплощенные. Мешки прикреплены к телу  
широкими основаниями и сильно смещены к боковым сторонам тела. Эк-  
зина тела на спинной и большей части боковых поверхностей двуслойная, что  
обуславливает наличие щита. Контуры щита не всегда ясно выражены, на  
некоторых экземплярах край щита заметен в виде волнистой линии. На  
брюшной части тела экзина однослойная. При боковом положении зерна  
хорошо виден неширокий двуслойный поперечноштриховатый гребень рав-  
номерной ширины по всей длине тела. У некоторых зерен гребень сильно  
утолщается в области прикрепления воздушных мешков. Поверхность  
спинной и боковых частей зерна (поверхность щита) имеет мелкобугорча-  
тую скульптуру. Контур гребня мелкофестончатый или ровный.

Сетка мешков четкая, у большинства экземпляров хорошо заметная.  
В основном сетчатость крупная, но мельче сетки у пыльцы современных  
видов секции *Cembrae*. Размеры ячеек сетки уменьшаются в направлении  
к основанию мешков.

По общим морфологическим признакам пыльца *Pinus cembraeformis*  
весьма близка к пыльце современного вида *P. cembra* L. Отличается иско-  
паемый вид от современного несколько меньшей величиной и меньшим  
размером ячеек воздушных мешков (Гричук с соавторами, in litt.,  
табл. III, фиг. 20—22).

От пыльцы *Pinus cembra* L., описанной Эрдтманом (1943), ископаемая  
пыльца также отличается величиной. Эрдтман для пыльцы *P. cembra* ука-  
зывает общую величину зерна от 84 до 103  $\mu$ , что значительно превышает  
размеры как *Pinus cembraeformis*, так и *Pinus cembra* L. (recent).

По-видимому, отклонения размеров пыльцы отдельных разновидностей  
*P. cembra* велики, а потому величина зерна не может быть принята за  
основной морфологический признак при определении.

Между прочим, Эрдтман отмечает, что сильные колебания в размерах  
у пыльцы *P. cembra* замечены еще Фюрером (Furere, 1927), Хорманом (Hör-  
mann, 1929) и Кайном (Cain, 1940). Последний, по данным Эрдтмана.

отмечает, что размеры пыльцы различных видов сосен очень сильно варьируют, особенно это резко выражено у ископаемой пыльцы.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Pinus cembraeformis* широко распространена в третичных и четвертичных отложениях Европейской и Азиатской частей СССР. В Казахстане и Приаралье в основном приурочена к олигоценовым отложениям, достигая максимума в нижних и средних горизонтах. В миоцене пыльца, близкая по морфологическим признакам, упоминается как *Pinus aff. cembrae*.

В настоящее время *P. cembra* L. распространена в горах Средней Европы, в Альпах — от Приморских Альп до Нижней Австрии — и в Карпатах. Образует леса на склонах гор. Весьма морозоустойчивое и тенелюбивое дерево.

*Pinus aff. koraiensis* Sieb. et Zucc.

Табл. XI, рис. 1—5

Препараты № 161  $\frac{H}{K}$ , 162  $\frac{H}{K}$ , 163  $\frac{H}{K}$

Общая длина зерна от 87 до 100  $\mu$  (за редким исключением — 110  $\mu$ ); длина тела 55—70  $\mu$ ; высота 37—40  $\mu$ ; ширина воздушных мешков от 40 до 50  $\mu$ , высота около 40  $\mu$ ; высота гребня около 3  $\mu$ , у некоторых экземпляров до 4  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, несколько уплощенное. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное (фиг. 32, 3, 4). Мешки прикреплены широкими основаниями по боковым сторонам тела. Экзина тела двуслойная, образует щит, который закрывает большую часть тела. Лишь на некоторых экземплярах щит более короткий, оставляющий свободной всю брюшную часть тела (табл. XI, рис. 2). Двуслойность экзины не всегда четко выражена. Скульптура поверхности щита бугристая, а поэтому контур гребня мелковолнистый. Толщина гребня одинакова по всей длине за исключением небольших участков в месте прикрепления воздушных мешков, где экзина спинной части утолщается, образуя небольшие «плечики» гребня над мешками. На некоторых экземплярах эти утолщения образуют небольшие складки, радиально расходящиеся к краевым зонам воздушных мешков (в месте их прикрепления к телу).

Воздушные мешки несколько уплощены и в боковой проекции имеют овальные очертания. Мешки прикреплены к телу несколько суженными или широкими основаниями и сильно раздвинуты по бокам тела. Сетка мешков имеет ячейки неравномерной величины. На некоторых зернах удается обнаружить двойную сетку: верхнюю — крупную и нижнюю — мелкую. Большие размеры пыльцевого зерна в целом и воздушных мешков отличают пыльцу *Pinus aff. koraiensis* от *P. cembraeformis*. У некоторых экземпляров мешки несколько смяты и сдвинуты к брюшной стороне, но чаще всего это объясняется деформацией зерна при приготовлении препарата.

По морфологическим признакам пыльца *P. aff. koraiensis* сходна с современным видом корейского кедра, пыльца которого описана В. П. Гричук (in litt.) и М. Х. Моносзон-Смолиной (1949), она несколько отличается уплощенной формой мешков. М. Х. Моносзон-Смолина характеризует воздушные мешки *P. koraiensis* как правильно сфероидальные, что обуславливается, по ее заключению, тем, что они прикрепляются к телу суженными основаниями.

В. П. Гричук с соавторами, между прочим, отмечает, что у некоторых разновидностей пыльцы *P. koraiensis* мешки действительно прикрепляются не расширенными, а суженными основаниями, но это является своего рода отклонением или исключением. Несколько отлична ископаемая

пыльца *P. aff. koraiensis* от современных видов тем, что мешки ее достаточно четко отделяются от тела, что не всегда наблюдается у пыльцы современного вида.

**Место нахождения:** Павлодарское Прииртышье, г. Павлодар, глины с растительными остатками из самых верхних горизонтов чеганской свиты (нижний олигоцен).

**Распространение:** пыльца *Pinus aff. koraiensis* распространена в основном в олигоценовых отложениях Павлодарского Прииртышья, Западной Сибири, Дальнего Востока, в континентальном олигоцене Северного Приаралья и в отложениях миоцена и миоцен-плиоцена Западной Сибири и Павлодарского Прииртышья.

В настоящее время *P. koraiensis* L. (или *P. mandshurica* Rupr.) известна лишь на Дальнем Востоке — в Уссурийском крае, в горах Маньчжурии и на северо-востоке Кореи. В Японии («Деревья и кустарники СССР», 1949) является одним из характерных представителей маньчжурской ботанико-географической провинции.

Растет в ассоциации с *Picea jezoensis*. Предпочитает сухие, открытые места, селится по склонам гор и на повышенных местах.

***Pinus microsibirica* sp. nov. (pollen)**

Табл. XI, рис. 6, 7  
Препараты № 162  $\frac{H}{K}$ , 163  $\frac{H}{K}$ , 164  $\frac{H}{K}$

**Голотип:** Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, чеганские глины (препарат № 164  $\frac{H}{K}$ ).

Общая длина зерна 50—60  $\mu$ ; длина тела 35—45  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 30  $\mu$ , ширина около 30  $\mu$ ; высота гребня около 3  $\mu$ .

Строение зерна подобно пыльце *Pinus sibirica*. Различие заключается в величине, так как *P. microsibirica* значительно мельче, и в контуре тела, который у пыльцы *Pinus microsibirica* волнистый, что особенно хорошо заметно, если зерно расположено в строго полярной проекции. Тип зерен, подобных *P. microsibirica*, схематически изображен на фиг. 32, 7, 8.

**Местонахождение:** см. голотип.

**Распространение:** Павлодарское Прииртышье и Северное Приаралье, олигоцен, преимущественно средний.

***Pinus sibiriciformis* sp. nov. (pollen)**

Табл. XI, рис. 8—10  
Препараты № 255  $\frac{3}{K}$ , 269  $\frac{3}{K}$

**Голотип:** Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, вторая свита континентальных отложений, средний олигоцен.

Общая длина зерна от 89 до 100  $\mu$ ; высота тела около 50  $\mu$ , длина тела 65—70  $\mu$ , ширина 35—45  $\mu$ ; высота воздушных мешков 35—40  $\mu$ , ширина около 45—50  $\mu$ ; ширина гребня около 3  $\mu$ .

Тело угловато-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное или овальное (см. близкое схематическое изображение на фиг. 32, 5, 6). Мешки прикреплены к телу широкими основаниями и несколько раздвинуты по бокам. Границы прикрепления мешков выделяются четко. Экзина тела двуслойная, слои экзины одинаковой толщины. Щит большей частью имеет ясную границу в виде волнистой линии. Брюшная поверхность тела имеет ясно выраженную бугристо-точечную скульптуру. Поверхность щита мелкобугристая, контур гребня неясно-мелковолнистый. Гребень имеет поперечную исчерченность на обоих

слоях экзины. У гребня одинаковая толщина по всей длине, лишь у некоторых экземпляров гребень несколько расширяется на концах (у места прикрепления воздушных мешков), образуя небольшие утолщения. Сетчатость на воздушных мешках крупная и четкая. Стенки ячеек сетки образованы толстыми шнуровидными выростами. Размеры ячеек одинаковы по всей поверхности мешков.

По внешнему облику и по основным соотношениям размеров элементов зерна пыльца *P. sibiriciformis* почти тождественна современной пыльце *P. sibirica* (R u p r). М а у г., которую неоднократно описывали В. В. Зауер (1950), М. Х. Монозон-Смолина (1949) и В. П. Гричук с соавторами (in litt.).

От вида, описанного В. В. Зауер, ископаемый вид *P. aff. sibirica* отличается лишь большей величиной, что, по-видимому, объясняется применением различных методов обработки. Пыльца, описанная нами, В. П. Гричуком и М. Х. Монозон-Смолиной, обрабатывалась ацетилирующей смесью, а у В. В. Зауера описана пыльца, обработанная щелочью.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: Северное Приаралье, средний эоцен (низы тасаранской свиты); Павлодарское Прииртышье, нижний и средний олигоцен; единично — континентальные отложения верхнего олигоцена Западной Сибири, Тургай и Павлодарского Прииртышья.

В основном вид приурочен к континентальным отложениям — песчаным, гравийно-песчаным и грубообломочным. В морских отложениях находки единичны.

*Pinus sibirica* распространена в северо-восточной части СССР (до Енисея и до 68°30' с. ш.), в Северной Монголии, в Саянах, на Алтае и Урале.

*Pinus sibirica* — типичное равнинное растение. *P. sibirica* является в настоящее время одним из тех двух видов сосен, которые принимают участие в растительном покрове Казахстана. Кедровая сосна («сомырсы» по-казахски) в настоящее время в Казахстане распространена ограниченно и обнаружена только на востоке, у верхней границы лесного пояса на Алтае и в Сауре, у оз. Маркакуль (Павлов, 1947).

Разновидностью *Pinus sibiriciformis* sp. nov. (pollen) более древнего происхождения является, по-видимому, пыльца, обнаруженная в Приаралье, в слоях эоценовых глин горы Тас-Аран.

*Pinus* ex gr.<sup>1</sup> *P. sibirica* (R u p r.) М а у г.

Табл. XI, рис. 11, 12

Препарат № 2  $\frac{3я}{К}$

Общая длина зерна около 75  $\mu$ ; высота тела около 45  $\mu$ , ширина около 35  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 40  $\mu$ , ширина 30—35  $\mu$ ; ширина гребня около 3,5  $\mu$ .

Тело угловато-эллипсоидальное. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное, в полярной — овальное. Зародышевая борозда ясно выражена. Поверхность щита мелкобугорчатая. Граница щита ясно выражена в виде тонкого валика по краям его. Большая часть тела гладкая и лишена структуры. Мешки прикреплены к телу широкими основаниями и сильно раздвинуты по бокам. Сетка на мешках крупная, неравномерная. Гребень двуслойный, нижний слой несколько толще верхнего. Отличается от пыльцы *P. sibiriciformis* более толстым внутренним слоем экзины в области щита, вытянутыми по высоте воздушными мешками и меньшим размером пыльцевого зерна в целом.

<sup>1</sup> ex gr. (ex grege) — из группы.

**М е с т о н а х о ж д е н и е:** Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранские глины среднего эоцена. Пыльца встречена в общем комплексе тропической флоры с *Cedrus*, *Araucariaceae* и миртовыми.

По-видимому, к той же группе *Pinus ex gr. sibirica* (R и p r.) М а у г. следует отнести пыльцевые зерна, обнаруженные в эоценовых отложениях также в Приаралье, несколько меньших размеров и худшей сохранности (табл. XI, рис. 13; препарат №  $2 \frac{3я}{К}$ ).

Общая длина зерна 96  $\mu$ ; длина тела 57  $\mu$ ; высота 38  $\mu$ ; высота воздушных мешков 45  $\mu$ , ширина 40  $\mu$ ; высота гребня 1,5—2  $\mu$ .

Тело неправильно эллипсоидальное, несколько уплощенное на спинной поверхности. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное, в полярной — овальное. Мешки прикреплены по диаметру или несколько суженным основанием.

Граница щита ясно выражена, щит закрывает тело до половины. Ниже границы щита тело имеет точечную поверхность. Структура и скульптура экзины из-за плохой сохранности зерна выражены неясно. Экзина щита двуслойная, но двуслойность ее не всегда ясно просматривается. Сетка мешков неясная, ячейки сетки крупные, стенки ячейки иногда прерывистые.

**М е с т о н а х о ж д е н и е:** Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранские эоценовые глины.

**Р а с п р о с т р а н е н и е:** подобная пыльца, кроме эоценовых отложений в Приаралье, отмечена автором в нижнем и среднем палеоцене в Поволжье.

***Pinus protocembra* sp. nov. (pollen)**

Табл. XII, рис. 1, 2

Препарат № 191  $\frac{Н}{К}$

**Г о л о т и п:** Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, скв. 1, верхи чеганских глин (верхние горизонты нижнего олигоцена).

Пыльца, подобная *P. protocembra*, известна по следующим литературным данным:

1935. *Pinus Haploxyylon* Typ. R u d o l p h. Microfloristische. Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen, Taf. IX, Fig. 1.  
1940. *Picea T h i e r g a r t*. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. IV, Fig. 13.

Общая длина зерна от 80 до 100  $\mu$ ; длина тела 60  $\mu$ , ширина 50  $\mu$ , высота 50  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 40  $\mu$ , ширина 50—55  $\mu$ ; высота гребня около 3  $\mu$  (иногда до 5  $\mu$ ).

Форма зерна, включая и тело и мешки, эллипсоидальная; в очертании — правильный эллипс. Форма тела округло-овальная; очертание: в полярной проекции — правильный эллипс, а в боковой — угловато-овальное. Мешки имеют форму правильных полушарий, насаженных на боковые части тела по большому диаметру. Подобные пыльцевые зерна приближаются к типу, изображенному на фиг. 32, 1, 2.

Экзина облекает все тело. Границ щита не видно. Толщина экзины равномерна по всей поверхности тела; двуслойность обнаруживается редко. Контур тела мелковолнистый, иногда ровный.

Экзина мешков плотная и толстая, в поперечной проекции края ее обнаруживают исчерченность. Сетка мешков очень мелкая и равномерная. Величина ячеек сетки заметно уменьшается, переходя в неясноточечный рисунок по направлению к внутренней части мешков.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: Павлодарское Прииртышье, мел — средний олигоцен; Западная Сибирь, Северное Приаралье, эоцен — средний олигоцен; Дон и Нижняя Волга, олигоцен — миоцен; Северный Кавказ, Украина, Западная Германия, миоцен. Представитель растительности ксерофильного облика. Появление и распространение вида связано с некоторым осушением и похолоданием климата в палеогене. В плиоцене встречается в виде единичных зерен. В современной флоре аналогов нет.

По ряду морфологических признаков можно допустить, что пыльца описанной формы относится к растениям, которые были прародителями современной *Pinus cembra*. Пыльца, близкая по форме, но гораздо худшей сохранности, встречается в континентальных отложениях четвертой свиты в Павлодарском Прииртышье. Описание ее приводится ниже.

*Pinus ex gr. protocembra*

Табл. XII, рис. 3

Общая длина зерна 60—75  $\mu$ ; ширина тела 40—45  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 40  $\mu$  (иногда 35  $\mu$ ), ширина 40—45  $\mu$  (иногда до 50  $\mu$ ); гребень не обнаружен. Форма всего зерна в полярной проекции приближается к эллипсоидальной; очертание — почти правильный овал. Мешки имеют сетку, но не всегда ясно выраженную. В остальном пыльца близка по форме и очертаниям к пыльце *Pinus protocembra*.

У некоторых экземпляров сетка на мешках неясная и иногда проецируется в виде штриховатого рисунка.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, песчано-гравийные отложения четвертой свиты континентального олигоцена.

Распространение: вид широко распространен в континентальных отложениях от среднего мела до плиоцена Азиатской и особенно Европейской части СССР. Обычно этот вид пыльцы сосен в списках ископаемых пыльцы и спор обозначается как *Pinus Haploxylon*.

Секция *Strobilus Shaw*.

Пыльца, отнесенная к секции *Strobilus*, имеет следующие особенности (схематическое изображение пыльцы этого типа дано на фиг. 32, 9—12):

- 1) тело угловато-эллипсоидальное с трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции и с угловато-округлым — в полярной;
- 2) зародышевая борозда выражена неясно;
- 3) воздушные мешки прикреплены к телу суженным основанием и смещены к брюшной стороне тела;
- 4) экзина тела двуслойная; щит в большинстве случаев имеет довольно четкие границы;
- 5) гребень обычно волнистый, двуслойный; нижний (внутренний) слой значительно тоньше внешнего;
- 6) на брюшной части тела, свободной от щита, большей частью заметна структура;
- 7) сетка на воздушных мешках ясная и четкая.

*Pinus strobiformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XII, рис. 4—8

Препараты № 170  $\frac{H}{K}$ , 161—163  $\frac{3}{K}$  и 1  $\frac{3я}{K}$

Голотип: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, глины с растительными остатками, верхний мел (препарат № 170  $\frac{H}{K}$ ).

Пыльца, имеющая морфологическое сходство, известная по литературным данным:

1933. *Pinus strobipites* Woodhouse. Tertiary pollen. The oil shales of theocene Green River formation, p. 485, fig. 7.

Общая длина зерна 75—90  $\mu$ ; длина тела 47—55  $\mu$ , высота 30—40  $\mu$ ; ширина воздушных мешков около 30  $\mu$ , высота 30—45  $\mu$ ; высота гребня около 3  $\mu$ .

Тело эллипсоидальной формы, очертание в боковой проекции овальное или трапециевидно-овальное.

Экзина тела двуслойная, образует щит на большей поверхности тела. На спинной части толщина щита значительно больше, чем на боковых. Щит несколько нависает над воздушными мешками в месте прикрепления их к телу и образует неравномерные складки. Гребень двуслойный, несколько расширяется в области прикрепления мешков. Поверхность щита мелкобугорчатая. Ниже щита поверхность тела неяснобугорчатая. Контур тела мелковолнистый, на боковых частях волнистость переходит в фестончатость, контур гребня волнистый.

Воздушные мешки сфероидальные, прикреплены к телу суженными основаниями, несколько смещены на брюшную сторону. Сетка на мешках мелкая, равномерная, четкая. Ячейки сетки имеют округло-угловатые очертания.

Основные диагностические признаки описываемой пыльцы совпадают с признаками *Pinus strobus* L., приведенными в работе В. П. Гричука с соавторами. Пыльца современной *P. strobus* неоднократно микрофотографировалась и многие снимки почти тождественны с микрофотографиями ископаемых видов одноименной секции. Пыльца *P. strobus* характерна тем, что все основные морфологические признаки, принятые для пыльцы секции *Strobus* у нее сильно смягчены и выражены слабее, чем у остальных видов (*P. exelsa*, *P. ayacahuite*, *P. peuce* и др.). Среди пыльцевых зерен современной *P. strobus* много разновидностей, которые при беглом просмотре могут быть легко приняты за крупную пыльцу *P. silvestris*. Поэтому при определении ископаемого материала следует относиться чрезвычайно внимательно к замеру всех основных элементов зерна, а также тщательно рассмотреть способ прикрепления воздушных мешков и характер структуры щита и гребня. Как известно, щит и гребень у пыльцы *P. silvestris* выражены слабо, а мешки прикреплены на боковых частях тела. Эти признаки отличаются от пыльцы *P. strobus*. Кроме того, несмотря на то, что пыльца *P. strobus* является наиболее мелкой формой из секции *Strobus*, все же величина ее значительно превышает величину наиболее крупных пыльцевых зерен *P. silvestris*.

Местонахождение: см. голотип.

Распространение: пыльца *Pinus strobiformis* встречается в основном в отложениях верхнего мела и в палеогене юга Азиатской и Европейской части СССР, а также в олигоцене Северной Америки. Прекрасной сохранности пыльца *P. strobiformis* встречается в Приаралье (Тас-Аран, тасаранские глины, средний эоцен) и в континентальных эоценовых отложениях месторождения Ашу-Тасты (восточный борт Тургайского прогиба). В более высоких горизонтах третичных отложений *Pinus strobiformis* сменяется пыльцой *P. aff. strobus*, которая продолжает встречаться вплоть до нижнечетвертичных отложений.

В настоящее время *P. strobus* L. (веймутова сосна) растет в Северной Америке, в Манитобе (Канада), в Северной Индиане, Иллинойсе, на о. Ньюфаундленд, вдоль Аппалачских Альп. По данным В. П. Малесова (1940), *P. strobus* образует леса преимущественно на песчаной или на

свежеглинистой почве. Дерево боится засух и чаще растет в зонах со сравнительно умеренными климатическими условиями.

*Pinus peuceformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XII, рис. 9—12

Препарат № 1  $\frac{3\alpha}{K}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, Тас-Аран, глины морского среднего эоцена.

Общая длина зерна 70—90  $\mu$ ; высота тела 40—50  $\mu$ , ширина 45—50  $\mu$ ; ширина воздушных мешков от 40 до 45  $\mu$ , высота 35—40  $\mu$ ; ширина гребня от 3—4  $\mu$ .

Форма тела — близкая к эллипсоидальной, в редких случаях несколько вытянутая. Очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное, в полярной — округло-овальное (фиг. 32, 11, 12).

Мешки сфероидальные, прикреплены к телу суженными основаниями и несколько смещены на брюшную сторону тела. У некоторых экземпляров при полярном положении зерна создается впечатление, что мешки прикреплены к телу широким основанием. Экзина тела двуслойная и на большей поверхности его образует щит, который на спинной части несколько утолщается. Граница щита неясная. Гребень двуслойный, нижний слой тоньше верхнего. Поверхность тела в области щита сильно бугристая, что обуславливает волнистый контур гребня. На спинной части зерна контур гребня из волнистого становится правильнофестончатый. Сетка на мешках густая, не крупная, с округлыми ячейками, размеры которых значительно уменьшаются к основанию мешков.

Пыльца из гербарного сбора (*Pinus peuce* G r i s.) описана сотрудниками Гидропроекта (in litt.). По очертанию и другим морфологическим признакам ископаемая пыльца, отнесенная к виду *Pinus peuce*, имеет большое сходство с современными представителями этого вида. Ископаемый вид отличается от современного большей величиной мешков. Некоторые экземпляры по относительно большой величине воздушных мешков сходны с пылью современной *Pinus taeda* L. Следует отметить, что среди пыли современной *P. peuce* также встречаются разновидности с крупными воздушными мешками, которые и имеют наибольшее сходство с пылью *P. peuceformis*.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: вид довольно широко распространен по вертикали. Первые экземпляры *P. peuceformis* встречены автором под г. Павлодаром, в глинах с растительными остатками, относимых К. В. Никифоровой к верхнему мелу (табл. XII, рис. 9). В том же районе этот вид встречен в нижних горизонтах чеганских глин (табл. XII, рис. 10) и, наконец, тот же вид, с несколько более оттянутыми к брюшной стороне тела воздушными мешками, отмечен неоднократно в верхних горизонтах чеганских глин и в континентальных отложениях среднего и верхнего олигоцена. Исследования приаральского палеогена несколько расширили границы распространения этого вида в широтном отношении — прекрасной сохранности пыльца *P. peuceformis* найдена в тасаранских глинах (средний эоцен А. Л. Яншина). Пыльца описанного вида отмечена в флористических комплексах олигоцена Северного Кавказа, Нижнего Дона, Приазовья, Украины и описана автором из олигоцен-миоценовых углей Пасековского карьера Воронежской обл. Ряд авторов вид под названием *Pinus* sp. упоминают в составе спорово-пыльцевых спектров олигоцен-миоцена Германии.

В настоящее время *P. peuce*, или румелийская сосна, растет на горах Балканского п-ва, на высоте 750—2200 м над уровнем моря, образуя леса



с *P. exelsa*, *Abies alba* и *Pinus silvestris*. Считается выносливой породой в климате средних широт.

*Pinus exelsaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 1—3

Препарат № 253  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, глины с растительными остатками второй свиты континентального олигоцена (средний олигоцен).

Пыльца, близкая по морфологическим признакам, известная в литературе:

1953. *Pinus aralica* Б о л х о в и т и н а. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР, стр. 83, табл. XII, фиг. 12 и 13.

Общая длина зерна 87—95  $\mu$ ; ширина тела около 50  $\mu$ , длина тела около 60  $\mu$ , высота 50—55  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 55—57  $\mu$ , высота 46—52  $\mu$ ; ширина гребня 3,6—5,4  $\mu$ .

Форма тела близка к сфероидальной или эллипсоидальной. Очертание в боковой проекции округлое или округло-треугольное (на фиг. 31, 9 и 10 приведены близкие схематические изображения подобной пыльцы).

Мешки сфероидальные, прикреплены к телу несколько суженными основаниями и немного сдвинуты к брюшной стороне его. Зародышевая борозда неясно выражена. Экзина тела двуслойная, внешний слой значительно толще внутреннего. Утолщенный слой экзины на спинной и боковых частях зерна образует щит. Граница щита представляется в виде волнистой линии без какого-либо утолщения. У большинства зерен щит несколько нависает над мешками, образуя фестончатый край. Это хорошо наблюдается при полярном положении пыльцевого зерна.

Поверхность щита крупнобугорчатая, собранная в морщиноподобные складки, что особенно резко выражено на периферийных участках спинной части зерна.

Гребень широкий, с крупнофестончатым контуром.

Экзина брюшной части тела имеет мелкозернистую структуру, вследствие чего рисунок этой части зерна мелкоточечный.

Экзина воздушных мешков снабжена ясно выраженной сетчатой структурой. Ячейки сетки вытянуты по высоте мешков. Ячейки крупные (до 5  $\mu$ ), но по направлению к месту прикрепления мешков размеры ячеек уменьшаются и постепенно сетчатость переходит в неясноточечный рисунок. На брюшной поверхности мешков сетка более четкая, чем на спинной.

Воздушные мешки в месте прикрепления к телу образуют радиально расходящиеся складки, которые проецируются в виде конусообразных тяжей.

Описанный вид имеет большое сходство с пыльцой ныне живущего вида *Pinus exelsa*, а также некоторое сходство с *P. aralica* В о л с к. из верхнемеловых отложений Приаралья. От последнего вида отличается несколько большими размерами и более ясно выраженной границей щита, а также большими размерами воздушных мешков.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: вид имеет значительное вертикальное и широтное распространение. Встречается в Азиатской и Европейской части СССР — от верхнего мела до олигоцена включительно, упоминается в олигоцене Германии. В Павлодарском Прииртышье встречается от нижнего олигоцена до среднего, где особенно широко развита в отложениях

второй свиты. В Северном Приаралье спорадически встречается от верхнего эоцена до низов среднего олигоцена.

Современное распространение *Pinus exelsa* W a l l. ограничивается Гималаями, от Инда до Бутана, где образует высокогорные леса. Растет в сообществе с *Cedrus deodara*, *Pinus longifolia* и другими видами. Предпочитает влажные места обитания и боится открытых и сухих мест.

*Pinus* ex gr. *exelsa* W a l l.

Табл. XIII, рис. 4, 5

Препарат № 259  $\frac{H}{K}$

Неоднократно при аналитической работе встречается форма, близкая к описанной *Pinus* aff. *exelsa* W a l l., но отличающаяся от нее размерами зерна и воздушных мешков, а также более ярко выраженной скульптурой щита. По аналогии она отождествляется с *P. exelsa* W a l l. Однако указанные выше различия, а также худшая, чем у предыдущего вида, сохранность не позволяют провести полного отождествления их.

Общая длина зерна не превышает 85  $\mu$ ; ширина тела 50—60  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 35  $\mu$ ; ширина гребня 3—5  $\mu$ .

Весьма своеобразные для данного вида воздушные мешки прикреплены сильно суженным основанием к брюшной части тела с незначительным смещением на бока. Последнее несколько сближает форму с пыльцой *Pinus* секции *Banksia*. Гребень двуслойный, внешний слой значительно толще внутреннего. Граница щита выражена неясно. Поверхностный слой экзины щита образует крупнобугристую скульптуру, которая обуславливает фестончатую линию очертаний тела. Сетка воздушных мешков выражена неясно. На некоторых экземплярах она почти не определима и проецируется в виде неравномерно точечного рисунка. На таких экземплярах сетка иногда образована прерывистыми или точечными утолщениями. В отличие от пыльцы *P. aff. exelsa*, камеры воздушных мешков сильно смяты или образуют складки, радиально расходящиеся от границы с телом.

Некоторые экземпляры пыльцевых зерен *P. ex gr. exelsa* по внешнему облику несколько напоминают пыльцу *P. nigraeformis* B o l s h. или *Odemossaccus nigraeformis* N a u m. Сходство это обуславливается наличием складок на воздушных мешках. В то же время наши экземпляры отличаются от *Odemossaccus nigraeformis* крупными бугорками на щите и, как следствие этого, — крупнофестончатым контуром тела.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, обн. 6, верхнеолигоценовые песчано-гравийные слои четвертой свиты континентальных отложений.

Секция *Ragacembrae* К о е h n e (?)

Для пыльцы, отнесенной к секции *Ragacembrae*, характерно угловато-эллипсоидальное тело с ромбоидально-округлым очертанием в полярной проекции. Мешки крупные, округлые, несколько угловатые в очертании; прикреплены к телу широкими основаниями. Камеры воздушных мешков сильно надвинуты на тело. В ископаемом состоянии встречен только один вид из секции *Ragacembrae* в меловых отложениях.

*Pinus gerardianaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 6  
 Препарат № 170  $\frac{H}{K}$

**Г о л о т и п:** Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, скв. 1, горизонт подглауконитовых слюдистых глин (мел — палеоцен).

Общая длина зерна 75—92  $\mu$ ; ширина 40—55  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 50—60  $\mu$ , высота до 50  $\mu$ .

Тело неправильно-эллипсоидальной формы, с ромбовидно-округлым очертанием при полярном положении зерна. Экзина двуслойная, с зернистой структурой и мелкобугорчатой скульптурой. Щит покрывает спинную часть тела. Контур тела волнистый или гладкий. Мешки широкие, несколько уплощенные, в полярной проекции имеют угловатые очертания, прикреплены к телу широкими основаниями и сильно надвинуты на тело. Если зерно расположено в полярной проекции мешками кверху, то граница прикрепления мешков просматривается довольно четко вследствие резкого различия в структуре мешков и тела.

Сетка воздушных мешков достаточно четкая, ячейки сетки несколько вытянуты; в области прикрепления мешков к телу они настолько суживаются, что представляются в виде параллельных линий, а не сетки.

**М е с т о н а х о ж д е н и е:** см. голотип.

**Р а с п р о с т р а н е н и е:** Ввиду того, что пыльца описанного вида несколько напоминает пыльцу сем. Podocarpaceae (ромбовидное очертание тела пыльцы в полярной проекции и диаметр мешков несколько превышающий диаметр тела), надо полагать, что наш вид был неоднократно отмечен многими авторами как *Podocarpus* в отложениях верхнего мела Западной и Восточной Сибири, Урала и Казахстана.

Пыльца типа *Pinus gerardianaeformis* встречена в комплексе с различными видами *Cedrus* и Cupressaceae, а также со спорами папоротников тех видов и родов, которые характерны для меловых отложений. Нами вид неоднократно обнаружен в отложениях нижнего палеогена Павлодарского Прииртышья, Приаралья, Тургая и Кара-Тая.

Родина современного вида *P. gerardiana* Wall. — Афганистан, Кафаристан и Западные Гималаи. Там она образует леса вместе с *Cedrus deodara*; предпочитает внутренние долины и приурочена к жаркому и засушливому климату.

ПОДРОД *DIPLOXYLON* КОЕННЕСекция *Sula* Mayr.

Пыльца, отнесенная к секции *Sula*, имеет сильно вытянутое эллипсоидально-веретенообразное тело с несколько уплощенной спинной частью зерна (схематическое изображение зерен этого типа дано на фиг. 32, 15, 16).

Борозда выражена четко. Щит имеет ясно выраженную бугорчатость. Граница щита вырисовывается в виде четкого валика по периферийной части, толщина валика почти вдвое превышает толщину экзины щита.

Воздушные мешки имеют почти эллипсоидальную форму. Если зерно наблюдается в полярной проекции, то мешки представляются несколько сдвинутыми по бокам, если же оно наблюдается в боковой проекции, то обнаруживается, что мешки большей частью сильно сдвинуты к брюшной части тела. Основные морфологические признаки пыльцы, отнесенной к секции *Sula*, совпадают с признаками современной пыльцы этой секции, за исключением размеров. Пыльцевые зерна ископаемых видов значительно меньше (не превышают 50 — 60 — 65  $\mu$ ).

*Pinus longifoliaformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 7—9

Препарат № 191  $\frac{H}{K}$ 

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, пос. Парамоновка, скв. 1, чеганские глины морского палеогена (нижний олигоцен).

Общая длина зерна 65  $\mu$ ; длина тела 48  $\mu$ , высота около 20  $\mu$ , ширина 22—25  $\mu$ ; высота воздушных мешков 25—28  $\mu$ , ширина их около 35  $\mu$ ; высота гребня около 3  $\mu$ .

Тело неправильно-эллипсоидальное, с трапециевидным очертанием в боковой проекции. Воздушные мешки эллипсоидальные, несколько уплощенные, прикреплены к телу суженным основанием и сильно сдвинуты к брюшной стороне тела. Экзина тела двуслойная, на большей части тела образует щит, границы которого у большинства зерен выражены четко в виде волнистой линии. Встречаются единичные экземпляры, у которых граница щита выражена нечетко, и тогда определение их затруднено. Бугорчатая скульптура щита постепенно теряет четкость в направлении к боковой поверхности тела. На брюшной поверхности экзина сохраняет нежную мелкобугорчатую и неясно выраженную скульптуру. Экзина щита двуслойная, нижний слой несколько толще верхнего. Встречаются зерна, у которых оба слоя экзины одинаковой толщины. Поверхность щита на спинной части тела крупнобугорчатая, что обуславливает крупнофестончатый контур его. Гребень выражен четко и сохраняет равную ширину по всей длине; в боковой проекции — поперечно исчерчен.

Экзина воздушных мешков имеет мелкосетчатую структуру; в направлении к основанию мешков ячейки сетки значительно уменьшаются и постепенно переходят в точечный рисунок.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца, подобная описанной, встречается как в морских отложениях олигоцена, так и в континентальных горизонтах среднего олигоцена в Павлодарском Прииртышье и Западной Сибири. Присутствие ее отмечено в нижнетретичных отложениях Тургайской впадины. В более древних отложениях не встречена.

Современное распространение *Pinus longifolia* R o x b. приурочено к горам Афганистана и Гималаев. Горный вид.

*P. longifolia* R o x b. образует чистые леса с подлеском из различных видов *Berberis*, *Cotinus cogigria* и др.

Секция *Pseudostrobus* Endl.

Пыльца, отнесенная к этой секции, характеризуется эллипсоидальной или угловато-округлой формой тела. В полярной проекции тело имеет округлое очертание, в боковой — трапециевидно-овальное. Экзина тела обычно двуслойная, нижний слой значительно тоньше верхнего. Контур тела (в полярной проекции) волнистый. У некоторых видов волнистый контур приурочен лишь к боковым частям тела. Мешки эллипсоидальные, прикреплены к телу суженными основаниями. Схематическое изображение пыльцы секции *Pseudostrobus* (современной и ископаемой) приводится на фиг. 31, 18 и 19.

*Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIII, рис. 10—14

Препараты № 1  $\frac{3я}{K}$  и 186  $\frac{3}{K}$ 

Г о л о т и п: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранские глины (эоцен), нижние отделы тасаранской свиты (препарат № 1  $\frac{3я}{K}$ ).

Общая длина зерна 60—85  $\mu$ ; длина тела 38—45  $\mu$ , ширина около 35  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 35  $\mu$ , ширина 36—38  $\mu$ ; ширина гребня 1,5—2,5  $\mu$ . Встречаются формы значительно меньших размеров.

Тело округло-эллипсоидальное, в боковой проекции трапецевидно-овальное, в полярной — почти правильная окружность. Диаметр тела равен диаметру воздушных мешков или несколько меньше его.

Экзина тела двуслойная в области щита, границы которого не всегда ясно выражены. Нижний слой экзины гладкий и тонкий. Верхний слой гораздо толще нижнего и имеет столбчатую структуру, которая в боковой проекции изображается в виде поперечной штриховки. Поверхность щита равномерно, но слабо бугорчатая. Контур тела в полярной проекции мелкофестончатый. Гребень одинаковой ширины по всей длине, у некоторых экземпляров несколько утолщается в области прикрепления воздушных мешков. В этом случае фестончатый контур тела на боковых его частях выражен яснее, чем в области гребня и брюшной части тела.

Мешки сфероидальные, несколько уплощенные, прикреплены к телу суженными основаниями. Сетка мешков мелкая, ясно выраженная. Ячейки сетки неравномерной величины и формы, но большей частью форма их приближается к округлой. Размер ячеек заметно уменьшается в месте прикрепления мешков к телу.

По внешнему облику описанная пыльца близка к современной *Pinus ponderosa*, за исключением размеров, которые значительно меньше у ископаемых экземпляров.

В некоторых вариантах ископаемый вид напоминает пыльцу современной *P. peuce*, но отличается от нее тем, что его мешки меньше сдвинуты к брюшной стороне и менее уплощены. Кроме того, в отличие от пыльцы *P. peuce*, у ископаемого вида фестончатый контур приурочен ко всему периметру тела, а у пыльцы *P. peuce* фестончатость особенно ярко выражена на боковых его частях.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца, подобная *Pinus ponderosaeformis*, встречается в спорово-пыльцевых спектрах опоковой свиты Прииртышья, в верхнем мелу Казахстана и в эоценовых отложениях Северного Приаралья, Кавказа и юга Европейской части СССР. Единичные находки *P. aff. ponderosa* сделаны в районе восточного борта Тургайской впадины (Ашу-Тасты) — континентальные палеоцен-эоценовые отложения.

Современное распространение *P. ponderosa* Dougl. Каскадные горы в западной части Северной Америки. Вид типично прибрежногорный. Любит сухую и каменистую почву, открытые солнечные склоны. Особенно распространен в горах Сиерра-Невада и в Прибрежных горах. Растет на высоте 1400—2600 м в сообществе с *Pinus Lambertiana*, *Pseudotsuga taxifolia* и *Abies concolor*. Вид — наиболее засухоустойчивый среди прочих видов секции *Pseudostrobus*.

***Pinus bicornis* sp. nov. (pollen)**

Табл. XIV, рис. 1—3

Препараты № 186  $\frac{H}{K}$ , 180  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, глины с растительными остатками, мел — палеоцен (препарат № 186  $\frac{H}{K}$ ).

Общая длина тела 60—70  $\mu$ , высота 30—35  $\mu$ , ширина около 35  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 25  $\mu$ , у некоторых экземпляров до 30  $\mu$ , ширина мешков около 30  $\mu$ ; ширина гребня 2,5—4  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, очертание в боковой и полярной проекциях овальное, иногда в боковой проекции — овально-трапециевидное.

Экзина тела двуслойная. Почти на всей поверхности тела, за исключением брюшной части его и участков прикрепления воздушных мешков, экзина образует щит с неявно выраженной границей. В области прикрепления воздушных мешков экзина щита несколько утолщается, образуя бугорчато-складчатые выросты, которые в полярной и боковой проекциях имеют ярко выраженный фестончатый контур. У гребня контур волнистый или гладкий, в проекции — поперечно-штриховатый. Поверхность щита мелко- и слабобугорчатая. Воздушные мешки имеют ясно выраженный сетчатый рисунок. У многих экземпляров сетка двойная: внешняя — более крупная, и внутренняя — более мелкая. Ячейки сетки имеют угловатые очертания, сильно уменьшаются по направлению к периферийным частям, приобретая вытянутую форму.

Мешки прикрепляются к телу несколько суженными основаниями, но у некоторых экземпляров этот признак не выдерживается: прикрепление происходит по широкому основанию мешков.

Ископаемая пыльца имеет большое сходство с пыльцой *P. Montezumae* Lam b., но также из гербарного материала; есть у нее общие черты и со всеми видами пыльцы современных сосен из секции *Pseudostrobus*, отличающейся в основном от пыльцы секции *Strobus* наличием фестончатых выростов экзины на боковых частях щита.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: Павлодарское Прииртышье, Западно-Сибирская низменность, верхний мел — палеоцен, единично — нижний эоцен — нижний олигоцен.

*Pinus minutus* sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 4

Препараты № 161  $\frac{H}{K}$ , 162  $\frac{H}{K}$  и 191  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, обр. 245, пропластки с растительными остатками в верхнечеганских глинах (препарат № 191  $\frac{H}{K}$ ).

Общая длина зерна 45—50  $\mu$ ; длина тела 30—35  $\mu$ , высота — около 25  $\mu$ , ширина около 27  $\mu$ ; ширина воздушных мешков около 20  $\mu$ , высота их около 23  $\mu$ ; ширина гребня около 3  $\mu$ .

Тело округло-эллипсоидальное, очертание в боковой и полярной проекциях — правильный овал или окружность (схематическое изображение дано на фиг. 31, 16, 17). Экзина двуслойная. Щит покрывает две трети тела; границы щита выражены неявно, поверхность его крупнобугорчатая. Гребень — по отношению к величине тела толстый, одинаковой высоты по всей длине. Контур тела крупнофестончатый; фестончатость особенно резко выражена на боковых частях тела.

Воздушные мешки сфероидальные, прикрепляются к телу суженными основаниями и несколько раздвинуты по бокам. Линия прикрепления мешков ясно выражена. Сетка на мешках мелкая и четкая.

По величине ископаемое пыльцевое зерно резко отличается от всех видов *Pinus* секции *Pseudostrobus*, но остальные морфологические признаки позволяют отнести его к этой секции. Мелкие же размеры зерна служат основанием к тому, чтобы этому виду было дано название *minutus* (т. е. очень маленький).

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: *Pinus minutus* появляется в олигоценовых отложениях. В Павлодарском Прииртышье отмечен в самых верхних

горизонтах нижнего олигоцена (верх чеганской свиты); в Северном Приаралье распространен только в среднем олигоцене.

#### Секция *Taeda Spach.*

Пыльца, отнесенная к секции *Taeda*, имеет эллипсоидальное тело с трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции. Округлые воздушные мешки прикреплены к телу широкими основаниями и несколько сдвинуты к брюшной части тела (фиг. 32, 14). Щит хорошо выражен и отделяется от брюшной части тела рубчиком. Поверхность щита мелкобугорчатая. Гребень узкий, ровный или слегка волнистый, двуслойный, поперечно штриховатый. Слои щита одинаковой толщины. Гребень у некоторых экземпляров имеет по краям большие утолщения. Граница между телом и мешками выражена ясно.

#### *Pinus taedaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 5—11

Препарат № 1  $\frac{3\alpha}{K}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, тасаранская свита, верхи среднего эоцена.

Общая длина зерна 67—82—90  $\mu$ ; длина тела 60—70  $\mu$ , высота 46—50  $\mu$ ; высота воздушных мешков 25—35  $\mu$ , ширина их около 41  $\mu$ ; ширина гребня 3—3,5  $\mu$ .

Тело овальное или эллипсоидальное, очертание в боковой проекции трапециевидно-овальное. Зародышевая борозда четкая. Экзина тела двуслойная, образует ясно выраженный щит с хорошо заметной границей в виде волнистого или прямого рубчика. Поверхность щита мелкобугорчатая. Ниже щита поверхность тела также мелкобугорчатая, а в области зародышевой борозды — гладкая. По бокам щита на спинной поверхности экзины у некоторых экземпляров заметно небольшое утолщение. Вследствие утолщения щита при боковой проекции обрисовываются так называемые «плечики», характерные также для некоторых видов пыльцы сосен секции *Sembrae*. Гребень относительно узкий, одинаковой толщины по всей длине. У некоторых экземпляров, как упоминалось выше, гребень несколько утолщается по краям (в области прикрепления мешков). При боковом положении зерна различается поперечная штриховатость гребня. Щит двуслойный, оба слоя одинаковой толщины.

Воздушные мешки сфероидальные, несколько уплощенные, прикрепленные к телу суженным (иногда широким) основанием. Обычно мешки прикрепляются по бокам тела, в нижних его частях, так что оказываются несколько сдвинутыми к брюшной стороне. Поэтому расстояние между воздушными мешками, если зерно расположено в полярной проекции мешками вверх, — небольшое. Сетка мешков мелкая, четкая, равномерная по всей поверхности, в области же прикрепления к телу сильно измельчается и переходит в неясноточечный рисунок.

Пыльца *Pinus taedaeformis* по морфологическим признакам весьма близка к большинству разновидностей пыльцы современного вида *P. taeda*, описанной В. П. Гричуком с соавторами (in litt.) из гербарного материала. Ископаемая пыльца отличается от современной несколько меньшими размерами, что, впрочем, наблюдается и у пыльцы других секций.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: вид широко распространен в третичных отложениях Казахстана. В Северном Приаралье он дает первый максимум

в саксаульской свите (верхний эоцен) и затем продолжает встречаться в больших количествах вплоть до верхов среднего олигоцена. В Павлодарском Прииртышье и в Западной Сибири вид распространен с середины среднего олигоцена (вторая свита). В более древних отложениях встречаются близкие виды, но из-за отклонения в размерах и плохой сохранности они отнесены к секции *Taeda*. То же самое можно сказать и о пыльце из отложений четвертой свиты континентальных отложений. Экземпляры, выделенные из отложений четвертой свиты, отличаются меньшей величиной, чем тот же вид в более древних слоях.

Общая длина пыльцевого зерна не превышает 64  $\mu$ , при ширине тела, равной 45  $\mu$ , и диаметре мешков от 25 до 32  $\mu$ . В остальном морфологические признаки ископаемого вида весьма близки к пыльце вида *Pinus taeda* L. Однако в списках она отнесена лишь к секции *Taeda*.

В настоящее время *P. taeda* распространена в Северной Америке, где образует обширные леса по низменностям и долинам рек.

#### Секция *Australes* Loud. (?)

Пыльца, относящаяся условно к секции *Australes*, имеет тело эллипсоидальной формы с овальным трапецевидно- или ромбовидно-округлым очертанием (в полярной проекции) и с воздушными мешками угловато-сфероидальной формы. Мешки несколько вытянуты по высоте и в полярной проекции имеют очертания угловатые, близкие к треугольным. Прикрепляются воздушные мешки к телу сильно суженными основаниями; граница между телом и мешками четкая. Щит неясно выражен, а если намечается, то покрывает только спинную часть тела, утолщаясь по краям. Контур тела при полярном положении зерна изображается слабоволнистой линией, а экзина тела проецируется в виде тонкого ободка. Схематическое изображение пыльцы типа секции *Australes* в полярной проекции представлено на фиг. 32, 20.

Ископаемая пыльца, описание которой приводится ниже, отнесена к секции *Australes* условно, так как, хотя и имеет общие черты с пыльцой некоторых современных видов в очертании тела и воздушных мешков, в то же время отличается отсутствием ясно выраженного щита на спинной части тела.

#### *Pinus singularis* sp. nov. (pollen)

Табл. XIV, рис. 12—16

Препараты № 2  $\frac{3я}{К}$ , 255  $\frac{3}{К}$  и 259  $\frac{3}{К}$

Г о л о т и п: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, морские глины нижних горизонтов среднего олигоцена (препарат № 2  $\frac{3я}{К}$ ).

Общая длина зерна около 95  $\mu$ ; длина тела 47—56  $\mu$ , высота около 45  $\mu$ , ширина около 55  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 50—58  $\mu$ , высота около 48  $\mu$ ; ширина гребня 1,5—3  $\mu$ .

Тело сфероидальное или эллипсоидальное; в полярной проекции — овального, а иногда трапецевидного очертания. Экзина тела двуслойная, оба слоя одинаковой толщины. На спинной части тела экзина образует небольшой щит, который не имеет резко выраженных очертаний, а незаметно сливается с мелкобугорчатой скульптурой боковых поверхностей тела. Структура экзины зернистая. Поверхность щита мелкобугорчатая или мраморовидно-бугорчатая. На боковых поверхностях тела, в тех участках, где щита нет, рисунок поверхности крупноточечный. Гребень узкий и одинаковой толщины по всей длине или совсем отсутствует.



В том случае, когда он намечается, контур его мелкофестончатый; тогда в боковой проекции хорошо видна поперечная штриховатость гребня. Контур тела в области прикрепления мешков мелкофестончатый. Эта особенность наблюдается у пыльцевых зерен из наиболее молодых горизонтов палеогена; эоценовые экземпляры обычно лишены заметных выростов на боковых сторонах тела.

Воздушные мешки сфероидальные, несколько вытянуты по высоте, прикреплены к телу суженными основаниями и в полярной проекции имеют у большинства пыльцевых зерен угловатые очертания. Последнее относится к разновидностям, выделенным из наиболее высоких горизонтов палеогена (табл. XIV, рис. 13 и 14).

Более древние формы имеют мешки с очертанием в виде почти правильной окружности.

Сетка на мешках четкая и мелкая. Форма ячеек близка к прямоугольной; ячейки обычно сильно вытянуты по высоте мешков и постепенно переходят в радиальную штриховатость.

Пыльца *Pinus singularis* имеет некоторое сходство с *Pinus palustris* Mill. из гербарного материала. Некоторым отличием от нее могут служить более угловатые очертания формы тела и воздушных мешков, а также значительно более тонкая экзина тела. Следует отметить, что пыльца многих современных видов рода *Pinus* имеет значительные отклонения и вариации в размерах и форме зерен внутри одного и того же вида. В некоторых случаях основная масса зерен имеет свои специфические особенности, которые дают право почти с полной уверенностью давать видовое определение. В целом же ряде случаев среди общей массы пыльцы, принадлежащей к одному виду *Pinus*, лишь небольшая часть зерен имеет классическую форму, остальные же имеют неясные признаки вида. Тогда при характеристике вида приходится базироваться на морфологических особенностях ясно выраженных типов зерен. Примерно 70% пыльцы *Pinus palustris*, выделенной из коллекций гербарного материала, обладают характерными признаками, которые взяты в основу при определении. Остальные зерна имеют сильные отклонения как в форме и очертаниях, так и в размерах. Пыльца *Pinus singularis* сходна с той частью пыльцевых зерен *Pinus palustris*, у которых воздушные мешки имеют угловатые очертания и тонкую экзину на теле.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: форма, имеющая большое сходство с *P. singularis*, но под названием *Pinus* секции *Eupitys* или *Pollenites* typ. *Pinus silvestris* встречается в олигоценовых отложениях Западной Европы, на юге Европейской части СССР, на Урале, в Казахстане. В Приарале пыльца этого вида встречается в отложениях тасаранской свиты (эоцен), в виде единичных зерен в спектрах из чеганских отложений, а также в континентальных отложениях Приаралья и Прииртышья.

Современное распространение *Pinus palustris* Mill. в основном приурочено к районам Северной Америки. *Pinus palustris* не любит горных районов и является деревом равнинных местообитаний, с сухими песчаными почвами. Образует чистые светлые леса, в подлеске которых часто встречается пальма *Sabal serrulata*.

#### Секция *Banksia* Mayr.

Для пыльцы, отнесенной к секции *Banksia*, характерны небольшие размеры, эллипсоидальное тело, которое в боковой проекции имеет угловато-эллиптическое очертание с дугообразным выгибом на спинной части. Воздушные мешки, сфероидальные или полусфероидальные, прикреплены к брюшной поверхности тела узкими или широкими основаниями.

У некоторых экземпляров мешки имеют угловатые очертания. Щит у большинства экземпляров имеет ясно выраженную границу. Гребень узкий, почти одинаковой толщины по всей длине, контур гребня мелкофестончатый или ровный. Экзина на спинной части зерна (щит) двуслойная, в большинстве случаев нижний слой экзины несколько толще верхнего (схематическое изображение пыльца этого вида дано на фиг. 32, 13).

Пыльца, принадлежащая к секции *Banksia*, неоднократно упоминается в литературе при описании спорово-пыльцевых спектров из отложений третичного и мелового возраста.

*Pinus banksianaeformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XV, рис. 1—4

Препарат № 186  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, глины подглауконитовой толщи (мел — палеоген).

Общая длина зерна 60—75  $\mu$ ; длина тела около 48  $\mu$ , высота около 25  $\mu$ , ширина 23—25  $\mu$ ; высота воздушных мешков около 22  $\mu$ ; высота гребня 1,5—2  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, угловато-эллиптическое в боковой проекции. Спинная часть тела дугообразно выгнута. Экзина двуслойная, оба слоя одинаковой толщины. Слои настолько незаметно переходят один в другой, что граница между ними улавливается с трудом. Щит покрывает спинную часть тела и большую часть боковых его поверхностей. Граница щита в виде волнистой линии проходит по нижней части боковой поверхности тела; иногда граница неясная. Поверхность щита мелкоаморфно-бугорчатая. Гребень тонкий, одинаковой толщины по всей длине, имеет поперечную штриховатость и почти ровный контур. У части встреченных пыльцевых зерен заметны небольшие утолщения экзины в области прикрепления воздушных мешков.

Воздушные мешки, сфероидальные или полусфероидальные, мелкие по сравнению с величиной тела, прикреплены к брюшной части тела. Сетка на мешках мелкая и неясная. В месте прикрепления мешков к телу сетка постепенно деформируется, и рисунок поверхности мешков становится таким же мелкоточечным, как и бугорчатая поверхность тела.

Ископаемая пыльца имеет внешнее сходство с современной пылью *Pinus Banksiana* Lam b., отличаясь от нее более угловатыми очертаниями мешков и тела и менее ясной сеткой на мешках. Кроме того, гребень у ископаемых видов несколько уже, чем у современных.

Некоторые формы, весьма близкие по общим морфологическим признакам, но отличающиеся большей величиной, наличием ясно выраженной сетки на мешках и более округлым очертанием тела, выделены из тасаранских глин выходящих на горе Тас-Аран в Северном Приаралье. Форму эту автор встречал только в отложениях эоценового возраста в Приаралье и в опоковых среднеэоценовых глинах в Павлодарском Прииртышье.

Изображение *Pinus banksianaeformis* из эоценовых отложений см. на табл. XV рис. 3 и 4. Форма выделена, зарисована и микрофотографирована с препарата № 2  $\frac{3}{K}$ .

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: формы, морфологически близкие к *Pinus banksianaeformis*, имеют, по-видимому, широкое распространение в меловых отложениях, ведя свое начало еще со среднего мела. В литературе можно встретить упоминание о подобной форме в верхнемеловых отложениях Среднего и Южного Урала, Западной Сибири, Казахстана и в южных

и западных районах Европейской части СССР. Отмечена на западе Европы, в мезозойских и нижних отделах кайнозойских отложений. Форма, близкая к *P. banksianaeformis*, описана Н. А. Болховитиной (1953, табл. XII, фиг. 9, 10 и 11) под названием *P. subconcinua* N a u m. (*Oedemosaccus subconcinuus* N a u m).

Современный вид *Pinus Banksiana* L a m b. распространен в Северной Америке (в основном в Канаде). Это самый северный вид сосен Северной Америки. *P. Banksiana* L a m b. морозоустойчива, селится на песчаных почвах; образует большие леса. Возможно, что описанный нами вид был также наиболее холодоустойчив, так как появляется он в спектрах переходного горизонта от мела к палеогену, который, как известно, знаменуется относительным похолоданием.

#### *Pinus* aff. *halepensis* M i l l.

Табл. XV, рис. 5

Препарат 3  $\frac{3я}{К}$

Общая длина зерна 73—80  $\mu$ ; длина тела 48—52  $\mu$ , высота 22—30  $\mu$ ; высота воздушных мешков 25—30  $\mu$ , ширина 25—31  $\mu$ ; ширина и высота гребня 2—3  $\mu$ .

Тело эллипсоидальной формы, с овальным или эллиптическим очертанием в боковой проекции. Экзина двуслойная. На спинной и большей части боковых поверхностей экзина образует щит. Граница щита представлена извилистой линией. Край щита слегка утолщен. Поверхность щита мелко-плоскобугорчатая. Гребень неширокий, двуслойный; нижний слой несколько толще верхнего. Ширина гребня одинаковая по всей длине, контур его почти ровный, иногда в виде слабо волнистой линии. Поверхность тела вне щита мелкобугорчатая, бугорчатость неясная.

Воздушные мешки сфероидальные, слегка уплощенные, прикреплены к телу несколько суженными основаниями в брюшной части тела. Граница прикрепления мешков к телу четкая. Сетка мешков ясная и четкая. Ячейки сетки крупные, форма ромбовидная. По направлению к месту прикрепления мешков к телу размер ячеек сильно уменьшается.

Описанный вид отличается от пыльцы *Pinus banksianaeformis* менее угловатыми очертаниями тела и мешков, более крупной и четкой сеткой. Вид, выделенный нами из палеогеновых отложений, имеет близкое сходство с пыльцой ныне живущего вида *P. halepensis*, от которой отличается лишь несколько меньшей величиной.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Северное Приаралье, гора Тас-Аран, морские глины тасаранской свиты (средний эоцен).

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Pinus* aff. *halepensis* встречается только в тасаранской свите (средний эоцен) в Северном Приаралье.

Современный вид *Pinus halepensis* M i l l. распространен в западной части Средиземноморской области. Любит равнинные местообитания, на больших высотах появляется редко.

#### Секция *Eupitys* Spach.

Пыльца, отнесенная к секции *Eupitys*, имеет округло-эллипсоидальное тело с правильным трапециевидно-овальным очертанием в боковой проекции (фиг. 32, 21). Экзина тела двуслойная, оба слоя почти всегда одинаковой толщины. Щит не имеет рубчика по границе; граница выражена слабо волнистой линией. Гребень гладкий или очень слабо волнистый. Мешки у пыльцы *Pinus* секции *Eupitys* — правильной сфероидальной формы, прикреплены к телу суженным основанием и несколько сдвинуты к брюшной стороне его. Сетка на мешках четкая.

*Pinus protosilvestris* sp. nov. (pollen)

Табл. XV, рис. 7  
 Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

**Г о л о т и п:** Павлодарское Прииртышье, близ пос. Парамоновка, в 16 км западнее г. Павлодара, скв. 1, обр. 245, верхние отделы чеганских глин (верх нижнего олигоцена).

Общая длина зерна 90—105  $\mu$ ; длина тела 60—70  $\mu$ , высота 45—55  $\mu$ , ширина 42—50  $\mu$ ; высота воздушных мешков 36—45  $\mu$ , ширина их 40—42  $\mu$ ; ширина гребня 4,0—4,5  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, очертание в боковой проекции — близкое к трапециевидному, в полярной — правильно-овальное. Экзина двуслойная, слои одинаковой толщины. Щит покрывает только спинную часть тела. Граница щита изображается почти прямой линией. Рубчик по краю щита отсутствует. Зародышевая борозда выражена неясно. Экзина ниже щита, на боковых и брюшной частях тела, почти гладкая, иногда неясноточечная. Поверхность щита неясномчатая или неясномраморовидная. Гребень — одинаковой ширины по всей длине. Контур гребня мелкоизвилистый, почти ровный; в боковой проекции хорошо видна поперечная штриховатость.

Воздушные мешки сфероидальные, немного уплощены по высоте, прикреплены к телу суженным основанием и несколько сдвинуты на брюшную часть тела. Когда пыльцевое зерно находится в полярном положении мешками вверх, то, из-за того, что мешки сдвинуты на брюшную сторону, иногда создается ложное впечатление, будто они прикреплены к телу широким основанием. Сетка на мешках выражена неясно, ячейки сетки неравномерной величины. На центральных частях мешков рисунок сетки улавливается при увеличении в 400 раз, на периферийных же участках рисунок ее измельчается и постепенно сливается с точечной структурой тела. Линия прикрепления мешков к телу четкая. Угол между линией очертания тела и мешков (в месте их прикрепления) выражен ясно, в особенности, если зерно находится в боковом положении.

Ископаемая пыльца по морфологическим признакам имеет сходство с пылью ныне живущей *Pinus pinaster* Sol., описанной В. П. Гричук с соавторами (in litt.); отличается *P. pinaster* менее ясно выраженной сеткой мешков, более уплощенной формой камер мешков и большими размерами.

**М е с т о н а х о ж д е н и е:** см. голотип.

**Р а с п р о с т р а н е н и е:** Павлодарское Прииртышье, палеогеновые морские и континентальные отложения. В других местах неизвестна. Возможно, что не была распознана и из-за своих крупных размеров принималась аналитиками за пыльцу ели или пихты.

Современное распространение вида *Pinus pinaster* Sol., с пылью которой можно сравнить ископаемый вид сосны приморской, приурочено к странам Средиземноморской области и к южной части европейского побережья Атлантического океана. Селится по берегам моря, любит сухие каменистые почвы и дюны.

Появление пыльцы *Pinus protosilvestris* в морских отложениях верхних отделов чеганских глин, т. е. в то время, когда чеганское море уже заканчивало свой цикл на изучаемой территории и вскоре начало отступать, можно связать с явлениями поднятия береговых участков и с образованием отмелей и прибрежных дюн, наносимых сильными ветрами. По-видимому, появление пыльцы *P. protosilvestris* также связано с усиливающейся аридизацией климата.

*Pinus aff. silvestris* L.

Табл. XV, рис. 8—11, 13

Препараты № 161  $\frac{H}{K}$ , 162  $\frac{H}{K}$  и 163  $\frac{H}{K}$ 

Общая длина зерна 72—75  $\mu$ ; длина тела около 55  $\mu$ , высота 35—42  $\mu$ , ширина 32—40  $\mu$ ; ширина воздушных мешков 25—27  $\mu$ , высота их 24—30  $\mu$ ; ширина гребня около 2,5  $\mu$ .

Тело эллипсоидальное, с трапециевидно-эллипсоидальным очертанием в боковой проекции. В полярной проекции тело имеет очертание правильного овала. Экзина двуслойная, образует на спинной и отчасти на боковых частях тела щит. Поверхность щита мелкобугорчатая, границы его не всегда ясно выражены. Гребень узкий, поперечно исчерченный, одинаковой толщины по всей длине, контур гребня почти ровный. Двуслойность экзины даже в области гребня плохо различима.

Воздушные мешки прикреплены к телу узким основанием и сильно сдвинуты на брюшную часть. Линия границы прикрепления мешков выражена четко. Сетка на мешках четкая, ячейки некрупные; они одинакового размера по всей поверхности мешков и только у самой границы прикрепления мешков к телу диаметр их значительно уменьшается.

Ископаемый вид имеет большое сходство с пылью современной сосны *Pinus silvestris* L., разновидности которой описаны М. Х. Моносзон-Смолиной (1949), В. В. Зауер (1950) и В. П. Гричуком с соавторами (in litt.). Наш вид по размерам близок к наиболее крупным разновидностям пыли современной *P. silvestris*.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, скв. 1, глины нижних горизонтов континентальных отложений (средний олигоцен) и верхние горизонты чеганских глин (нижний олигоцен).

Пыльца ископаемого вида *Pinus aff. silvestris* значительно варьирует в размерах в зависимости от стратиграфического положения находок. Так, большинство экземпляров пыли *P. aff. silvestris* размером 50—65  $\mu$  и менее приурочено к плиоценовым и четвертичным отложениям (табл. XV, рис. 14, 15, 16).

Разновидность пыли *Pinus aff. silvestris* L. несколько больших размеров, подобная изображенной на табл. XV, рис. 12, и с несколько более крупной сеткой, встречается в спектрах из самых нижних отделов палеоцена (препарат № 180  $\frac{H}{K}$ ). Возможно, что правильнее называть его не

*Pinus aff. silvestris*, а *P. silvestrieformis*. С другой стороны, почти тождественное сходство с пылью современной *Pinus silvestris* позволяет сопоставлять ее с этим видом, допуская раннее появление *Pinus* секции *Euritys* во флоре кайнозоя.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *P. aff. silvestris* — один из наиболее распространенных видов пыли всего рода *Pinus*, в неогеновых отложениях Европейской и Азиатской части СССР. Однако вид известен из отложений палеогена (верхов его) Азиатской и Европейской части СССР в виде единичных находок. Обычен в миоцене Европы и западной части СССР. Широко распространен в плиоценовых отложениях Европейской части СССР. В Казахстане встречается в больших количествах, преимущественно в среднем и верхнем олигоцене, в миоцене, миоцен-плиоцене и в четвертичных отложениях.

Современное распространение *Pinus silvestris* весьма обширно. Границы ее ареала распространяются вдоль всего материка Евразии, исключая Дальневосточный край, от 70 до 50° с. ш. При этом она имеет весьма большой широтный диапазон, встречаясь от равнинных мест до горных райо-

нов. Один из наиболее распространенных видов рода в северном полушарии, также обычное и почти единственное древесное растение южных степей.

### Род *Tsuga* Carr. — Тсуга

Пыльца растений, принадлежащих к роду *Tsuga*, имеет сфероидальную форму. Размер пыльцевых зерен варьирует от 50 до 110  $\mu$  в зависимости от принадлежности к виду. Тело пыльцевого зерна обложено в морщинистую оболочку, более или менее равномерно отслаивающуюся от тела. В проекции отслаивающаяся, собранная в складки или морщины оболочка образует как бы кайму вокруг тела с неровным фестончатым контуром. Контур неравномерно поперечно исчерчен, что обусловлено проекцией стенок складок экзины.

Если морщины или складки глубокие, то поверхность зерна имеет крупносетчатую структуру [*Tsuga diversifolia* (M a x i m.) M a s t.]. Сетка эта является результатом проекции ребер складок на экзине. Некоторые виды *Tsuga* имеют бугорчатую экзину, не смятую в складки [*Tsuga canadensis* (L.) C a r r., описанная В. В. Зауер в 1950 г.].

В ископаемом состоянии пыльца *Tsuga* встречается в верхнепалеогеновых отложениях Европейской части СССР, в третичных отложениях Урала, в плиоцене Поволжья. В большом количестве встречается в миоценовых отложениях Европейской части СССР и на Южном Урале.

Автором найдены два вида пыльцы *Tsuga* в Северном Казахстане и в Северном Приаралье, в отложениях первой и второй свит континентального олигоцена, т. е. в среднем олигоцене, а также в более высоких горизонтах олигоцена и в миоцене. В спектрах, содержащих пыльцу *Tsuga*, кроме хвойных, обычно присутствует пыльца широколиственных пород, в основном принадлежащих к листопадному комплексу, что свидетельствует о сравнительно умеренно влажных условиях обитания. В континентальных отложениях Казахстана выделено два вида пыльцы *Tsuga*: крупная и мелкая. Крупная пыльца близка по морфологическим признакам к пыльце современной *Tsuga diversifolia* (по описаниям Эрдмана, 1943, и Зауер, 1950). Однако ясно выраженная сетчатость на поверхности ископаемого зерна, обусловленная сравнительно симметрично расположенными морщинами экзины, не позволяет полностью отождествить этот вид с современным видом. Ввиду того, что пыльца современных растений *Tsuga* еще недостаточно изучена, осторожнее будет ископаемым формам присвоить видовое название по морфологическим признакам. Это название, систематическое в отношении родовой принадлежности и искусственное в отношении принадлежности к виду, следует считать временным (это касается всех видовых наименований ископаемой пыльцы кайнозойских отложений), так как со временем, изучив пыльцу ныне живущих растений, мы сумеем большинство искусственно выделенных видов привести к системе.

### *Tsuga crispa* sp. nov. (pollen)

Табл. XVI, рис. 1

Препарат № 342  $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, р. Кара-Су, обн. 13, слоистые глины с растительными остатками первой свиты континентальных отложений (средний олигоцен).

Диаметр пыльцевого зерна 99  $\mu$ , толщина оторочки 6—8  $\mu$ , толщина экзины 0,7  $\mu$ .

Пыльца *Tsuga crispa* sp. близка по строению к современной *T. diversifolia*; отчасти близки они и по строению морщинистой экзины (крупная

кружевная складчатость), но так как к настоящему времени из 14 современных видов пыльцы *Tsuga* нам известны только 3, то отождествлять ее с *T. diversifolia* преждевременно.

В спорово-пыльцевых спектрах *T. crispa* sp. nov. сопутствует разнообразному и богатому комплексу различных видов сосны и *Taxodium*, а также большому и разнообразному комплексу широколиственных листопадных пород.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: Павлодарское Прииртышье и Северное Приаралье, средний и верхний олигоцен, нижний миоцен.

*Tsuga torulosa* sp. nov. (pollen)

Табл. XVI, рис. 2

Препарат № 431  $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, р. Кара-Су, обн. 13, слой глин с пропластками отмытого песка (первая свита, средний олигоцен). Диаметр пыльцевого зерна 49,5  $\mu$ , толщина оторочки 6  $\mu$ , толщина экзины 1  $\mu$ .

Строение оболочки этого вида пыльцы резко отличается от такового у современной пыльцы *T. diversifolia*. Экзина у пыльцевого зерна *T. torulosa*, помимо складчатости, имеет бугорчатую структуру. Поэтому на поверхности зерна не обнаруживается, как у *T. diversifolia*, сетчатого рисунка; поверхность ископаемого зерна слегка напоминает поверхность пыльцы *Sciadopitys*, отличаясь от нее наличием более мелких бугорков.

Пыльца *T. torulosa* имеет некоторое сходство с пыльцой ныне живущего вида *T. canadensis*, но отличается от него меньшими размерами (диаметр *T. canadensis*, по описанию В.В. Зауер, 53—63  $\mu$ ), а также более мелкой бугристостью экзины.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: Павлодарское Прииртышье, средний — верхний олигоцен.

В ископаемом состоянии пыльца *T. torulosa* встречается в сообществе с *Pinus* секции *Strobus*, *Abies*, *Carpinus*, *Liquidambar*, *Quercus tuberculata* и др., что свидетельствует о сравнительно умеренном климате.

СЕМ. TAXODIACEAE W. NEGER — ТАКСОДИЕВЫЕ

Пыльца ископаемых видов, относимых к сем. Taxodiaceae, имеет однокамерное строение. Воздушные мешки отсутствуют. В основном пыльцевые зерна округлой формы, однопоровые и безбороздные, за исключением рода *Sciadopitys*, пыльца которого лишена поры и снабжена одной зародышевой бороздой. Размеры варьируют от 23 до 50  $\mu$ , в зависимости от принадлежности к роду и виду. Большинство родов сем. Taxodiaceae имеет пыльцу, легко сминающуюся и теряющую при захоронении свои первоначальные очертания. Кроме того, пыльцевые зерна часто дают трещину, которая обычно образуется в плоскости порового отверстия, рассекая зерно почти на два полушария. Поровое отверстие у некоторых родов сем. Taxodiaceae (*Taxodium*, *Cryptomeria*, *Sequoia*) снабжено конусообразным выступом экзины. Экзина пыльцевых зерен обычно двуслойная, внешний слой экзины обычно снабжен бугорчатыми или мелкошиповатыми выростами. В редких случаях некоторые разновидности пыльцы таксодиевых имеют гладкую поверхность.

Наиболее хорошо распознаваемы пыльцевые зерна *Taxodium*, *Sequoia* и *Sciadopitys*. Остальные роды этого семейства по пыльце выделяются

с трудом, так как имеют большое сходство с пыльцой растений сем. Cupressaceae.

Ниже выделяется группа неопределенной одноклеточной пыльцы, которая по морфологическим признакам близка как к сем. Taxodiaceae, так и к сем. Cupressaceae.

#### Род *Sciadopitys* Sieb. et Zucc — Сциадоптитис

*Sciadopitys tuberculata* sp. nov. (pollen)

ex gr. *S. verticillata* Sieb. et Zucc.

Табл. XVI, рис. 3  
Препарат № 269  $\frac{3}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, оз. Маралды, обл. 66, континентальные отложения верхнего олигоцена.

Виды, близкие морфологически, известные по литературным данным:

1934. *Sporites serratus* Potonie Nenitz. Zur Mikrobotanik des miozänen Humdils der Niederrheinischen Bucht, Taf. I, Fig. 6, 7.
1935. *Sciadopitys typus* Rudolph. Mikrofloristische Untersuchung tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen, Taf. 5, Fig. 14, 15.
1937. *Sciadopitys pollenites serratus* Thiergart. Die Pollenflora der Niederlansitzer Braunkohle, besonders im Profil der Grube Marga bei Senftenberg, Taf. 23, Fig. 14.
1940. *Sciadopitys* Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. II, Fig. 5; Taf. IV, Fig. 10; Taf. V, Fig. 2.
1942. *Sciadopitys pollenites serratus* Wicher. Praktikum der angewandten Mikropaläontologie, Taf. 28, Fig. 18.

Длина зерна 43—45  $\mu$ , ширина 30—35  $\mu$ .

Пыльцевое зерно почти округлое, однобороздное, беспоровое. Борозда расположена на внешней, дистальной стороне зерна. Зерно большей частью несколько смято и борозда не всегда четко выражена. Экзина двуслойная, нижний слой тоньше верхнего. Общая толщина экзины около 5  $\mu$ . Внешний слой экзины снабжен или, вернее, состоит из крупных (до 4,5  $\mu$  в диаметре) бугорков, вершины которых несколько уплощены. Бугорки расположены плотно один к другому и проекция их с поверхности выглядит крупносетчатой. Контур зерна крупнофестончатый. Пыльца *Sciadopitys tuberculata* sp. nov. по внешнему облику несколько напоминает пыльцу современного вида *S. verticillata* Sieb. et Zucc., описание которого приведено в работе В. В. Зауер (1950), однако бугорки на его поверхности значительно крупнее.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Sciadopitys* весьма распространена в неогеновых отложениях Западной Европы и Европейской части СССР. В вертикальном отношении *Sciadopitys* имеет довольно широкий диапазон, встречаясь в комплексе спектров пыльцы хвойных от низов палеоцена до плиоцена. По-видимому, этот вид имел достаточно большое распространение и в широтном направлении. Автором пыльца *Sciadopitys* найдена в палеоцене среднего и нижнего Поволжья, на Дону и в Приазовье, а также в среднеолигоценовых отложениях Казахстана. В поволжских палеогеновых спектрах встречена разновидность пыльцы *Sciadopitys* с несколько более мелкой бугорчатостью. В Казахстане же встречаются только крупнобугорчатые формы, подобные *Pollenites serratus* Potonie, с которыми наш вид имеет почти полное сходство, за исключением того, что он несколько меньше.

По данным В. В. Зауер, крупные остатки деревьев, по морфологическим признакам напоминающие зонтичную сосну (*Sciadopitys*), найдены еще в меловых отложениях Гренландии.



Насколько широко был распространен род *Sciadopitys* и насколько он был богат видами, — это по пыльцевым данным еще неясно. Во всяком случае, по-видимому, род *Sciadopitys* в достаточной мере древний. В настоящее время он представлен всего одним видом — *S. verticillata* Sieb. et Zucc., известным только в Японии.

*Sciadopitys verticillata* Sieb. et Zucc. — древесное растение с вечнозелеными листьями в виде хвои. Родина его — горная часть Японских островов. Растет в смешанных лесах совместно с *Chamaecyparis abtusa*, *Ch. pisifera*, *Tsuga sieboldii*, *Pinus densiflora*, *Abies firma*, *Aesculus turbinata* и *Magnolia obovata*. Любит защищенные от ветров ущелья и приурочен к областям с прохладным океаническим климатом.

### Род *Sequoia* Endl. — Секвойя

*Sequoia* aff. *semperviriformis* sp. nov. (pollen)

Табл. XVI, рис. 4,5

Препарат № 186  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, слюдяные глины из подглауконитовой свиты (верхний мел, датский ярус).

Виды, морфологически близкие, известные по литературным данным:

1940. *Sequoia* Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung Schrift..., Taf. III, Fig. 9, 11; Taf. IV, Fig. 7.  
 1949. Cf. *Sequoia* (*Pollenites polyformosus* Thiergart) Kremp. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin an der Warthe, Taf. V, Fig. 27—29.  
 1953<sub>2</sub>. *Sequoia* aff. *sempervirens* Заклинская. Описание некоторых видов пыльцы и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронежской обл., стр. 74, табл. III, фиг. 33.  
 1951. *Sequoipollenites polyformosus* (Thiergart) Potonie. Revision stratigraphisch wichtiger Sporomorphen des Mitteleuropäischen Tertiärs, Taf. XX, Fig. 16, 16a.

Диаметр пыльцевого зерна 32—34  $\mu$ .

Пыльцевое зерно округлое, однопоровое, безбороздное. Поровое отверстие находится на дистальной (внешней) стороне зерна. В области порового отверстия имеется конический вырост внутреннего слоя экзины, подобный такому же выросту у пыльцы *Taxodium*, но, в отличие от последнего, вырост этот несколько изогнут и имеет наклонное положение. Этот признак является почти единственно надежным, отличающим пыльцу *Sequoia* от пыльцы *Taxodium*.

Экзина двуслойная, верхний слой неравномерно бугристый. Бугорчатость слабо выражена и почти не отражается на внешней линии очертания зерна.

Во многих случаях пыльца *Sequoia* бывает смята и деформирована, что нередко исключает возможность ее определения. С пыльцой современной *S. sempervirens* Endl. пыльца, выделенная из палеогеновых отложений, почти тождественна, отличаясь от нее только тем, что обычно не встречается в разорванном состоянии. Размер ископаемых пыльцевых зерен несколько больше, чем у современных форм.

От пыльцы *S. aff. sempervirens*, описанной из олигоцен-миоценовых углей Пасековского карьера (Заклинская, 1953), пыльца палеогеновой *Sequoia* Казахстана отличается менее выраженной скульптурой экзины.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: ископаемые остатки рода *Sequoia* часто обнаруживаются в третичных отложениях почти во всех пунктах умеренных широт. Находки пыльцы *Sequoia* отмечены на западном склоне Сред-

него Урала и в Казахстане, начиная от верхнего мела. Пыльца ранних видов *Sequoia* отличается от *S. sempervirens* меньшими размерами. В эоцене *Sequoia* принимает значительное участие в составе хвойных и смешанных лесов, а в олигоцене — в составе лесных ассоциаций вместе с остальными хвойными (преимущественно с родом *Pinus*). Пыльца *Sequoia* (*Pollenites polyformosus*), отмеченная в миоцене Германии Кремпом (Kremp, 1949), по совокупности морфологических признаков может быть отнесена также к виду *S. semperviriformis*. В Казахстане пыльца, подобная *S. semperviriformis*, отмечена в верхнем мелу, в эоценовых слоях, в чеганских глинах и во второй свите континентальных отложений олигоцена. Она же встречается в низах палеогена на Северном Кавказе, Нижнем Дону, Средней Волге и на Южном Урале.

В связи с тем, что пыльца *Sequoia* весьма развита как в широтном, так и в вертикальном направлении, ее коррелирующее значение несколько снижается.

Родиной современного рода *Sequoia* вообще и *S. sempervirens* в частности является Тихоокеанское побережье Америки. Растение приурочено к зоне мягкого умеренного или теплого океанического климата.

### Род *Taxodium* Rich. — Таксодий

*Taxodium* aff. *distichum* (L.) Rich.

Табл. XVI, рис. 7  
Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

Виды, морфологически близкие, известные по литературным данным:

- 1934. *Taxodioipollen hiatus* P o t o n i e. Zur. Mikrobotanik des miozänen Humodils der Niederrheinischen Bucht, Taf. 4.
- 1940. *Taxodiaceae (pollen hiatus)* T h i e r g a r t. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung. Schrift..., Taf. II, Fig. 10; Taf. IV, Fig. 8; Taf. V, Fig. 4; Taf. X, Fig. 8.
- 1949. *Taxodiaceae (pollen hiatus)* P o t o n i e K r e m p. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin an der Warthe, Taf. V, Fig. 31, 37, 38.
- 1951. *Taxodioipollen hiatus* P o t o n i e. Revision stratigraphisch wichtiger Sporomorphphen des Mitteleuropäischen Tertiärs, Taf. XX, Fig. 17.

Диаметр пыльцевого зерна 35—45  $\mu$ . Форма зерна сфероидальная, в очертании — правильная окружность. Обычно зерно рассечено глубокой трещиной, отходящей от места порового отверстия и разделяющей его на два равных полушария. Пора одна, расположена на дистальной (внешней) стороне зерна, апертура (отверстие поры) образована верхним слоем экзины. В области порового отверстия имеется конусообразный вырост внутреннего слоя экзины, направленный вертикально к поверхности зерна. Длина выступа 1,5—2  $\mu$ . Вертикально расположенный выступ характерен для пыльцы *Taxodium*, в отличие от наклонного выступа, который характеризует пыльцу *Sequoia*.

Экзина двуслойная, оба слоя одинаковой толщины. Общая толщина экзины не превышает 2  $\mu$ , чаще она менее 2  $\mu$ . Поверхность экзины в большинстве случаев гладкая, иногда покрыта невысокими бугорчатыми выростами. Пыльца *Taxodium* в ископаемом виде чаще всего имеет трещину, которая обычно начинается от центра зерна и проходит к периферии в виде широкого сегмента (табл. XVI, рис. 7). Трещина обычно расположена таким образом, что конусовидный выступ поры оказывается на вершине конуса трещины и виден в растворе ее.

По морфологическим признакам пыльца *T. aff. distichum* весьма близка к пыльце современной *T. distichum* (L.) R i c h., описанной В. В. Зауер

(1950). Однако размер пыльцы ископаемой формы несколько больше, чем у современной, что позволяет сопоставлять ее с *Pollenites Taxodiace* и *Pollenites hiatus* R. Ротоние из олигоцена Западной Европы.

Следует отметить, что пыльца *Taxodium* по своему строению весьма сходна с пылью *Sequoia* и Cupressaceae и во многих случаях различить их чрезвычайно трудно.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, отложения верхних горизонтов чеганских глин.

В числе пыльцевых зерен, отнесенных к сем. Taxodiaceae, попадает несколько отличных от пыльцы современного вида — *Taxodium distichum*. Величина пыльцевых зерен не превышает 30  $\mu$ ; выступ у поры не всегда ясно выражен. Эти формы пыльцевых зерен отнесены к роду, подобному *Taxodium*—*Taxodiumites* sp. (табл. XVI, рис. 8,9). Пыльца *Taxodiumites* sp. встречается в спектрах, более древних, чем *Taxodium* aff. *distichum*. Появление пыльцы *Taxodiumites* sp. отмечено еще в эоцене.

Распространение: особенно широко развит *Taxodium* в олигоцене (Казахстан) и олигоцен-миоцене (Европа). Вообще же пыльца и отпечатки листьев *T. distichum* известны в третичных отложениях в большом числе пунктов СССР и Западной Европы. По-видимому, род *Taxodium* был особенно широко распространен в третичное время, от верхов эоцена до сармата включительно. Большое количество пыльцы *Taxodium* встречается в олигоценовых отложениях майкопа Северного Кавказа, в солончковых (майкоп) слоях на Нижнем Дону, на Нижней и Средней Волге. Отмечается его широкое распространение также и в нижних отделах миоцена Европы. Несколько сокращается относительное количество пыльцы к верхам миоцена. В Северном Казахстане и в Тургае *Taxodium* начинает появляться в небольших количествах в верхних отделах эоцена (подчеганские слои) и особенно широко развит в чеганских отложениях (нижний олигоцен). Один из руководящих родов в составе умеренной флоры (тургайской, по терминологии А. Н. Криштофовича).

По данным палеоботаники, род *Taxodium* продвигался из областей палеарктики и был широко распространен по всему северному полушарию в третичном периоде. К сожалению, еще не изучена пыльца современного вида *T. mucronatum* Тен. — мексиканского кипариса, который, в отличие от *T. distichum*, обитает в горных областях, на сухих местах. Возможно, что большое количество пыльцы *Taxodium*, не определенное нами до вида, принадлежит не к виду болотного кипариса, а к аналогу *T. mucronatum*, чем и объясняется появление пыльцы этого рода в отложениях эоцена, когда климат был жаркий и сухой.

### Род *Cunninghamia* R. Br. — Куннингамия

*Cunninghamia* aff. *lanceolata* Lamb.

Табл. XVI, рис. 10, 11, 12

Препарат № 198  $\frac{H}{K}$

Морфологически близкие формы, известные по литературным данным: 1933. *Cunninghamia eocenipites* Wodehouse. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 495, fig. 19.

Диаметр пыльцевого зерна 21—30  $\mu$ . Форма его сфероидальная, очертание округлое. Зерно имеет одну неясно выраженную пору. Над порой у большинства зерен можно обнаружить небольшой выступ экзины. Экзина тонкая, при увеличении в 450 раз двуслойность незаметна. Поверхность зерна мелкобугорчатая. Бугорки разбросаны по поверхности редко и неравномерно. Тело изборозжено беспорядочно расположенными складками.

Пыльца сходна с современной пылью *Cunninghamia lanceolata* Lam b., описанной В. В. Зауер (1950); ее строение также чрезвычайно близко к *C. conenipites* Вудхауза из третичной флоры Грин-Ривер. В ископаемом состоянии пыльца распознается с большим трудом и поэтому упоминания о ее находках чрезвычайно редки. По данным А. Н. Криштофовича, на Амуре были встречены древовидные остатки этого рода в третичных отложениях.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, бассейн р. Иртыш, по его левому берегу, глина с отпечатками растений из второй свиты континентальных отложений (олигоцен).

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Cunninghamia* отмечена в спорово-пыльцевых спектрах в эоцене и олигоцене Западной Европы и в олигоценых отложениях Казахстана.

Родина *C. lanceolata* Lam b. — Южный и Центральный Китай. Растет в поясе распространения жестколистных, обычно лавровых растений. Образует леса. Растет на сухих и на влажных почвах. Широко распространена по вертикали (от 1000 до 3600 м над уровнем моря).

#### СЕМ. CUPRESSACEAE F. W. NEGER — КИПАРИСОВЫЕ

Семейство Cupressaceae, по мнению А. Н. Криштофовича, было наиболее широко развито в мелу. Пыльца различных кипарисовых отмечена в меловых отложениях Центрального и Западного Казахстана, в Приаралье, в Приуралье, в Европейской части СССР. Наибольшее количество древесных остатков кипарисовых относится к среднему и верхнему мелу. В третичных отложениях пыльца и макроскопические остатки распространены довольно широко, но в видовом отношении семейство это представлено значительно слабее, чем в мелу.

Для Казахстана в третичных отложениях известны остатки *Cupressinoxylon* sp. на востоке, *Cupressocarpus ovatus* Griseb. на оз. Зайсан, *Juniperus communis* L. в Восточно-Казахстанской области, *Juniperus* sp. с горы Ашу-Тас. Присутствие большого количества пыльцы кипарисовых, начиная от эоцена и до миоцена, отмечают многие исследователи. Наибольшее развитие кипарисовые имеют в нижних горизонтах палеогена (палеоцен—эоцен) как в Европейской, так и в Азиатской части СССР. В частности, довольно большое количество пыльцы сем. Cupressaceae (до 30 % от общего количества хвойных) обнаружено автором в палеоценовых отложениях Поволжья и в бучакских слоях Нижнего Дона.

Присутствие макроскопических остатков в сызранских слоях Поволжья отмечали В. И. Палибин, В. И. Баранов и другие исследователи.

Для ископаемой пыльцы, отнесенной к сем. кипарисовых, характерно одноклеточное беспоровое зерно (за исключением пыльцы рода *Libocedrus*, которая имеет поры). Форма зерна сфероидальная, очертание округлое, диаметр его 29—35 м. По описаниям В. В. Зауер (1950), пыльца Cupressaceae снабжена одной зародышевой бороздкой, но на ископаемых зернах этой бороздки обнаружить не удалось.

Экзина двуслойная, нижний слой, в отличие от пыльцы Taxodiaceae, толще, чем верхний. Верхний слой экзины обычно имеет мелкобугорчатую скульптуру. Бугорчатые выросты расположены на поверхности неплотно.

Пыльцевые зерна обычно сильно деформированы и имеют трещину, которая, в отличие от пыльцы *Taxodium*, проходит дальше центра, рассекая зерно на два полушария, скрепленных в одной точке.

Приводимые ниже описания ископаемой пыльцы различных видов семейства кипарисовых носят предварительный характер из-за отсутствия достаточно полных данных по морфологии пыльцы современных видов этого семейства.

*Thujoites* sp. (pollen)

Табл. XVI, рис. 13, 14, 15

Препараты № 191  $\frac{H}{K}$  и 255  $\frac{3}{K}$ 

Морфологически близкие формы, известные по литературным данным:

1933. *Taxodium hiatipites* W o d c h o u s e. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation, p. 449, fig. 17.  
 1934. Taxodiaceae P o t o n i e. Zur Mikrobotanik der Kohlen und ihrer Verwandten, zur Morphologie der fossilen Pollen und Sporen, Taf. 6, Fig. 4.  
 1940. *Conifer pollen* T h i e r g a r t. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. III, Fig. 8, 10.  
 1949. *Pollen Kleiner K r e m p*. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin an der Warthe, Taf. V, Fig. 44.  
 1951. *Taxodiopollen hiatus* (P o t o n i e). G o t h a n. Die merkwürdigen pflanzengeographischen Besonderheiten in den Mitteleuropäischen Karbonfloren, Taf. XX, Fig. 17.

Диаметр пыльцевого зерна 30—35  $\mu$  (в более молодых отложениях пыльца *Thujoites* крупнее). Форма зерна сфероидальная, очертание округлое. Экзина двуслойная, с тонким внешним слоем, покрытым беспорядочно разбросанными мелкими бугорками. После щелочной обработки и ацетилованного метода приготовления экзина обычно лопается.

В ископаемом состоянии пыльца встречается сильно деформированной, с глубокой трещиной, разделяющей зерно на две неровные части. Тело смато продольными складками. Поровое отверстие не обнаружено. Во многих описаниях пыльца *Thuja* ошибочно отнесена к сем. Taxodiaceae. Действительно, пыльца сем. Taxodiaceae и Cupressaceae весьма близка по своим морфологическим признакам. Но, как совершенно справедливо отмечают В. В. Зауер (1950), Эрдтман (1943) и другие авторы, пыльца Taxodiaceae легче всего распознается по наличию поры и пальцеобразного выступа над нею внутреннего слоя экзины. У большинства же растений сем. Cupressaceae пыльца не имеет поры, а у тех видов, у которых она имеется, пальцеобразный выступ отсутствует или слабо выражен. Кроме того, обычно пыльца Taxodiaceae значительно крупнее пыльцы Cupressaceae.

Сходство морфологических признаков описываемой нами ископаемой пыльцы с пыльцой ныне живущей *T. orientalis* L., описанной В. В. Зауер, позволило отнести ее к роду *Thuja*. Видовое определение не сделано ввиду недостаточности данных по морфологии современной пыльцы этого рода.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, скв. 1 и 2, верхние горизонты чеганских глин (нижний олигоцен); оз. Кемир-Туз, обн. 1326, глины с растительными остатками из второй свиты континентальных отложений среднего олигоцена.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Thujoites* встречается в майкопских (средний олигоцен) отложениях Северного Кавказа, Нижнего Дона (соленовские слои) и Приазовья. Необходимо отметить, что большое количество пыльцы Cupressaceae, в том числе и рода *Thuja*, отмечается обычно в тех горизонтах, где пыльца *Taxodium* или совсем отсутствует, или обнаруживается лишь в небольшом числе экземпляров.

*Libocedrus* sp. (pollen) — Либоцедрус

Табл. XVI, рис. 16

Препарат № 252  $\frac{3}{K}$ 

Диаметр пыльцевого зерна 30—35  $\mu$ . Зерно сфероидальное, одноклеточное, безбороздное, однопоровое или с двумя — тремя порами. В ископаемом состоянии встречается в деформированном виде. Экзина двуслойная,

внутренний слой несколько плотнее и толще, чем внешний, который, отделяясь от внутреннего слоя, образует беспорядочные складки. Неровности внешнего слоя экзины обуславливают угловатый контур зерна. В некоторых случаях отслаивающаяся эктекина проицируется в виде тонкой прозрачной бахромки. На некоторых экземплярах над поровым отверстием иногда удается обнаружить небольшой конусообразный выступ. Пыльца *Libocedrus*, как и большинство видов сем. Cupressaceae, имеет трещину, которая проходит через одно из поровых отверстий.

Пыльца *Libocedrus* зарисована из материалов по Пасековскому месторождению бурых углей из миоцен-олигоцена Украины (Заклинская, 1953). Современная пыльца (*L. decurrens* Torr.) описана В. В. Зауер (1950), Эрдтманом (1943) и Заклинской (in litt.). В. В. Зауер и Г. Эрдтманом описана пыльца вида *Libocedrus decurrens*, а Е. Д. Заклинской — вида *L. macrolepis*. Пыльца *L. macrolepis* отличается от пыльцы *L. decurrens* Torr. более жесткой экзиной, меньшими размерами и более ярко выраженными поровыми отверстиями.

Пыльца *Libocedrus* в ископаемом состоянии отмечается редко, по-видимому, в связи с тем, что распознается она трудно и отличить ее от пыльцы прочих Cupressaceae почти невозможно, если зерно не находится в идеальной сохранности.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, континентальные отложения, вторая свита, средний олигоцен.

Распространение: в Казахстане род *Libocedrus* распространен в верхних горизонтах олигоценовых континентальных отложений. На территории СССР ископаемые макроскопические остатки *Libocedrus* известны еще с верхнего мела.

Современный род *Libocedrus* включает всего восемь видов, в основном приуроченных к южным широтам и побережьям Тихого океана: Калифорния, Чили, Китай, Япония, Новая Гвинея. Обитает на довольно больших отметках — от 1500 до 1600 м над уровнем моря.

Возможно, что появление пыльцы *Libocedrus* в континентальных отложениях (четвертая свита — верхний олигоцен) Казахстана связано с эпохой тектонических поднятий в районе Прииртышья (?).

### *Cupressites* sp. (pollen)

Табл. XVI, рис. 17, 18, 19

Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

Диаметр пыльцевого зерна 22—28  $\mu$ . Зерно эллипсоидально-сфероидальное, беспоровое, с трещиной вдоль тела, расщепляющей зерно на две равные части. Обычно зерно смято в продольные, беспорядочно расположенные складки.

Экзина покрыта мельчайшими, беспорядочно расположенными шипиками, вследствие чего контур зерна несколько неровный. По внешнему облику пыльца *Cupressites* sp. весьма сходна с пыльцой современного вида *Cupressus arizonica*<sup>1</sup>. Отличается от него отсутствием порового отверстия, имеющегося у большинства пыльцевых зерен ныне живущего *Cupressus arizonica* Greene. От пыльцы *C. lusitanica* также отличается отсутствием поры, а от *Juniperus*, кроме того, несколько большим размером.

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, глины верхних горизонтов чеганской свиты (верх нижнего олигоцена).

<sup>1</sup> Зарисованного автором из гербария Н. А. Болховитиной.

**Распространение:** от мела до олигоцена Азиатской и Европейской части СССР.

Родина *C. arizonica* Greene — Калифорния и Новая Мексика, где в некоторых местах растение образует горные леса на высоте от 1500 до 2400 м над уровнем моря.

***Cupressites* sp. (pollen) (ex gr. *Cupressus pallens* Bolch.)**

Табл. XVI, рис. 20

Препарат № 191  $\frac{H}{K}$

Диаметр пыльцевого зерна 22—28  $\mu$ . Зерно сфероидальное, но несколько вытянуто по одной из осей. Возможно, что последнее не относится к морфологическим признакам зерна, а является результатом деформации при его обработке и вызвано тем, что зерно обычно дает глубокую трещину и легко сминается.

Экзина плотная, двуслойная, но двуслойность просматривается с трудом и улавливается не на всех экземплярах. В некоторых случаях экзина неравномерно мелкобугорчатая, вернее — зернистая, так как величина бугорков чрезвычайно мала.

По внешнему облику пыльца ископаемого вида чрезвычайно близка к виду, описанному Н. А. Болховитиной (1953, стр. 68, табл. X, рис. 27) под названием *Cupressus pallens*. Она имеет так же большое сходство с пыльцой современного вида *Cupressus torulosa* D. D o n., отличаясь от него лишь меньшей величиной.

**Местонахождение:** Павлодарское Прииртышье, пос. Парамоновка, скв. 1, нижние горизонты чеганской свиты (нижний олигоцен).

**Распространение:** встречен в Павлодарском Прииртышье, от нижнечеганских глин (верхний олигоцен) до четвертой свиты континентальных отложений. Отмечен в серых глинах сеномана и турона (*Cupressus pallens* Bolch.) на восточном склоне Южного Урала, в нижнетретичных отложениях юга Европейской части СССР. В эоцене и в нижних отделах олигоцена встречается чаще, чем в верхних горизонтах олигоцена.

Современное распространение *C. torulosa* приурочено к Западным Гималаям, от Непала до Бутана, а также к Центральному Китаю. Растение горное и сухолюбивое.

***Chamaecyparites* sp. (pollen)**

Табл. XVI, рис. 21; табл. XVII, рис. 1

Препарат № 259  $\frac{3}{K}$

Диаметр пыльцевого зерна 23—25  $\mu$ . Пыльца сфероидальная. Зерно снабжено трещиной, проходящей, по мнению Н. А. Болховитиной, по зародышевой борозде. Наличие зародышевой борозды при изучении нашего вида не обнаружено. Экзина мелкошиповатая.

За исключением наличия зародышевой борозды, общий облик пыльцы выделенного вида имеет некоторое сходство с *Chamaecyparis Lawsoniana* (Andr.) Parl. и с *Chamae cyaris Shuzhii* Bolch.

**Местонахождение:** Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, обн. 6, четвертая свита континентального олигоцена (верхний олигоцен).

**Распространение:** от верхнего мела до олигоцена Азиатской и юга Европейской части СССР. Родина *Chamaecyparis Lawsoniana* — горные районы Северной Америки в районе р. Калифорнии.

## КЛАСС GNETALES ENG L.— ГНЕТОВЫЕ

Пыльца, отнесенная к классу Gnetales, делится по морфологическим признакам на две группы. К первой относится пыльца сильно вытянутой эллипсоидальной формы, имеющая в боковой проекции очертание почти правильного эллипса с заостренными вершинами. У древних форм на вершинах эллипса отслоение экзины образует подобие редуцированных воздушных мешков. Тело зерен этого типа имеет продольные складки, между которыми проходят извилистые бороздки (не зародышевые борозды), исполняющие, по-видимому, роль гармогата<sup>1</sup> (табл. XVII, рис. 3, 4, 6, 7). На ребрах экзины, образующей складки, проходят бороздки, которые, по-видимому, являются аналогами зародышевых. При расположении зерна в правильной полярной проекции очертания сечения этих зародышевых борозд прекрасно видны (см. табл. XVII, рис. 5, 11, 12). К такому типу зерен относится пыльца всех видов *Ephedra* и *Welwitschia*. Размеры их обычно крупные (до 60  $\mu$  по большей оси).

Зерна второго типа представляют собой сфероидальное тело с одной зародышевой бороздой и с мелкошиповатой экзиной. Размеры зерен этого типа не достигают 25  $\mu$ . По внешнему виду пыльца этого типа несколько напоминает пыльцу Cupressaceae, но отличается от нее более плотной экзиной. Нам известен один представитель сем. Gnetaceae, а именно *Gnetum Gneton* L., описанный Эрдтманом (1943, табл. XXII, фиг. 410).

Класс Gnetales довольно древний. М. М. Ильин в своих многочисленных работах, посвященных природе пустынных растений, неоднократно упоминает о том, что вельвичия является одним из растений, появившихся на грани начала развития покрытосеменных и, возможно, что именно «правельвичия», многочисленные виды пыльцы которой встречаются еще в пермских отложениях, и была такой переходной формой от голосеменных к покрытосеменным.

В мезозойских лесах, по данным М. М. Ильина, уже существовали представители рода *Gnetum*. Пыльца же вельвичии отмечается в большом разнообразии в юре и мелу. В третичных отложениях уже встречаются различные виды *Ephedra*.

К сожалению, находки макроскопических остатков *Ephedra* чрезвычайно редки. Вызвано последнее скорее всего тем, что развитие свое вельвичия и эфедра в основном получили при аридном, пустынном режиме, а в осадочных отложениях аридного климата трудно ожидать большого количества сохранившихся растительных остатков. Поэтому особенно большое значение приобретают данные спорово-пыльцевого анализа, так как пыльца пустынных травянистых и кустарниковых растений прекрасно сохраняется в осадках, сформировавшихся в условиях континентального режима. Если согласиться с данными В. А. Вахрамеева (1947) о связи развития покрытосеменных с возникновением аридного пояса пустынь, простиравшегося от Африки до Центральной Азии в конце верхней юры, то класс гнетовых, в частности вельвичия, и должен был явиться первым представителем переходных форм от голосеменных к покрытосеменным.

В настоящее время вельвичия является вымирающим родом; в современной флоре сохранился только один ее вид — *Welwitschia mirabilis* Hook, с ограниченным ареалом в Южной Африке.

Пыльца *Ephedra* появляется в виде единичных зерен и видов, не родственных современной флоре, среди общего комплекса верхнепалеогеновых спектров, несколько увеличивается количественно в миоцен — плиоцене и достигает максимального развития в голоцене.

<sup>1</sup> Аппарат, обеспечивающий аккомодацию зерна при изменении влажности.



Род *Ephedra* продолжает свое развитие и в настоящее время, имея довольно широкий, сильно разомкнутый ареал — от южных широт субтропиков и пустынь до степных районов Сибири. Во флоре Казахстана, в особенности в его центральных и южных областях, *Ephedra* в настоящее время играет значительную роль. Эта флора включает четыре вида *Ephedra* (Павлов, 1947): *E. distachya* L. — наиболее типичный представитель ковыльных и ковыльно-типчаковых степей; *E. equisetina* В ге. — горностепной вид на южных каменистых склонах кустарникового и лесного пояса; *E. intermedia* S c h r e n k. et C. A. К е у — приуроченная к пустыням и пустынно-степному типу ассоциаций Центрального Казахстана, и *E. lomatolepis* S c h r e n k. — также растение песчаных пустынь Южного Казахстана. Других представителей класса Gnetales в современной флоре Казахстана нет.

# СЕМ. WELWITSCHIACEAE — ВЕЛЬВИЧНИЕВЫЕ

## *Welwitschites protomirabilis* sp. nov. (pollen)

Табл. XVII, рис. 2

Препарат № 170  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, близ г. Павлодара, скв. 1, обр. 258, слюдяные глины подглауконитовой толщи (датский (?) ярус).

Диаметр пыльцевого зерна по длинной оси около 50  $\mu$ , по малой оси 30  $\mu$ ; длина 42—47  $\mu$ . Пыльцевое зерно удлинено-эллипсоидальной формы. Тело снабжено двенадцатью продольными глубокими клиновидными в поперечном сечении бороздами (не зародышевыми), выклинивающимися к вершинам зерна (к полюсам его). Эти борозды образованы высокими складками—ребрами экзины. На дне бороздок проходят извилистые линии с ответвлениями на их боковые стенки (табл. XVII, рис. 2). Эти извилистые линии подобны гармогетатным извилинам пыльцы *Ephedra*. Экзина несколько отслаивается на концах тела (на полюсах его), образуя утолщения, подобные воздушным мешкам у пыльцы Pinaceae, но сильно редуцированные.

Строение тела пыльцы *Welwitschia* весьма близко к строению тела *Ephedra*. Наличие же выростов экзины в виде зачаточных (или редуцированных?) воздушных мешков несколько сближает ее с хвойными.

Некоторую аналогию по морфологическим признакам можно провести между видом *Welwitschia* из палеогена Павлодарского Прииртышья и видом того же рода, выделенным А. А. Чигуревой (1951<sub>3</sub>) из эоценовых отложений Западного Казахстана. Отличается прииртышский вид от западно-казахстанского более ясно выраженным отслоением экзины и несколько более суженной веретенообразной формой тела. От *W. macrolobata* В о l с h. из бассейна р. Эмбы (готтеривские глины) наш вид отличается большими размерами воздушных мешков. От *W. Alekhini* В о l с h. (Северный Урал, опоковидные песчаники — мел) отличается меньшими размерами и более суженным телом.

Пыльца современного вида *W. mirabilis* Н о о k. описана у Эрдтмана (Erdtman, 1943) и Зауер (1950). По своему строению пыльцевое зерно современной вельвичии близко к ископаемой за исключением более округлой формы тела и меньшего размера воздушных мешков.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: меловые отложения (средний и верхний мел) Западного Казахстана; верхний мел и горизонты, пограничные с палеоценом в Северном Казахстане. Эоцен (низы опоковой толщи морского палеогена) Западного Казахстана и эоценовые отложения Западного Казахстана в районе Бай—Хожа.

Ископаемые остатки, кроме пыльцы в третичных и меловых отложениях, еще неизвестны.

# СЕМ. EPHEDRACEAE — ХВОЙНИКОВЫЕ

## Род *Ephedra* — Хвойник

### *Ephedra eocenipites* Wodehouse

Табл. XVII, рис. 3  
Препарат № 170  $\frac{H}{K}$

Величина пыльцевого зерна от 58 до 75  $\mu$ . Зерно веретенообразно-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции удлинненно-овальное с заостренными вершинами. От полюса к полюсу проходят продольные глубокие складки экзины. Количество складок нечетное — 5 или 7. Ребровидные борты складок в зависимости от разбухания пыльцы могут быть узкими или широкими. Между бортами складок образованы глубокие борозды (по-видимому, это не зародышевые борозды) с клиновидным поперечным сечением. По дну борозд проходит извилистая трещинка (гармогет), подобная трещинкам у современных видов *Ephedra*. Экзина имеет мелкозернистую структуру, что изображается в виде мелкоточечного рисунка на поверхности зерна.

Пыльца имеет полное сходство с пыльцой *E. eocenipites* Wodehouse, описанной из эоценовых отложений Грин-Ривер (Wodehouse, 1932, табл. на стр. 499, фиг. 20). Пыльца ископаемого вида *Ephedra* имеет большое сходство с пыльцой ныне живущего вида *E. glauca*, описанной Вудхаузом (1933), а также с пыльцой ныне живущего вида *Ephedra strobilaceae* Вунге, описанной автором (1954).

Местонахождение: Павлодарское Прииртышье, пос. Пармоновка, скв. 1, подглауконитовые глины датского (?) яруса (мел — палеоцен).

Распространение: эоцен Северной Америки; верхний мел и эоцен Северного Казахстана; мел и палеоген (низы) Западного Казахстана.

В настоящее время *E. strobilaceae* Вунге распространена в плоскогорных частях Центральной Азии на летучих песках.

### *Ephedra* aff. *Przewalskii* Stapf.

Табл. XVII, рис. 4, 5  
Препарат № 198  $\frac{H}{K}$

Длина пыльцевого зерна около 50  $\mu$ , ширина (по малой оси) 32—48  $\mu$ . Зерно эллипсоидальное, очертание в боковой проекции овальное со слегка заостренными вершинами. Тело снабжено продольными желобками (бороздами), разделенными складками — ребрами.

Экзина однослойная; толщина экзины значительно уменьшается на поверхности борозд и увеличивается на вершинах складок. При этом вершины или ребра складок раздвоены в виде борозды, что хорошо различается при полярном положении зерна. По-видимому, борозды образованы на поверхности ребер и являются зародышевыми, бороздоподобные же углубления между складками экзины — лишь приспособление пыльцевого зерна к аридным условиям. При засухах эти складки способствуют наибольшему сжатию зерна, при наступлении периодических дождей — разбуханию его, без разрывов экзины. По наблюдениям В. В. Зауер, пыльцевое зерно *Ephedra* может при разбухании принять форму правильного

эллипса за счет вывернувшихся и расправившихся складок и борозд между ними.

В работе М. П. Гричук (1954) приводится описание современного вида *Ephedra Przewalskii* Stapf., весьма близкого по морфологическим признакам к нашему ископаемому виду. М. П. Гричук отмечает, что основное отличие пыльцы *E. Przewalskii* от прочих видов заключается в том, что она снабжена 20 бороздами, причем 10 из них глубокие, почти доходящие до полюсов (при положении зерна в полярной проекции), а 10 — более короткие и менее глубокие, поэтому «дольки» расположены парами. Этот признак — добавочные мелкие бороздки на ребрах складок — настолько своеобразен, что может служить основанием для того, чтобы вид *E. Przewalskii* и описанный нами ископаемый вид считать близкими.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, обн. 6, глины с отпечатками растений, вторая континентальная свита (верх среднего олигоцена).

*Ephedra cf. distachya* L.

Табл. XVII, рис. 6,7

Препарат № 259  $\frac{3}{K}$

Длина пыльцевого зерна (по длинной оси) 58—70  $\mu$ , ширина (по малой оси) 40—50  $\mu$ , в зависимости от того, находится ли зерно в сжатом или разбухшем состоянии. Очертание пыльцевого зерна в боковой проекции удлиненно-овальное. Зерно имеет от 6 до 9 борозд и столько же узких ребрышек. Гармомегат выражен довольно четко, ветвистый, но веточки значительно короче и менее разветвляются, чем у пыльцы *E. cf. intermedia*.

Наш ископаемый вид строением гармомегата, бороздок и ребрышек сходен с пыльцой современного вида *E. distachya*, описанного М. П. Гричук (1954). Отличается от него большей величиной и не столь ясно выраженным гармомегатом.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, оз. Кемир-Туз, песчано-гравийные отложения четвертой свиты.

*Ephedra aff. intermedia* Schr.

Табл. XVII, рис. 8, 9

Препарат № 259  $\frac{3}{K}$

Виды, близкие по морфологическим признакам, упоминаются в следующих работах:

1940. *Ephedra* Thiergart. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung, Taf. IV, Fig. 4.  
1949<sub>1</sub>. Cf. *Ephedra* Thiergart. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen, Taf. IV/V, Fig. 39.

Длина пыльцевого зерна (по большей оси) 65—70  $\mu$ , ширина (по малой оси) 30—40  $\mu$ . Зерно удлиненно-эллипсоидальное, очертание в боковой проекции удлиненно-овальное, в полярной проекции — четырех-, пяти- или шестиугольная звездоподобная фигура. Пыльцевое зерно снабжено четырьмя, пятью или шестью складками и, соответственно, четырьмя, пятью или шестью бороздами. По внешнему краю каждой складки расположены узкие углубления — зародышевые бороздки (?).

Экзина однослойная, мелко-плоскобугорчатая. Контур ребровидных краев складок часто имеет извилистый рисунок. По дну и стенкам борозд

между складками хорошо видна извилистая и ветвистая линия гармомегата.

Пыльца современного вида *Ephedra intermedia* Sch r., описанная М. П. Гричук (1954), имеет ветвистый, часто дважды ветвистый гармомегат. Размер зерна современного вида около 60  $\mu$ . Ископаемый вид отличается от современного большей величиной и менее ветвистым гармомегатом. Последнее может зависеть не столько от различия в строении, сколько от сохранности зерна и степени его минерализации.

Пыльца *E. aff. intermedia* имеет также большое сходство и с пылью современного вида *E. strobilaceae* В и n g e. Отличается ископаемая пыльца от этого вида меньшим количеством борозд и ребрышек и бóльшим размером.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Павлодарское Прииртышье, бассейн р. Чидерты и оз. Кемир-Туз, песчано-глинистые отложения четвертой свиты континентальных отложений верхнего олигоцена.

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Ephedra aff. intermedia*, не определенная до вида и обозначаемая *Ephedra* sp., неоднократно отмечается в списках пыльцевых спектров Казахстана от олигоцена до неогена включительно.

Современный вид — *E. intermedia* Sch r. — типичный пустынный и пустынно-степной вид Центрального и Южного Казахстана. Селится на каменистом и песчаном грунте в ассоциациях полынных пустынь.

#### *Ephedrites trinata* sp. nov. (pollen)

Табл. XVII, рис. 10, 11, 12

Препарат № 146  $\frac{H}{K}$

Г о л о т и п: Павлодарское Прииртышье, бассейн р. Чидерты, слюдястые глины с растительными остатками, вторая свита континентальных отложений (олигоцен).

Длина пыльцевого зерна (по длинной оси) 35—40—50  $\mu$ , ширина (по малой оси) 25—28  $\mu$ .

Пыльцевое зерно удлинено-эллипсоидальное с тремя высокими складками — ребрами, между которыми проходят глубокие борозды с извилистой трещиной по дну (гармомегат). Зародышевые борозды расположены на поверхности складок, что хорошо видно при расположении зерна в полярной проекции.

По внешнему облику зерно должно быть отнесено к роду *Ephedra*, несмотря на то, что количество борозд и складок у ископаемой формы значительно меньше, чем обычно у пыльцевых зерен известных нам современных видов *Ephedra*. Аналога среди современных видов нет.

М е с т о н а х о ж д е н и е: см. голотип.

Р а с п р о с т р а н е н и е: олигоценовые отложения Павлодарского Прииртышья.

#### СЕМ. GNETACEAE — ГНЕТОВЫЕ

#### *Cnetumites* sp. (pollen)

Табл. XVII, рис. 13

Препарат № 14  $\frac{3я}{K}$

Пыльцевое зерно сфероидальное, беспорозное, безбороздное. Диаметр пыльцевого зерна около 18  $\mu$ . Экзина двуслойная (?), толщина ее около 2  $\mu$ . Скульптура мелкобугорчатая. Бугорки поставлены неплотно, иногда они остроконечные и тогда поверхность можно назвать мелкошиповатой. Контур зерна мелковолнистый. Поверхность крупноточечная. Не-

которые экземпляры имеют трещину и тогда могут быть приняты за пыльцу Cupressaceae. Пыльца ископаемого вида весьма близка по строению к современному виду *Gnetum Gnemon*, описанному В. В. Зауер (1950), но, несмотря на это сходство, за ископаемым видом оставляется только родовое название, так как в данное время пыльца *Gnetum* современных видов еще не изучена, а этих видов 25. Вполне возможно, что впоследствии будут известны пыльцевые зерна современных видов, гораздо более близкие к нашей форме, чем *Gnetum Gnemon* L.

М е с т о н а х о ж д е н и е: Северное Приаралье, гора Бос-Бие, саксаульская свита (верхний эоцен).

Р а с п р о с т р а н е н и е: пыльца *Gnetum* и подобная ей, а также растительные остатки рода *Gnetum* отмечены в палеоценовых отложениях Приаралья и Нижнего Поволжья. Автором пыльца *Gnetum* (?) обнаружена в нижнепалеогеновых отложениях Северного Приаралья и Павлодарского Прииртышья.

---

## Л И Т Е Р А Т У Р А

- [А б и х Г. В.] A b i c h H. W. Beiträge zur Paläontologie des Asiatischen Russlands, T. I. Tertiärversteinerungen aus der Umgebung der Aralsee. [Материалы по палеонтологии Азиатской России. Т. I. Третичные окаменелости из окрестностей Аральского моря]. Mem. Acad. Sci., VI, ser. sci. mathem. et phys., 7 (9), St-Petersb., 1858.
- А б у з я р о в а Р. Я. Ископаемая флора Такыр-Сора по данным спорово-пыльцевого анализа — Ботан. журнал, 1953, 37.
- А б у з я р о в а Р. Я. 1. Третичные спорово-пыльцевые спектры Тургая и Павлодарского Прииртышья. — Автореферат диссертации. Казахский гос. унив., 1954.
- А б у з я р о в а Р. Я. 2. Ископаемые флоры Чинка Науша (Тургай) по данным спорово-пыльцевого анализа. — Ученые зап. Казахск. гос. унив., биология, 1954, 14, вып. 4.
- А л е х и н В. В. География растений. Учпедгиз, 1950.
- А р х а н г е л ь с к и й А. Д. Геологическое строение СССР. Европейская и среднеазиатская части. ОНТИ, 1932.
- Б а р а б а ш и н о в а В. Н. Микропалеоботанические остатки в мезозойских отложениях Тургая. — Изв. Акад. наук Казахской ССР, серия геол., 1951, вып. 13.
- Б а р а н о в В. И. Этапы развития флоры и растительности СССР в третичном периоде. — Ученые зап. Казанск. гос. унив. им. В. И. Ульянова-Ленина, 1948, 108, кн. 3. Ботаника, вып. 7.
- Б а р а н о в В. И. Новая ископаемая флора из третичных и верхнемеловых отложений западного склона Мугоджар. — Докл. Акад. наук СССР, новая серия, 1953, 92, № 5.
- Б а я р у н а с М. В. Отчет о раскопках в Тургайской области. Приложение к годовичному отчету Геол. и минерал. музея Акад. наук, 1915.
- Б а я р у н а с М. В. К геологии Тургайского района Казахстана. — Труды Палеозоол. ин-та Акад. наук СССР, 1936, 5.
- Б е л я е в а Е. И. Каталог местонахождений третичных наземных млекопитающих на территории СССР. — Труды Палеонтол. ин-та Акад. наук СССР, 1948, 15, вып. 3.
- Б о й ц о в а Е. П. и П о к р о в с к а я И. М. Материалы по стратиграфии континентальных олигоценовых и миоценовых отложений Тургайской впадины. В кн.: Материалы по палинологии и стратиграфии. М., Госгеолиздат, 1954.
- Б о л х о в и т и н а Н. А. Спорово-пыльцевой состав отложений апта и альба центральной части Русской платформы. — Бюлл. МОИП, отд. геол., 1951, 26, № 5.
- Б о л х о в и т и н а Н. А. Пыльца хвойных из мезозойских отложений и ее значение для стратиграфии. — Изв. Акад. наук СССР, серия геол., 1952, № 5.
- Б о л х о в и т и н а Н. А. Спорово-пыльцевая характеристика меловых отложений центральных областей СССР. — Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 145, геол. серия (№ 16).
- Б о р и с я к А. Л., Б е л я е в а Е. И. Местонахождение третичных наземных млекопитающих на территории СССР. — Труды Палеонтол. инст. Акад. наук СССР, 1948, 15, вып. 3.
- Б о р с у к М. К. К изучению тургайской третичной флоры. — Труды Центр. научно-исслед. геол.-развед. инст., 1935, вып. 37.
- Б о р щ о в И. Материалы для ботанической географии Арало-Каспийского края. — Зап. Акад. наук, 1865, № 1, прил.
- Б р у к с К. Климаты прошлого. Пер. с англ. В. Г. Левинсона. М., Изд. иностр. лит., 1952.
- В а с и л ь е в с к а я Н. А. О полтавской ксерофитной флоре Туркмении. — Докл. Акад. наук СССР, 1949, 18, № 4.
- В а с и л ь ч е н к о И. Г. Материалы по истории происхождения флоры *Ephedra*. — Ботан. журнал, 1950, № 3.

- Вахрамеев В. А. Континентальный и солоноватоводный олигоцен Северного Приаралья.—Отд. геол.-геогр. наук Акад. наук СССР. Рефераты научно-исслед. работ за 1940 г. М., Изд. Акад. наук СССР, 1941.
- Вахрамеев В. А. Роль геологической обстановки в развитии и распространении покрытосеменных в меловое время.—Бюлл. МОИП, серия геол., 1947, 22, вып. 6.
- Вахрамеев В. А. Континентальные и солоноватоводные отложения олигоцена Северного Приаралья и северных чинков Устюрта.—Изв. Акад. наук СССР, серия геол., 1949, № 4.
- Вахрамеев В. А. О состоянии советской ботаники.—Изв. Акад. наук СССР, серия биол., 1953, № 4.
- Вялов О. С. О возрасте чеганских глин на Устюрте.—Изв. Главн. геол.-развед. упр., 1930, 49, № 4.
- Вялов О. С. Возраст корбулевых слоев Приаралья.—Бюлл. МОИП, отд. геол., 1945, 20, вып. 3—4.
- Вульф Е. В. Историческая география растений. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1944.
- Высоцкий Н. К. Сообщение о физико-географических изменениях Западной Сибири в третичную и послетретичную эпохи.—Зап. СПб., мин. общ., 2-я серия, 1868, ч. 3.
- [Герс О.] Heer O. Pflanzenabdrücke aus der Kirgisensteppe. In: A b i c h H. W. Beiträge zur Paläontologie des asiatischen Russlands. T. I. Tertiärversteinerungen aus der Umgebung der Aralsee. Mém. Acad. Sci., 7(9), ser. sci. math. et phys., 1858.
- Герасимов И. П. Основные черты развития современной поверхности Турана.—Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1937, вып. 25.
- Герасимов И. П. Основные вопросы геоморфологии и палеогеографии Западно-Сибирской низменности.—Изв. Акад. наук СССР, серия геогр., 1940, № 5.
- Гладков А. Н. и Самойлович С. Р. Морфология пыльцы некоторых видов тропических и аридных субтропических растений. В кн.: Пустыни СССР и их освоение, т. II. М., Изд. Акад. наук СССР, 1954.
- Гричук М. П. Распространение рода *Ephedra* в четвертичном периоде на территории СССР в связи с историей ландшафтов. В кн.: Материалы по палеогеографии, вып. 1. М., Изд. Моск. гос. ун-в., 1954.
- Громов В. И. Элементы африкано-азиатской фауны в четвертичных отложениях Сибири.—Бюлл. Информ. бюро Ассоц. по изуч. четвертич. периода Европы, 1932, № 2.
- Громов В. И. Остатки млекопитающих из четвертичных отложений в низовьях Оби и Иртыша.—Бюлл. Моск. общ. иснт. природы, новая серия, отд. геол., 1937, 15, вып. 2.
- Губонина З. П. Описание пыльцы видов рода *Tilia* L., произрастающих на территории СССР.—Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1952. Материалы по геоморфологии и палеогеографии СССР, вып. 7.
- Деревья и кустарники СССР. Т. I. Голосеменные. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1949.
- Дробов В. П. Загадки саксаула.—Журнал Русск. ботан. общ., 1923, 6.
- Заклинская Е. Д. 1. Материалы к истории флоры и растительности палеогена Северного Казахстана в районе Павлодарского Прииртышья.—Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 141, геол. серия (№ 58).
- Заклинская Е. Д. 2. Описание пыльцы и спор некоторых видов растений Полярной тундры. Описание некоторых видов пыльцы и спор, выделенных из третичных отложений Пасековского карьера Воронезской области.—Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 142, геол. серия (№ 59).
- Заклинская Е. Д. 3. Споры-пыльцевые спектры эоценовых отложений Северного Приаралья.—Докл. Акад. наук СССР, 1953, 92, вып. 5.
- Заклинская Е. Д. 4. Споры-пыльцевые спектры морского олигоцена Северного Приаралья.—Докл. Акад. наук СССР, 1953, 92, вып. 6.
- Заклинская Е. Д. 5. Материалы к истории палеогеновой и неогеновой флоры Северного Кавказа. Вопросы петрографии и минералогии. Т. I. Изд. Акад. наук СССР, 1953.
- Заклинская Е. Д. Морфология пыльцы некоторых видов пустынных растений. В кн.: Пустыни и их освоение, т. II. М., Изд. Акад. наук СССР, 1954.
- Зауер В. В. Морфология пыльцы голосеменных. В кн.: Пыльцевой анализ. М., Госгеоллиздат, 1950.
- Зауер В. В. Ископаемые виды рода *Cedrus* и их значение для стратиграфии континентальных отложений. В кн.: Материалы по палинологии и стратиграфии. М., Госгеоллиздат, 1954.
- Ильин М. М. Реферат работы К. П. Коровина Очерки по истории развития растительности Средней Азии.—Сов. ботаника, 1936, № 2.
- Ильин М. М. К происхождению флоры пустынь Средней Азии.—Сов. ботаника, 1937, № 6.

- Ильин М. М. Реликтовые элементы широколиственных лесов во флоре Сибири и их возможное происхождение. В кн.: Проблемы реликтов по флоре СССР. (Тезисы совещания). Вып. 2. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1938.
- Ильин М. М. О некоторых взаимосвязях во флоре пустынь Средней Азии и Америки. — Сов. ботаника, 1945, № 6.
- Ильин М. М. Некоторые итоги изучения пустынь Средней Азии. В кн.: Материалы по истории флоры и растительности. Вып. 2. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1946.
- Ильин М. М. Природа пустынного растения (эремофита). Пустыни и их освоение. Результаты совещания по изучению и освоению пустынь (с 25 по 29 февраля 1948 г.). М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1950.
- Кассин Н. Г. Краткий геологический очерк Северо-Восточного Казахстана. — Труды Всес. геол.-развед. объедин., 1931, вып. 165.
- Кассин Н. Г. Новые данные о строении Западно-Сибирской низменности, Тургайской и Иртышской впадин. — Пробл. сов. геологии, 1937, № 7.
- Кассин Н. Г. Материалы по палеогеографии Казахстана. Алма-Ата, Изд. Акад. наук Казахской ССР, 1947.
- Колесников В. Б. Верхний миоцен. В кн.: Стратиграфия СССР, т. 12. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1940.
- Корнилова В. С. 1. Новые данные о флоре индрикотериевых слоев Тургай. — Изв. Акад. наук Казахской ССР, серия ботан., 1950, вып. 7.
- Корнилова В. С. 2. Новые материалы к третичной флоре Тургай. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1950, № 12 (69).
- Корнилова В. С. 1. Континентальная третичная флора Тортмолы. — Ученые зап. Казахск. унив. им. С. М. Кирова, 1952, 15. Геология и география, вып. 1.
- Корнилова В. С. 2. К характеристике флоры болаттамских слоев Тургай. — Изв. Акад. наук Казахской ССР, 1952, серия биол., вып. 9.
- Корнилова В. С. 3. О полтавской флоре Казахстана. — Докл. Акад. наук СССР, геология, 1955, 104, № 1.
- Корнилова В. С. и Лавров В. В. О находке третичной ксерофитной флоры в Тургае и ее стратиграфическое положение. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1949, № 5 (51).
- Коровин Е. П. Очерки по истории развития растительности Средней Азии. — Бюлл. Средне-Азиатского гос. унив., 1935, № 20(4).
- Коровин Е. П. Растительность Средней Азии и Южного Казахстана. Ташкент. — Изд. Казахского филиала Акад. наук СССР, 1939.
- Краснов А. К. Опыт истории развития флоры южной части Восточного Тянь-Шаня. — Изв. Русск. геогр. общ., 1888, 7.
- Крашенинников И. М. Растительный покров Киргизской республики. — Труды Общ. изуч. Киргизск. края, вып. 6 (т. V, вып. 2). Оренбург, 1925.
- Криштофович А. Н. Новые данные к верхнетретичной флоре Северо-Западной Сибири. — Изв. Геол. ком., 1927, 16, № 7.
- Криштофович А. Н. 1. Новые данные к вопросу о третичной и меловой флоре Арало-Каспийского края и ее отношении к ископаемой флоре Средней Азии. Отчет о работе почвенно-ботанического отряда Казахской экспедиции Академии наук СССР, 1930, 4, вып. 2.
- Криштофович А. Н. 2. Основные черты развития третичной флоры Азии. — Изв. Главн. ботан. сада РСФСР, 1930, 29, вып. 3—4.
- Криштофович А. Н. 1. Основные пути развития флоры Азии. — Ученые зап. Ленингр. гос. унив., 1936, № 9, серия геол.-почв.-геогр., вып. 2.
- Криштофович А. Н. 2. Развитие ботанико-географических провинций северного полушария с конца мелового периода. — Сов. ботаника, 1936, № 3.
- Криштофович А. Н. Ботанико-географическая и климатическая зональность в конце палеозойской эры. — Природа, 1937, № 2.
- Криштофович А. Н. Миоценовая флора Украины и ее связь через Урал с третичной флорой Азии. — Сборник памяти А. В. Фомина. Киев, Изд. Акад. наук Украинской ССР, 1938.
- Криштофович А. Н. Характеристика третичных флор Казахстана. В кн.: Геология СССР, т. 20. Л., Госгеолиздат, 1940.
- Криштофович А. Н. Палеоботаника. Изд. 3. М.—Л., Госгеолиздат, 1941.
- Криштофович А. Н. Происхождение и развитие мезозойской флоры. В кн.: Труды юбилейной сессии Ленингр. гос. унив., 1946.
- Криштофович А. Н. Развитие ботанико-географических областей северного полушария с начала третичного периода. В кн.: Вопросы геологии Азии, т. II. Изд. Акад. наук СССР, 1955.
- Криштофович А. Н. и Палбин И. В. Новые материалы к третичной флоре Тургайской области. — Изв. Акад. наук, серия ботан., 1915, 9.
- Культиасов М. В. Этюды по формированию растительного покрова жарких пустынь и степей Средней Азии. В кн.: Материалы по истории флоры и растительности СССР, вып. 2. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1946.
- Куприянова Л. А. О пыльце однодольных растений. — Сов. ботаника, 1945, 13.



- Кемпбелл Д. Х. Ботанические ландшафты земного шара. Очерки по географии растений. М., Изд. иностр. лит., 1948.
- Лавренко Е. М. Геоботаника. Вып. 5. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1948.
- Лавренко Е. М. Возраст ботанических областей Евразии.— Изв. Акад. наук СССР, серия геогр., 1951, № 2.
- Лавров В. В. К стратиграфии континентального палеоген-неогена Тургайской впадины. — Изв. Акад. наук Казахской ССР, серия геол., 1949, вып. 9.
- Лавров В. В. О единой стратиграфической схеме для континентальных третичных отложений Приаралья, Тургай и юга Западной Сибири. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1951, № 1 (70).
- Лавров В. В. Краткий обзор континентальных третичных формаций Тургай и юга Западной Сибири. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1953, № 6 (99).
- Лавров В. В. О разнице стратиграфических схем континентальной третичной серии в Казахстане и Западной Сибири. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1955, № 6.
- Лавров В. В. и Соболева Е. И. Некоторые итоги изучения континентальных третичных толщ Тургайской впадины. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1948, № 12 (48).
- Малеев В. П. Растительность причерноморских стран (Эвксинской провинции Средиземноморья), ее происхождение и связи. Геоботаника, вып. 4. Труды Бот. инст. Акад. наук СССР, 1940, 3.
- Малаякина В. С. Определитель спор и пыльцы. Юра — мел. — Труды ВНИГРИ, новая серия, вып. 33. М.—Л., Гос. тех. изд. нефт. и горно-топливн. лит., 1949.
- Матвеева О. В. К истории растительности четвертичного периода в Павлодарском Прииртышье. — Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 141, геол. серия (№ 58).
- Монозон М. Х. Описание пыльцы полыней, произрастающих на территории СССР (для целей пыльцевого анализа).— Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1950, вып. 46.
- Монозон М. Х. Описание пыльцы семейства маревых. — Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1952. Материалы по геоморфологии и палеогеографии СССР, вып. 7.
- Монозон-Смолина М. Х. К вопросу о морфологии пыльцы некоторых видов *Pinus*. — Ботан. журнал, 1949, 4.
- Мчедlishvili П. А. К вопросу биостратиграфии и палеобиологии тургайских флор Казахстана. (Тезисы диссертации). Тбилиси, Изд. Акад. наук Грузинской ССР, 1948.
- Мчедlishvili П. А. 1. К вопросу о параллелизации континентальных третичных отложений среднего течения р. Улько-Як со смежными районами Казахстана. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1949, № 7 (52).
- Мчедlishvili П. А. 2. О тургайской флоре Казахстана. — Докл. Акад. наук СССР, 1949, 66, № 3.
- Мчедlishvili П. А. 1. О возрасте корбулевых слоев Закавказья и Северного Приаралья. — Докл. Акад. наук СССР, 1950, 70, № 1.
- Мчедlishvili П. А. 2. Палеоботанические данные в связи со стратиграфией континентальных третичных отложений Казахстана. — Изв. Акад. наук СССР, серия геол., 1950, № 6.
- Мчедlishvili П. А. О некоторых принципиальных вопросах палеоботаники как раздела палеобиологии.— Изв. Акад. наук СССР, серия биол., 1952, № 5.
- Наумова С. Н. Споры и пыльца углей СССР. — Труды XVII сессии Междунар. геол. конгр., 1937, М., ОНТИ, 1939.
- Нейбург М. Ф. 1. Ископаемая растительность Зайсанской котловины. — Природа, 1928, № 11.
- Нейбург М. Ф. 2. О материалах Ашутасской экспедиции. — Докл. Акад. наук СССР, 1928, № 20.
- Никифорова К. В. Геология и палеогеография Северного и Центрального Казахстана. Труды Инст. геол. наук Акад. наук СССР, 1953, вып. 141, геол. серия (№ 58).
- Овечкин Н. К. Среднепалеогеновые отложения Тургайской впадины и Северного Прииртышья. Автореферат, Л., Изд. Всес. геол.-развед. инст., 1951.
- Овечкин Н. К. Отложения среднего палеогена Тургайской впадины и Северного Приаралья. М., Гос. научно-техн. изд. лит. по геологии и охране недр, 1954.
- Овчинников И. И. К истории растительности юга Средней Азии.— Сов. ботаника, 1940, № 3.
- Орлов Ю. А. 1. Некоторые данные о третичных и послетретичных отложениях северной окраины Киргизской горной страны. — Изв. Главн. геол.-развед. упр., 1930, 49, № 10.
- Орлов Ю. А. 2. Раскопки фауны гиппариона на Иртыше. — Природа, 1930, № 1.
- Орлов Ю. А. Новые местонахождения третичных млекопитающих в Казахстане.— Природа, 1937, № 9.

- Орлов Ю. А. Местонахождение третичных млекопитающих у Аральского моря. — Природа, 1939, № 5.
- Орлов Ю. А. Третичные млекопитающие и местонахождение их остатков. — Труды Палеонт. инст. Акад. наук СССР, 1941, 7, вып. 3.
- Орлов Ю. А. Новые находки ископаемых млекопитающих в Сибири. — Природа, 1949, № 9.
- Павлов Н. В. Растительное сырье Казахстана (растения, их вещества и использование). М., Изд. Акад. наук СССР, 1947.
- Палеонтология СССР. Прил. к т. 12: Криштофович А. Н. Каталог растений ископаемой флоры СССР. М. — Л., Изд. Акад. наук СССР, 1941.
- Палибин И. В. Заметки о третичных растениях Киргизской степи. СПб., 1904.
- Палибин И. В. Ископаемые растения берегов Аральского моря. — Изв. Туркестан. отд. Русск. геогр. общ., 1906, 4, вып. 7.
- Палибин И. В. К изучению ископаемой флоры Ашутаса. — Труды Ботан. инст. Акад. наук СССР, серия 1, 1933, вып. 1.
- Палибин И. В. Этапы развития флоры прикаспийских стран со времени мелового периода. — Сов. ботаника, 1935, № 3.
- Покровская И. М. Основные этапы в развитии растительности на территории СССР в третичное время. — Ботан. журнал. 1954, 39.
- Покровская И. М., Бойцова Е. П. Материалы по стратиграфии континентальных олигоценовых и миоценовых отложений Тургайской впадины. В кн.: Материалы по палинологии и стратиграфии. М., Гос. научно-техн. изд. лит. по геологии и охране недр., 1954.
- Попов М. Г. Основные черты истории развития флоры Средней Азии. — Бюлл. Средне-Азиатского гос. ун-ва, 1927, вып. 15.
- Попов М. Г. Основные периоды формирования и иммиграции во флоре Средней Азии в век антофитов и реликтовые типы этой флоры. В кн.: Проблемы реликтов во флоре СССР. (Тезисы совещания, вып. 1). М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1938.
- Пояркова А. И. Флора индрикотериевых слоев Центрального Казахстана. — Труды Геол. инст. Акад. наук СССР, 1932, 2.
- Пояркова А. И. Новые материалы к третичной флоре Северного Приаралья. — Труды Нефт. геол. инст., 1935, вып. 39. Палеоботанич. сб. № 2.
- Пыльцевой анализ. Под ред. А. Н. Криштофовича. М., Госгеолиздат, 1950.
- Сладков А. Н. Определение видов *Lycopodium* L. и *Selaginella* Sprng. по спорам и микроспорам. Труды инст. геогр. Акад. наук СССР, 1951, вып. 50.
- Сладков А. Н. О морфологических признаках пыльцевых зерен вересковоцветных. — Докл. Акад. наук СССР, 1953, 92, № 5, Ботаника.
- Сладков А. Н. Морфологическое описание пыльцы парнолистниковых Туркмении (для целей пыльцевого анализа). — Труды Инст. геогр. Акад. наук СССР, 1954, 61.
- Соболева Е. И. Новые данные к стратиграфии и литологии третичных континентальных толщ центральной части Тургайской впадины. — Вестн. Акад. наук Казахской ССР, 1950, № 12 (69).
- Сукачев В. Н. Иртышская фито-палеонтологическая экспедиция. Научно-популярный очерк экспед. Л., Изд. Акад. наук СССР, 1931—1932.
- Сукачев В. Н. Исследования четвертичных отложений Нижне-Иртышского края. В кн.: Экспедиции Всесоюзной Академии наук, 1932. Л., Изд. Акад. наук СССР, 1933.
- Сукачев В. Н. *Brasenia purpurea* Mchx. в верхнетретичных отложениях Западной Сибири. — Докл. Акад. наук СССР, 1935, 1, № 2—3.
- Сьюорд А. Ч. Века и растения. Обзор растительности прошлых геологических периодов. М.—Л., ОНТИ, 1936.
- Титов И. А. Взаимодействие растительных сообществ и условий среды. М.—Л., Изд. «Сов. наука», 1952.
- Узнадзе-Дгебуадзе М. Д. Эоценовая флора Южного Урала. — Труды Геол. инст. Акад. наук Грузинской ССР, серия геол., 1948, № 4/9.
- Формозова Л. Н. Стратиграфическое положение и возраст железорудных слоев Северного Приаралья. — Бюлл. МОИП, отд. геол., 1949, 24, вып. 4.
- Формозова Л. Н. Косая слоистость и происхождение терригенного материала кутанбулакской свиты Северного Приаралья. — Бюлл. МОИП, отд. геол., 1951, 26, вып. 3.
- Хозацкий Л. И. Нахождение остатков морской черепахи в олигоценовых отложениях Приаралья. — Докл. Акад. наук СССР, новая серия, 1945, 49, № 1.
- Чигуряева А. А. Строение пыльцы у *Gnetales*. — Докл. Акад. наук СССР, 1937, 15, № 4.
- Чигуряева А. А. К зайсанской третичной флоре Аму-Таса. — Докл. Акад. наук СССР, 1948, 61, № 2.
- Чигуряева А. А. 1. К ископаемой третичной флоре и растительности Приаралья. — Бюлл. Моск. общ. испыт. природы, отд. геол., 1951, 26, вып. 5.
- Чигуряева А. А. 2. О эоценовой флоре южной Эмбы. Там же.

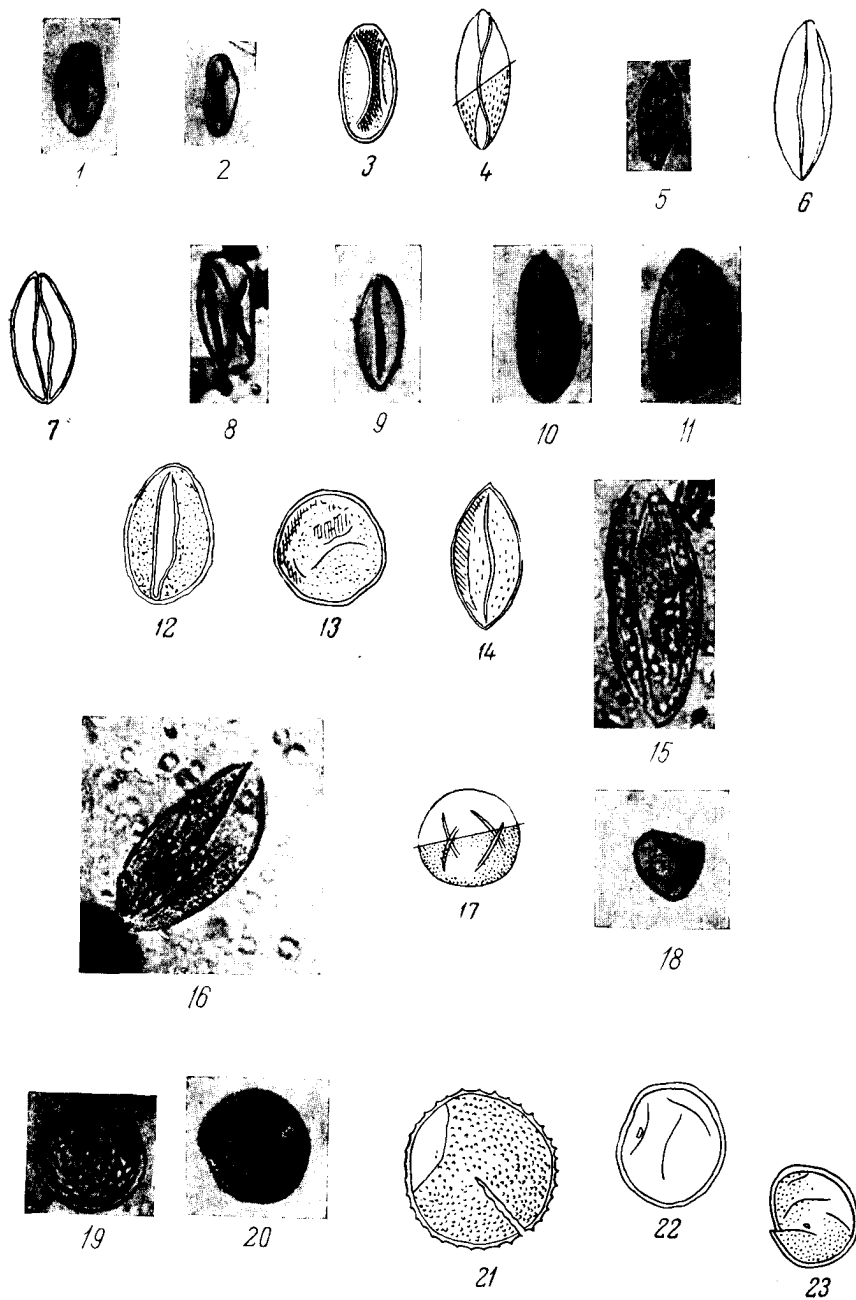
- Чигурьева А. А. 3. О находке микроспоры вельвичии в эоценовых отложениях Западного Казахстана. — Ботан. журнал, 1951, 36, № 5.
- Штепа И. С. К вопросу изучения пыльцы кавказских сосен. — Сообщ. Акад. наук Грузинской ССР, 1954, 15., № 3.
- Яншин А. Л. Геологическое строение Северо-Западного Приаралья. В кн.: Материалы по геологии Центрального Казахстана. М.—Л., Изд. Акад. наук СССР, 1940.
- Яншин А. Л. Геология Северного Приаралья. М., Изд. МОИП, 1953.
- Ярмоленко А. В. К вопросу о разрыве между данными палеоботанической летописи и составом современной флоры. — Сов. ботаника. 1941, № 5—6.
- Deillandre G. Considérations biologiques pour les microorganismes d'origine planctonique conservées dans les silex de la craie. T. V—IX. — Bull. Biol. Trans. Belg. 1935, № 69.
- Caïn G. The identification of species in fossil pollen of *Pinus* by size-frequency determinations. — Amer. J. Bot. 1940, 27.
- Chaney R. The Kucha flora in relation to the physical conditions in Central Asia during the late tertiary. — Sweden Geogr. Ann., London, 1935.
- Erdtman G. An introduction to pollen analysis. Waltham, Mass., 1943.
- Erdtman G. Pollen morphology and plant taxonomy. V. I. Angiosperms. Stockholm, Almqvist Wiksell, 1952.
- Furere E. Pollenanalytische Studien in der Schweiz. — Vierteljahrsscher Naturforsch. Ges. Zürich, 1927, 72.
- Gothan W. Die merkwürdigen pflanzengeographischen Besonderheiten in den Mitteleuropäischen Karbonfloren. — Paläontographica, 91, Abt. B. Stuttgart, 1951.
- Heer O. In: Abich H. Beiträge zur Paläontologie des asiatischen Russlands. — Mém. Acad. Sci. St-Petersb., 1858.
- Horman H. Die pollenanalytische Unterscheidung von *Pinus montana*, *P. silvestris* und *P. cembra*. — Österr. Bot. Schr., 1929, 78.
- Kirchheimer F. Die Symplocaceen der erdgeschichtlichen Vergangenheit. — Paläontographica. Beiträge Naturgesch. Vorzeit., 1949, 90, Abt. B., Lief. 1—3.
- Kirchheimer F. Microfossilien aus Salzablagerungen des Tertiärs. — Paläontographica, 1950, 90, Abt. B., Lief. 4—6.
- Kräusel R. Koniferen und andere Gymnospermen aus der Trias von Lunz. Niederösterreich. — Paläontographica, 1949, 89, Abt. B., Lief. 1—3.
- Kemp G. Pollenanalytische Untersuchungen des miozänen Braunkohlenlagers von Konin and der Warthe. — Paläontographica, 1949, 90, Abt. B., Lief. 1—3.
- Potonie R. J. Zur Mikrobotanik des miozänen Humodils der Niederrheinischen Bucht. — Arb. Inst. Paläobotanik u. Petr. Brensteine, 5. — Preuss. Geol. Landesanst., 1934.
- Potonie R. 2. Zur Mikrobotanik der Kohlen und ihrer Verwandten, zur Morphologie der fossilen Pollen und Sporen. — Vertriebe Preuss. Geol. Landesanst., Berlin, 1934.
- Potonie R. Revision stratigraphisch wichtiger Sporomorphen des Mitteleuropäischen Tertiärs. — Paläontographica, 1951, 91, Abt. B.
- Reissinger A. Die «Pollenanalyse» ausgedehnt auf alle Sedimentgesteine der geologischen Vergangenheit. — Paläontographica, 1950, 90, Abt. B., Lief. 4—6.
- Rudolph K. Mikrofloristische Untersuchung. tertiärer Ablagerungen im Nördlichen Böhmen. — Beih. Botan. Zbl., 1935, 54., Abt. B.
- Selling O. H. Studies in Hawaiian pollen statistics. Part I. The pollen of the Hawaiian Phnerogans. Special publication Bishop. Mus. Honolulu, 38. Hawaii, 1947.
- Stockmans F. Les lignites inéniens de Mol. (Belgique). — Bull. Mus. Hist. Nat. Belg., 1943, 19.
- Thiergart F. Die Pollenflora der Niederlansitzer Braunkohle, besonders im Profil der Grube Marga bei Senftenberg. — Jahrb. — Preuss. Geol. Landesanst., 1937, 58.
- Thiergart F. Die Mikropaläontologie als Pollenanalyse im Dienst der Braunkohlenforschung. Schrift aus dem Gebiete d. Brennstoff-Geologie, 1940, H. 13.
- Thiergart F. 1. Der stratigraphische Wert mesozoischer Pollen und Sporen. — Paläontographica, 1949, 89, Abt. B., Lief. 1—3.
- Thiergart F. 2. Die Sciadopityszone und der Sciadopitysvorstoff in der Niederrheinischen Braunkohle. Düsseldorf, 1949.
- Thomson P. W. Alttertiäre Elemente in der Pollenflora der rheinischen Braunkohle und einige stratigraphisch wichtige Pollenformen derselben. — Paläontographica, 1949, 90, Abt. B., Lief. 1—3.
- Thomson P. W. Grundsätze zur tertiären Pollen und Sporen — Mikrostratigraphie. — Geol. Jahrb., Hannover/Celle, 1950, 65.
- Wodehouse R. P. Pollen grains, their structure, identification and significance in science and medicine. New York, 1935.
- Wodehouse R. P. The oil shales of the Green River formation. — Bull. Torrey Bot. Club. 1932, 59.
- Wodehouse R. P. Tertiary pollen. The oil shales of the eocene Green River formation. — Bull. Torrey Bot. Club., 1933, 60.

## **ТАБЛИЦЫ**

К т а б л и ц е I

- 1—3. *Zamites* sp. (pollen.). Увел. 400.  
4,5. *Encephalarites cycadioides* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
6—11. *Ginkgo bilobaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
12—14. *Ginkgo biloba* L. (recent.). Увел. 400.  
15, 16. *Ginkgoites* sp. (pollen). Увел. 400.  
17, 18. *Taxus cuspidataeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
19, 20. *Taxus baccataeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
21. *Taxites* (?) sp. Увел. 400.  
22, 23. *Torreya californiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.

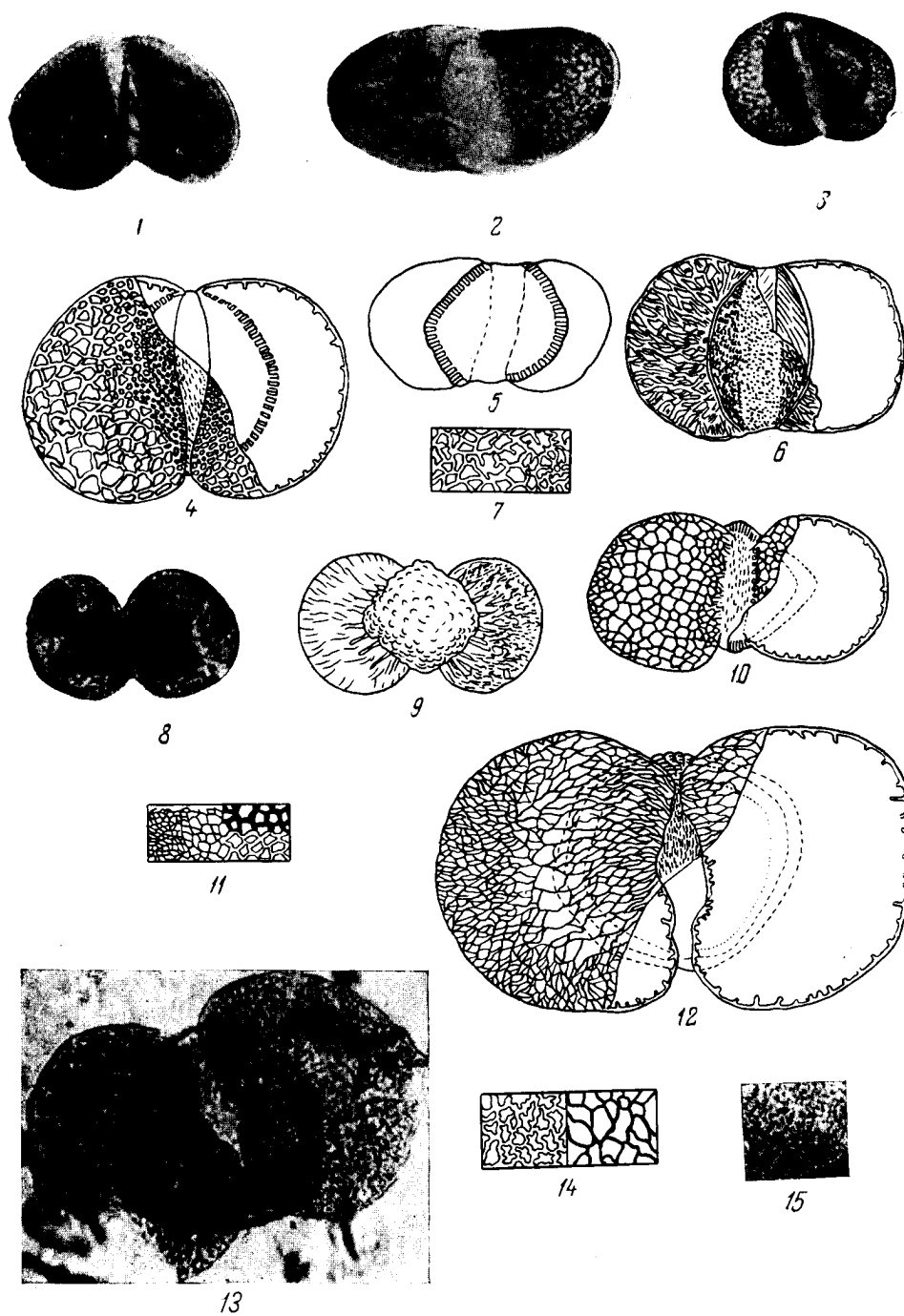
ТАБЛИЦА I



К т а б л и ц е II

- 1,2 *Podocarpus sellowiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
3—6. *Podocarpus andiniiformis* sp. nov. (pollen). Рис. 3 —  
увел. 400; рис. 4—увел. 600.  
7. То же, строение сетки на воздушных мешках. Увел. 500.  
8—10. *Podocarpus nageiaformis* sp. nov. (pollen) Рис. 8 —  
увел. 400; рис. 9. и 10—увел. 500.  
11. То же, строение сетки на воздушных мешках. Увел. 500.  
12, 13. *Podocarpites kazakhstanica* sp. nov. (pollen). Рис. 12 —  
увел. 500; рис. 13 —увел. 400.  
14. То же, строение сетки на воздушных мешках. Увел. 500.  
15. То же, строение структуры поверхности тела. Увел. 500.

ТАБЛИЦА II

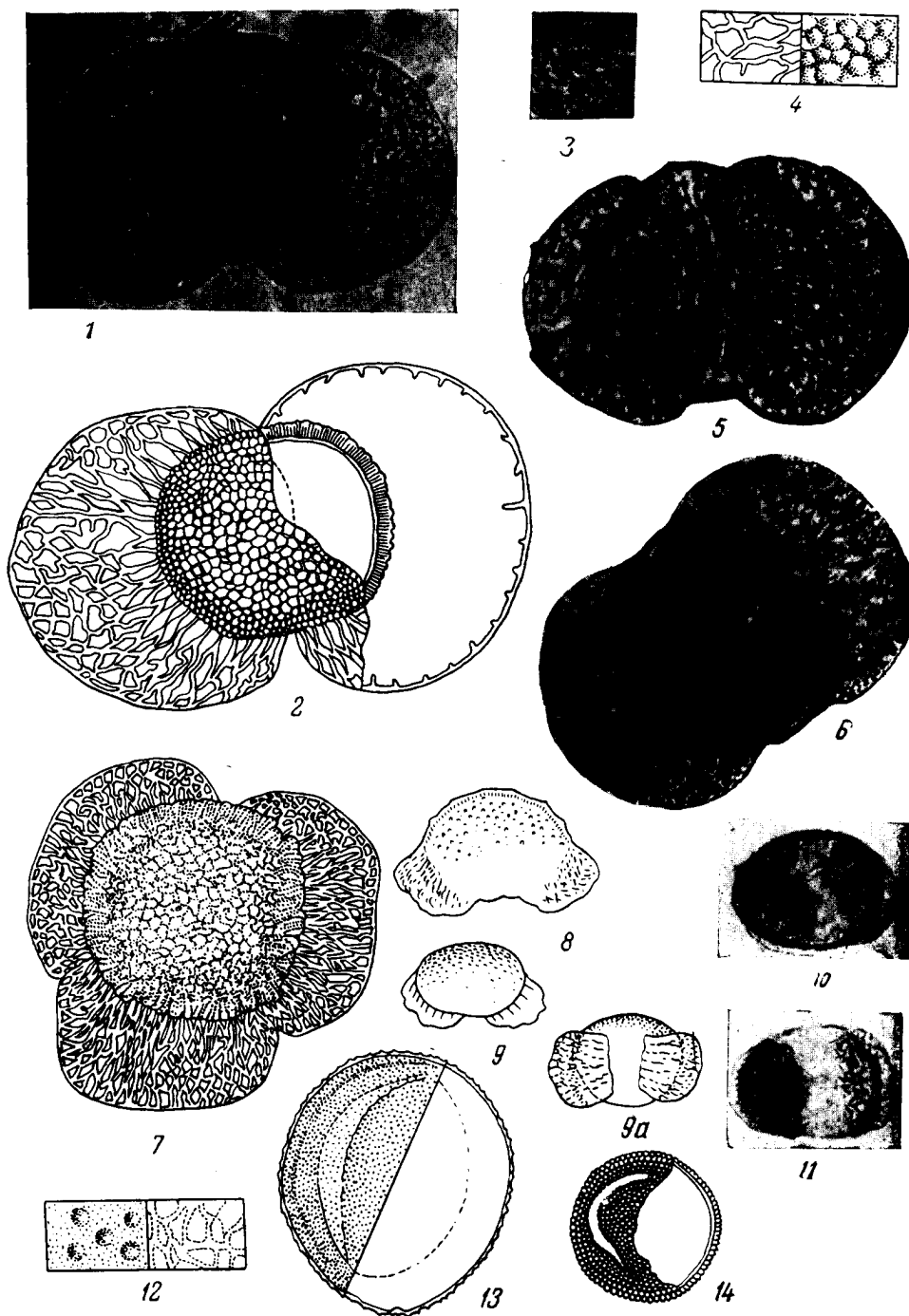




Т а б л и ц е III

- 1,2. *Podocarpites gigantea* sp. nov. (pollen). Рис. 2.—Увел. 500.
3. То же, деталь строения сетки воздушных мешков. Увел. 400.
4. То же, строение сетки воздушных мешков (слева) и скульптуры поверхности тела (справа). Увел. 400.
- 5,6. *Podocarpus andinus* Р о е р р. (recent.) (полярная проекция). Увел. 400.
7. *Podocarpus* aff. *dacrydioides*. A. R i c h. Увел. 400.
- 8—11. *Daerydium elatumiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
12. То же, строение сетки воздушных мешков (справа) и скульптуры поверхности тела (слева). Увел. 500.
13. *Araucaria elegans* sp. nov. (pollen). Увел. 500.
14. *Agathis ovataeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 500.

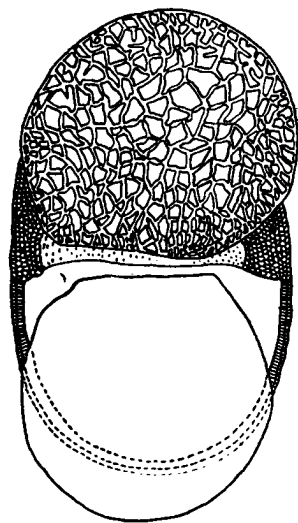
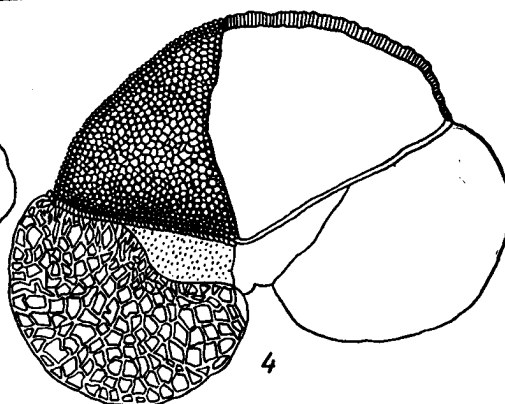
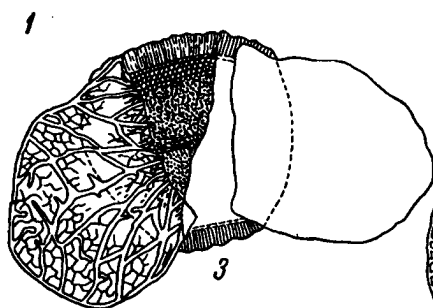
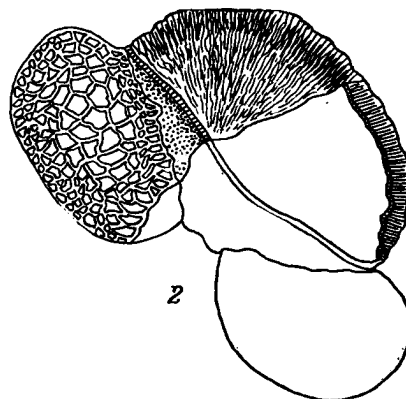
ТАБЛИЦА III



К т а б л и ц е IV

- 1,2. *Abies sibiriciformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. *Abies protofirma* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 4—6. *Keteleeria davidianaeformis* sp. nov. (pollen)  
Увел. 400.

ТАБЛИЦА IV



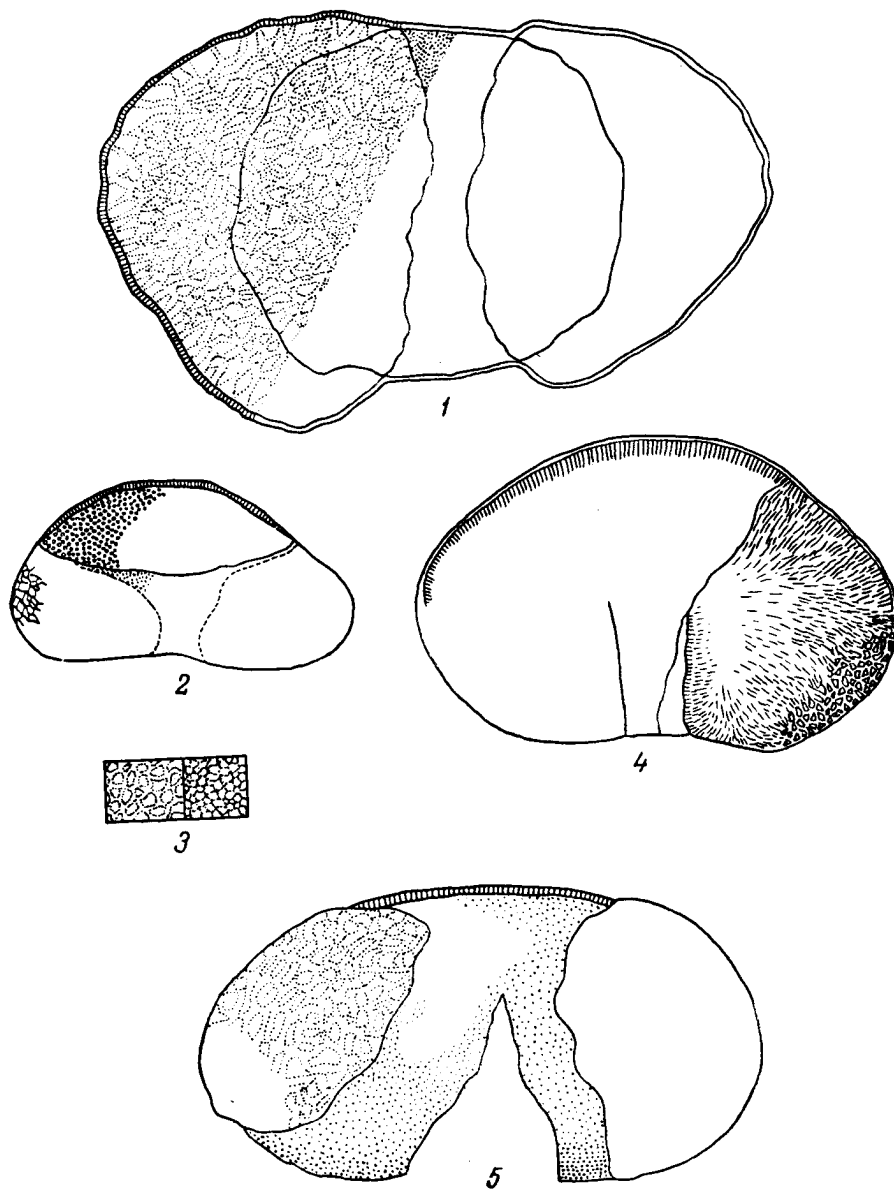
5

6

Р т а б л и ц е V

1. *Keteleeria* sp. Увел. 500.
2. *Picea tasaranica* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (слева) и скульптуры пита (справа). Увел. 500.
4. *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
5. *Picea schrenkianaeformis* sp. nov. (pollen) (из континентальных олигоценовых отложений). Увел. 500.

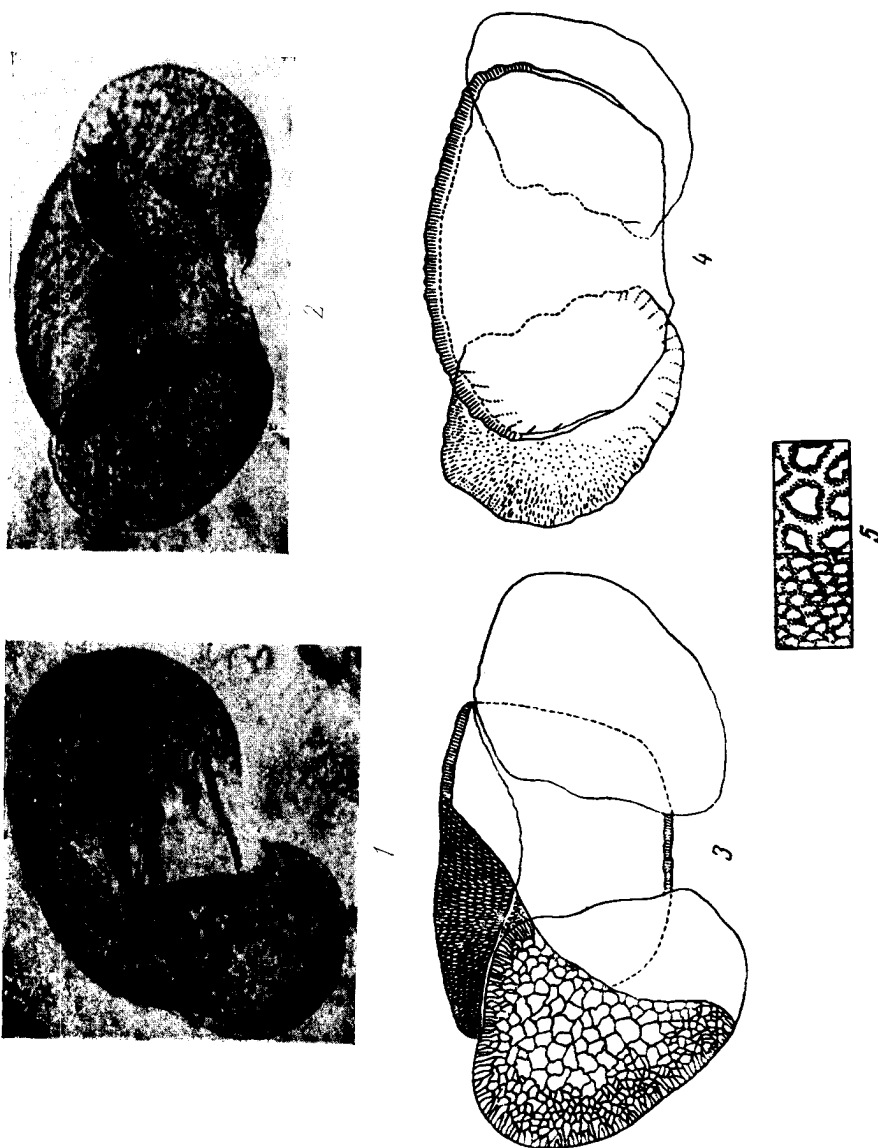
ТАБЛИЦА V



К т а б л и ц е VI

- 1—4. *Picea alata* sp. nov. (pollen) (ex gr. *P. jezoensis* C a r r.).  
Увел. 500.
5. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (справа)  
и структуры поверхности тела (слева). Увел. 500.

ТАБЛИЦА VI

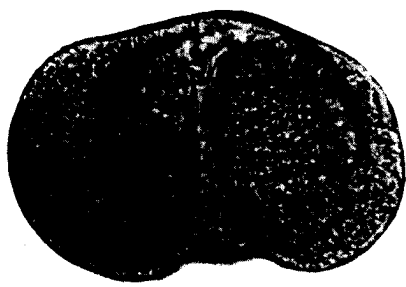




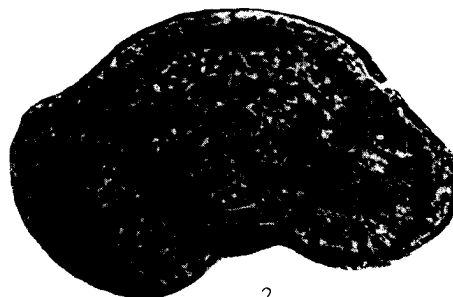
К т а б л и ц е VII

- 1—3. *Cedrus atlantica* M a n e t t i (recent.). Увел. 400.  
4. *Cedrus deodara* L o u d. (recent.). Увел. 400.  
5, 6. *Cedrus libani* L a w s. (recent.). Увел. 400.

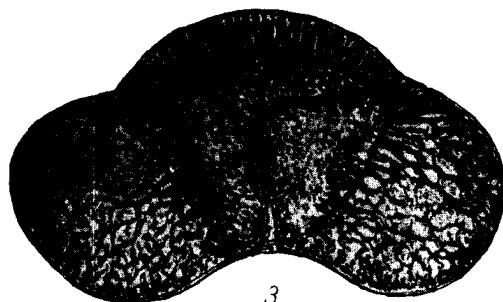
ТАБЛИЦА VII



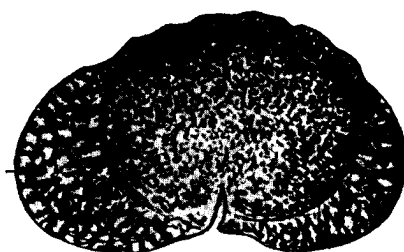
1



2



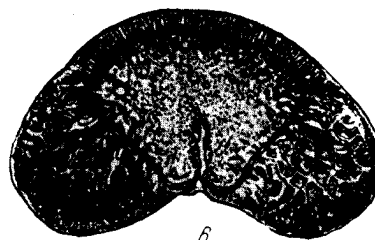
3



4



5

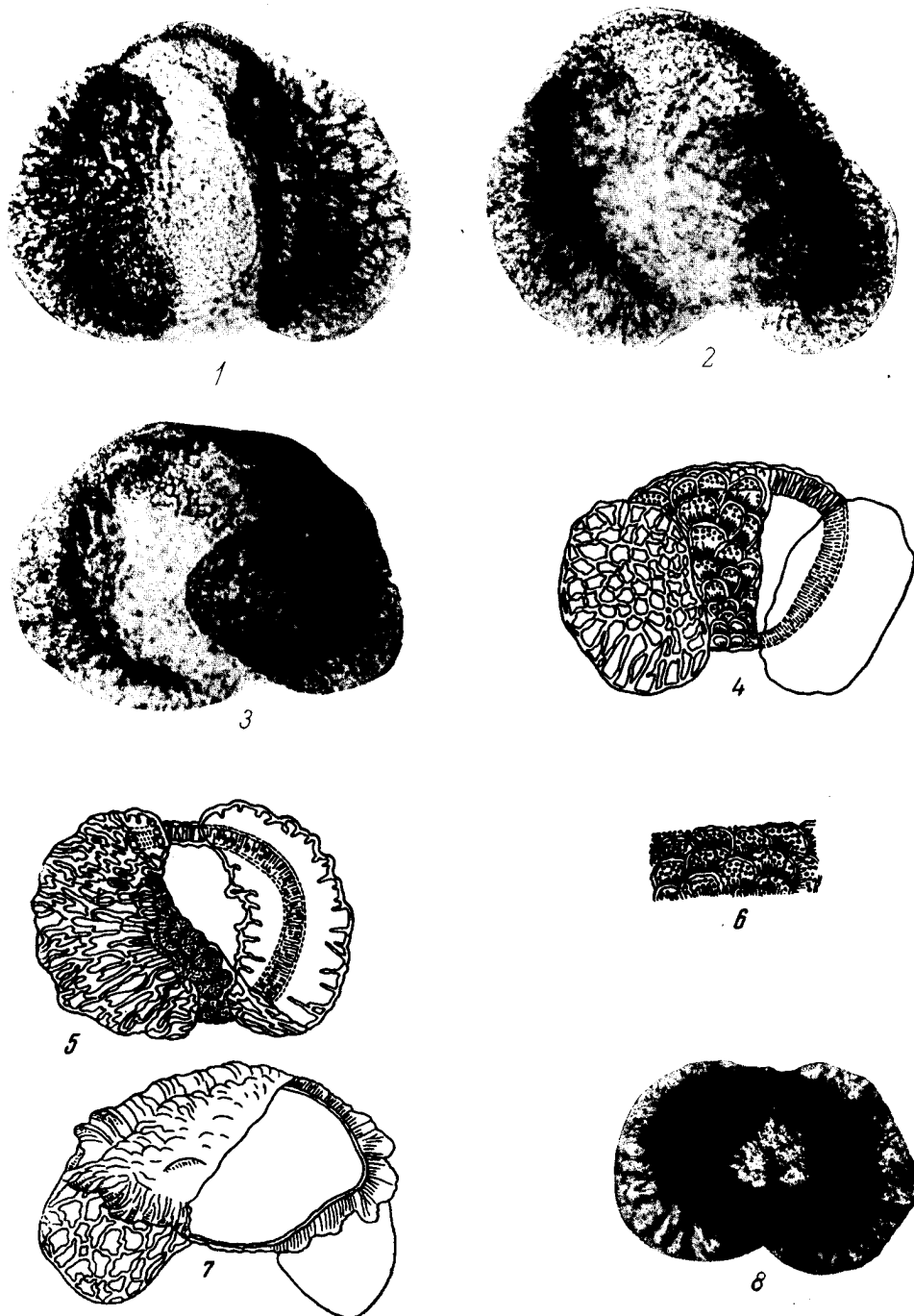


6

К т а б л и ц е VIII

- 1—5. *Cedrus* aff. *deodara* L o u d. Увел. 400.  
6. То же, деталь строения поверхности тела.  
7, 8. *Cedrus laxireticulata* Z a u e r (pollen). Рис. 7—увел. 500;  
рис. 8—увел. 400.

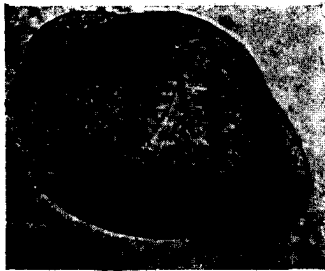
ТАБЛИЦА VIII



К т а б л и ц е IX

- 1—4. *Cedrus piniformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
5, 6. *Cedrus Janschinii* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
7. То же, деталь строения структуры воздушных мешков.  
Увел. 400.  
8—10. *Cedrus parvisaccata* Зауер (pollen). Увел. 400.

ТАБЛИЦА IX



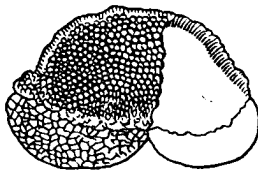
1



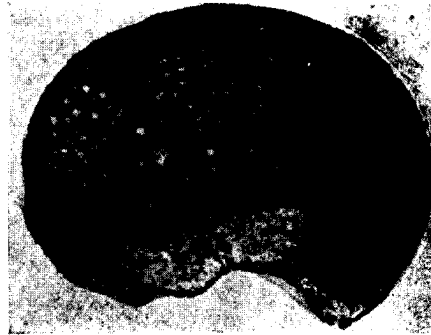
2



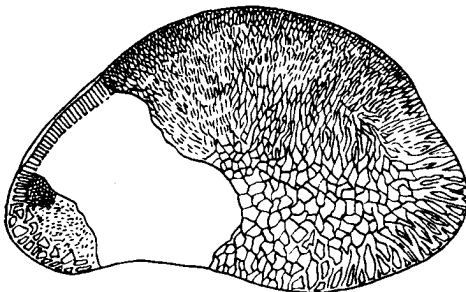
3



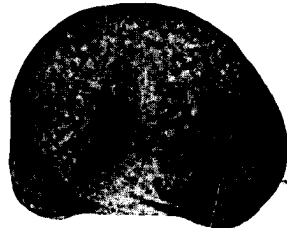
4



5



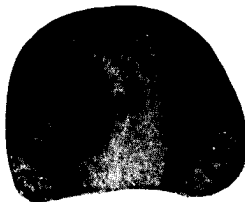
6



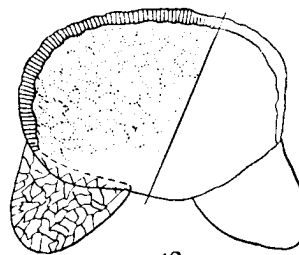
7



8



9

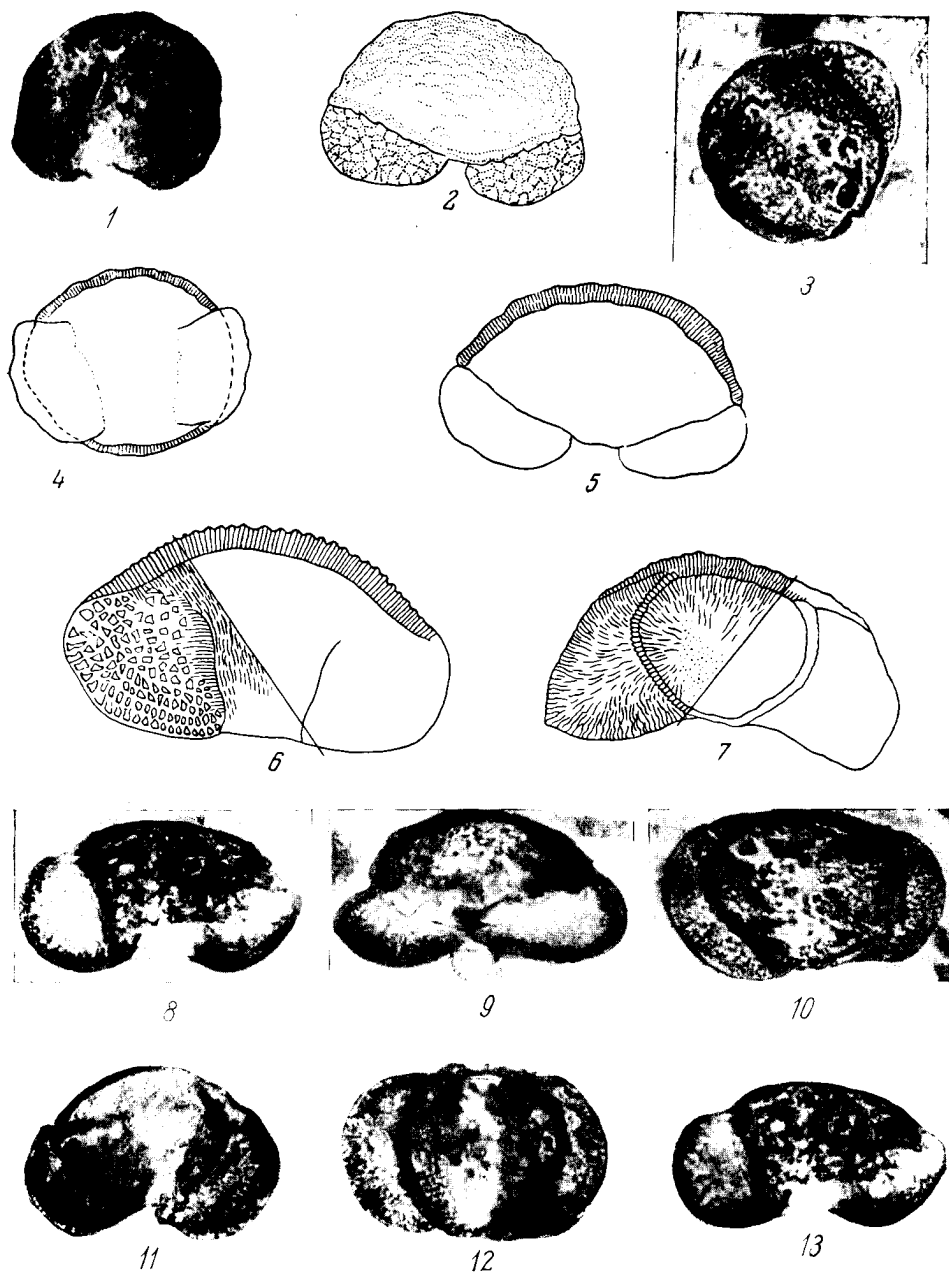


10

К т а б л и ц е X

- 1—5. *Cedrus pusilla* Z a u e r (pollen). Увел. 400.  
6. *Cedrus* aff. *libani* L a w s. Увел. 400.  
7. *Cedrus longisaccata* sp. nov. (pollen). Увел. 400.  
8—13. *Pinus cembraeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.

ТАБЛИЦА X

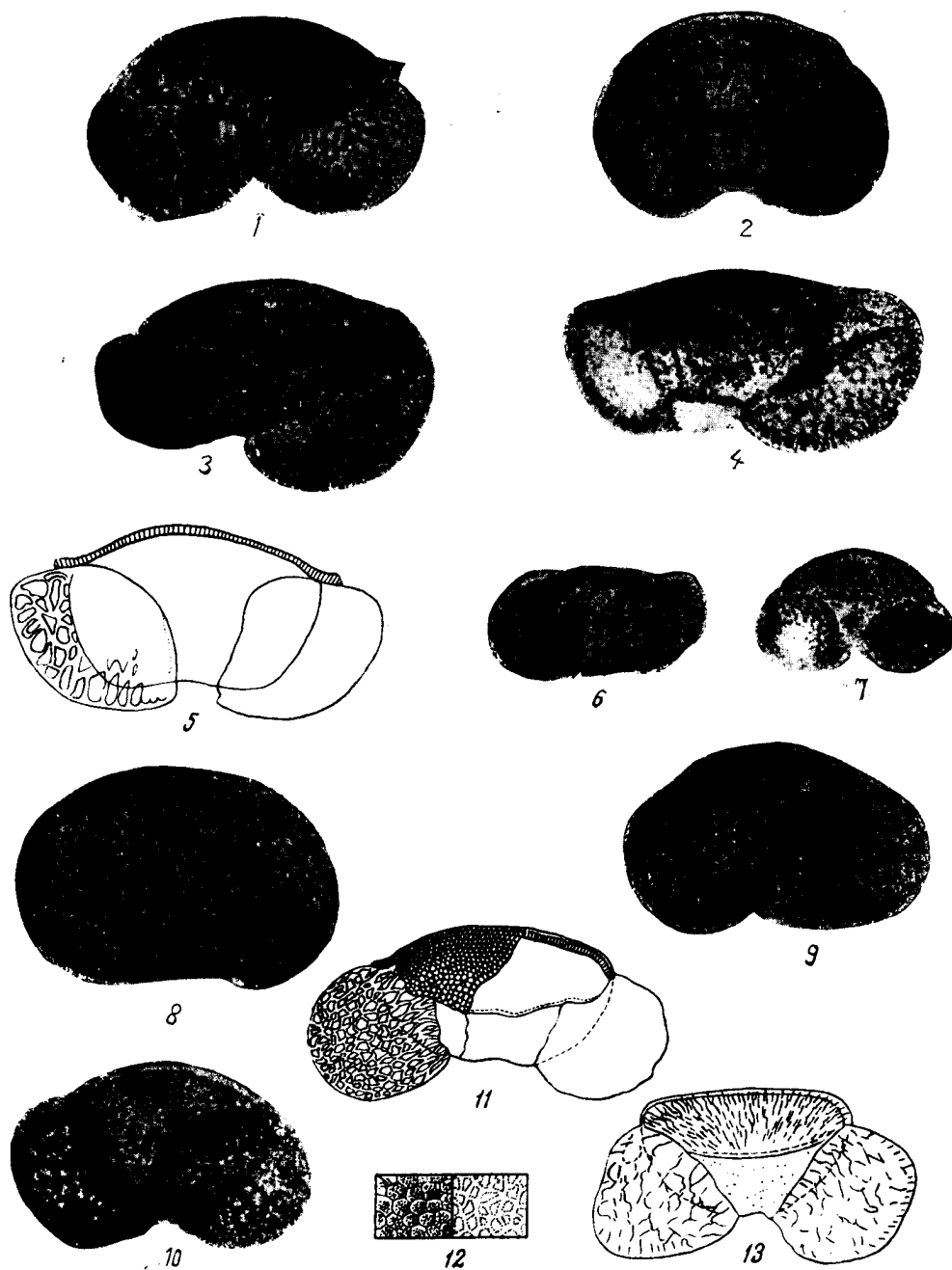




К т а б л и ц е X I

- 1—5. *Pinus* aff. *koraiensis* Sieb. et Zucc. Увел. 400.
- 6, 7. *Pinus microsibirica* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 8—10. *Pinus sibiriciformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
11. *Pinus* ex gr. *sibirica* R u r g. (M a y e r.). Увел. 500.
12. То же, деталь строения сетки воздушных мешков (справа)  
и структуры тела (слева). Увел. 500.
13. *Pinus* ex gr. *sibirica* R u r g. (M a y e r.) из эоценовых отло-  
жений г. Тас-Аран в Северном Приаралье. Увел. 400.

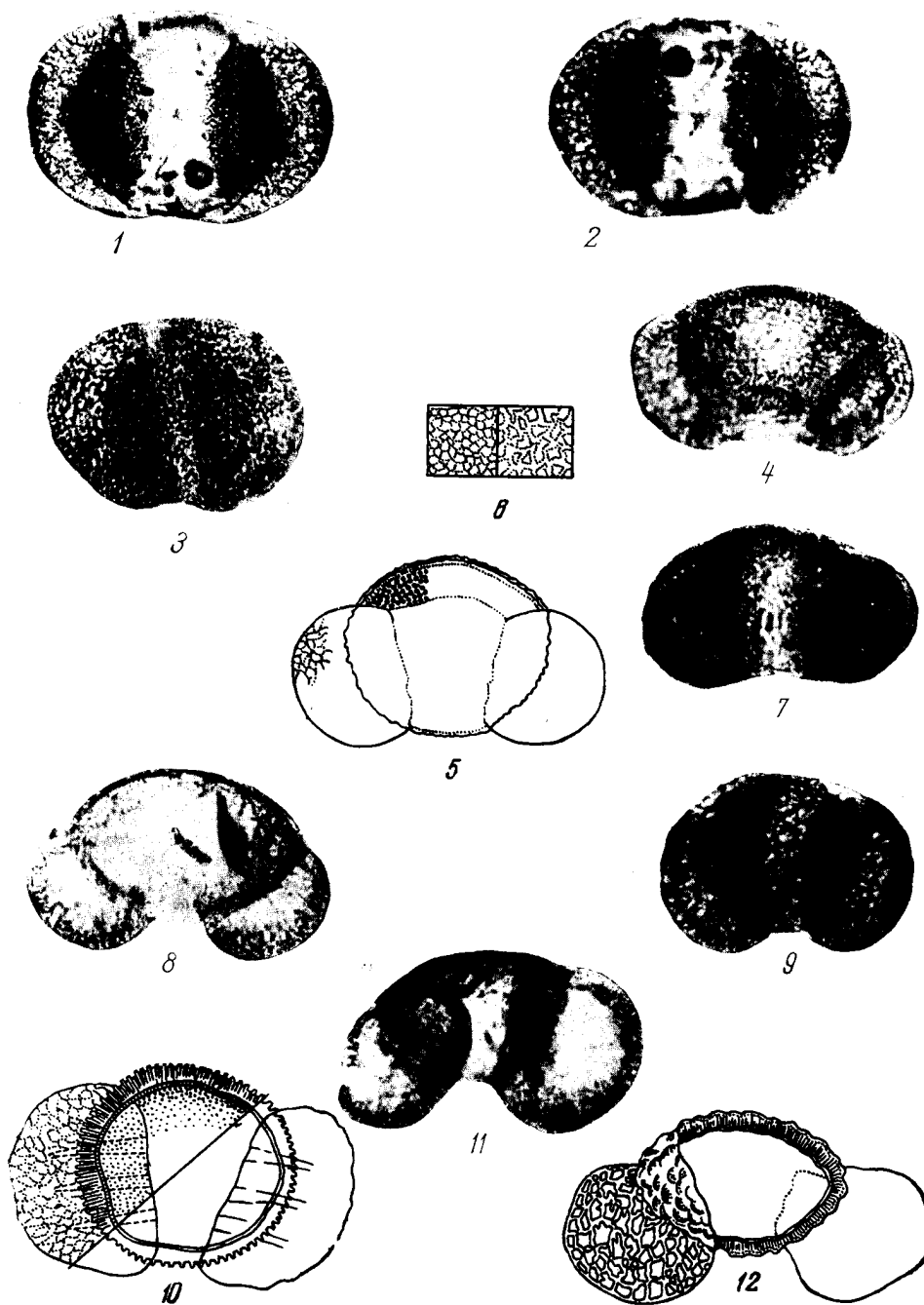
ТАБЛИЦА XI



К т а б л и ц е XII

- 1, 2. *Pinus protocembra* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. *Pinus* ex gr. *protocembra* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 4, 5, 7, 8. *Pinus strobiformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
6. То же, деталь строения сетки мешков (справа) и структуры поверхности тела (слева). Увел. 400.
- 9—12. *Pinus peuceformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.

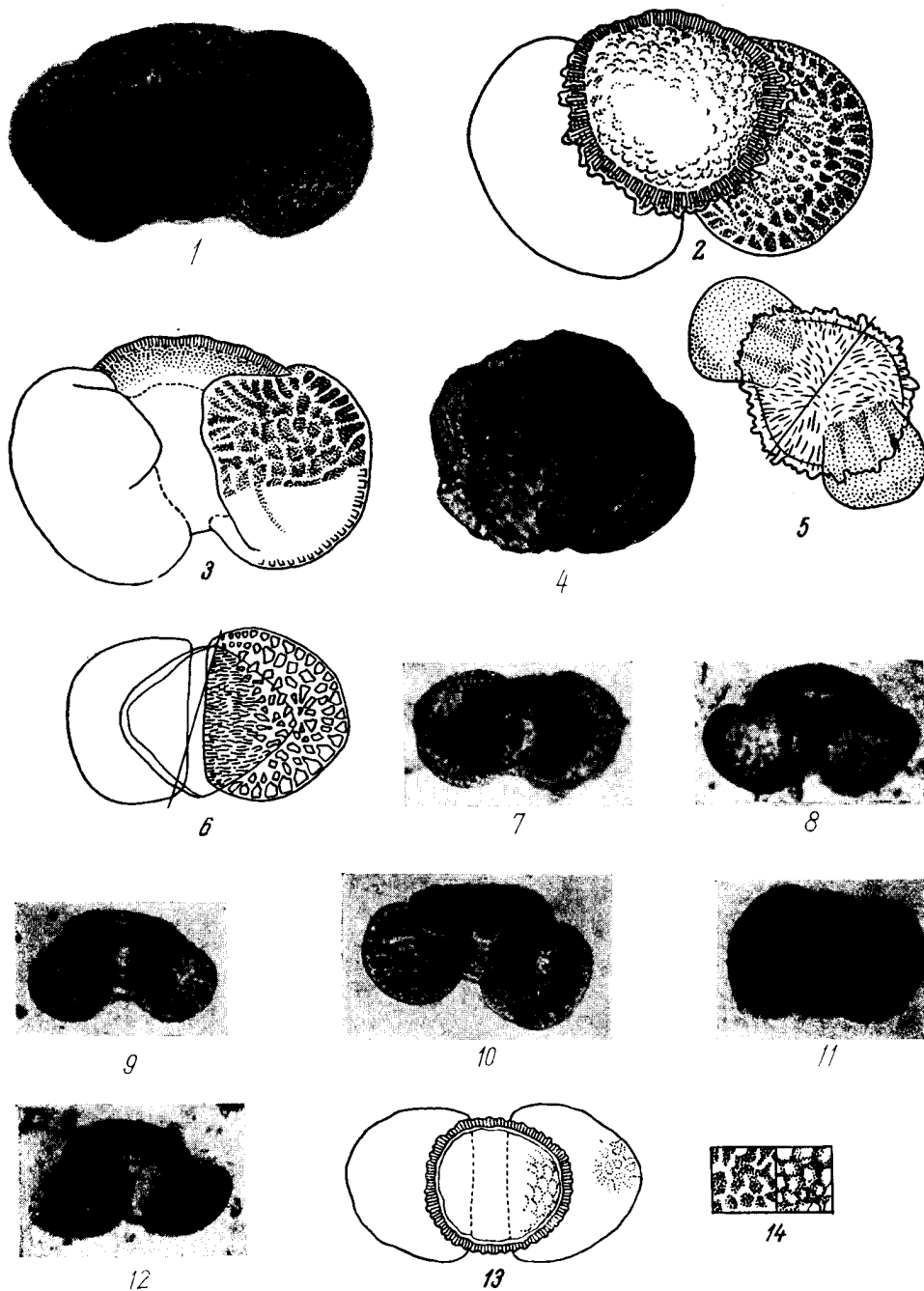
ТАБЛИЦА XII



К т а б л и ц е XIII

- 1—3. *Pinus exelsaeformis* sp. nov. (pollen). Рис. 2, 3—увел. 500,  
рис. 1—увел. 400.
- 4, 5. *Pinus ex* гр. *exelsaeformis* (pollen). Увел. 400.
6. *Pinus gerardianaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 7—9. *Pinus longifoliaformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 10—13. *Pinus ponderosaeformis* sp. nov. (pollen). Рис. 12 — мел-  
кий вариант.
14. То же, деталь стросния сетки воздушных мешков (слева)  
и структуры тела (справа). Увел. 400.

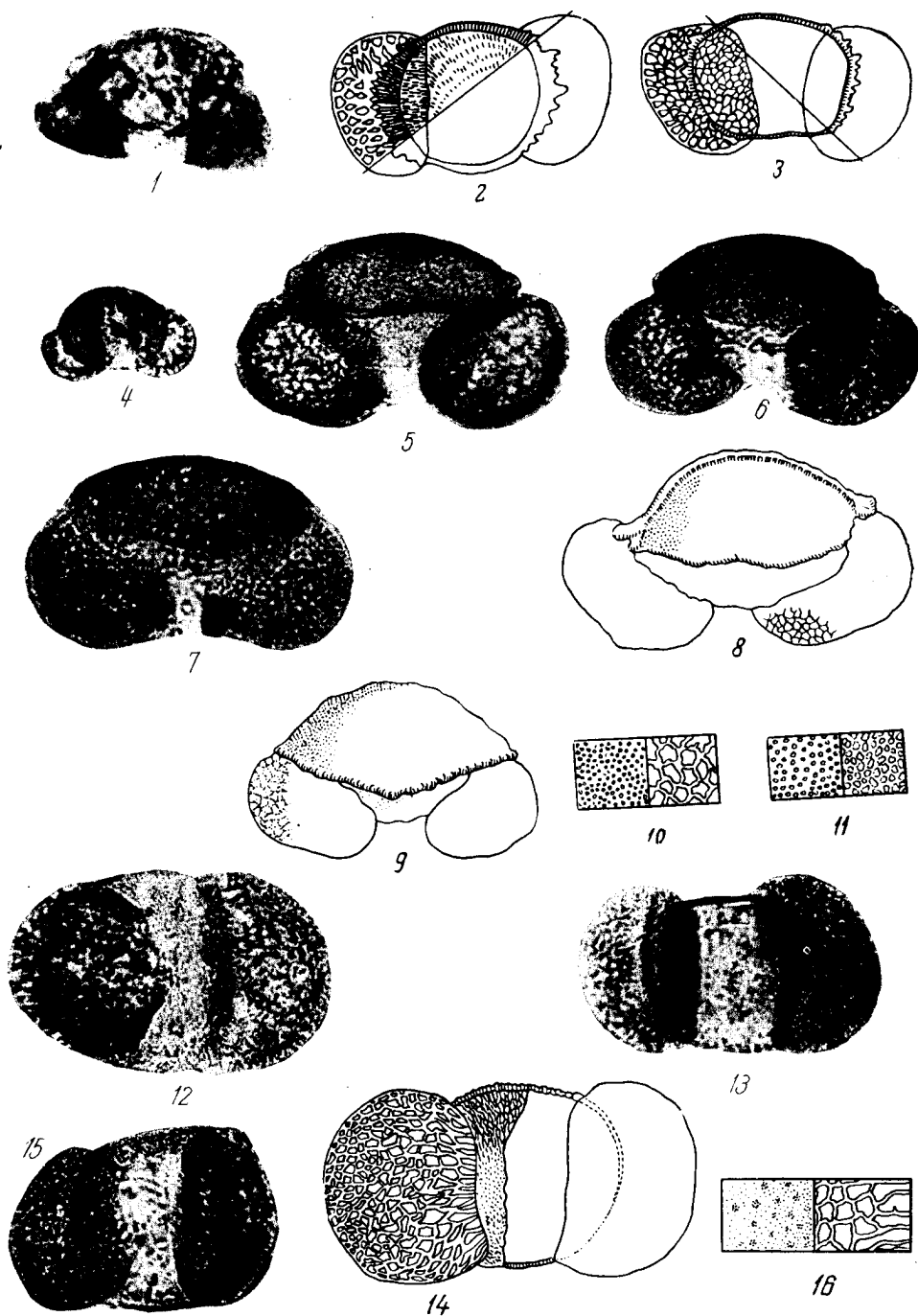
ТАБЛИЦА XIII



К т а б л и ц е XIV

- 1—3. *Pinus bicornis* sp. nov. (pollen). Рис. 2,3—увел. 500;  
рис. 1—увел. 400.
4. *Pinus minutus* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 5—9. *Pinus taedaeformis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
10. То же, строение сетки воздушных мешков (справа) и структуры поверхности тела (слева). Увел. 400.
11. То же.
- 12—15. *Pinus singularis* sp. nov. (pollen). Рис. 14 — увел. 500;  
рис. 12, 13, 15—увел. 400.
16. То же, детали строения структуры тела (справа) и сетки воздушных мешков (слева). Увел. 500.

ТАБЛИЦА XIV

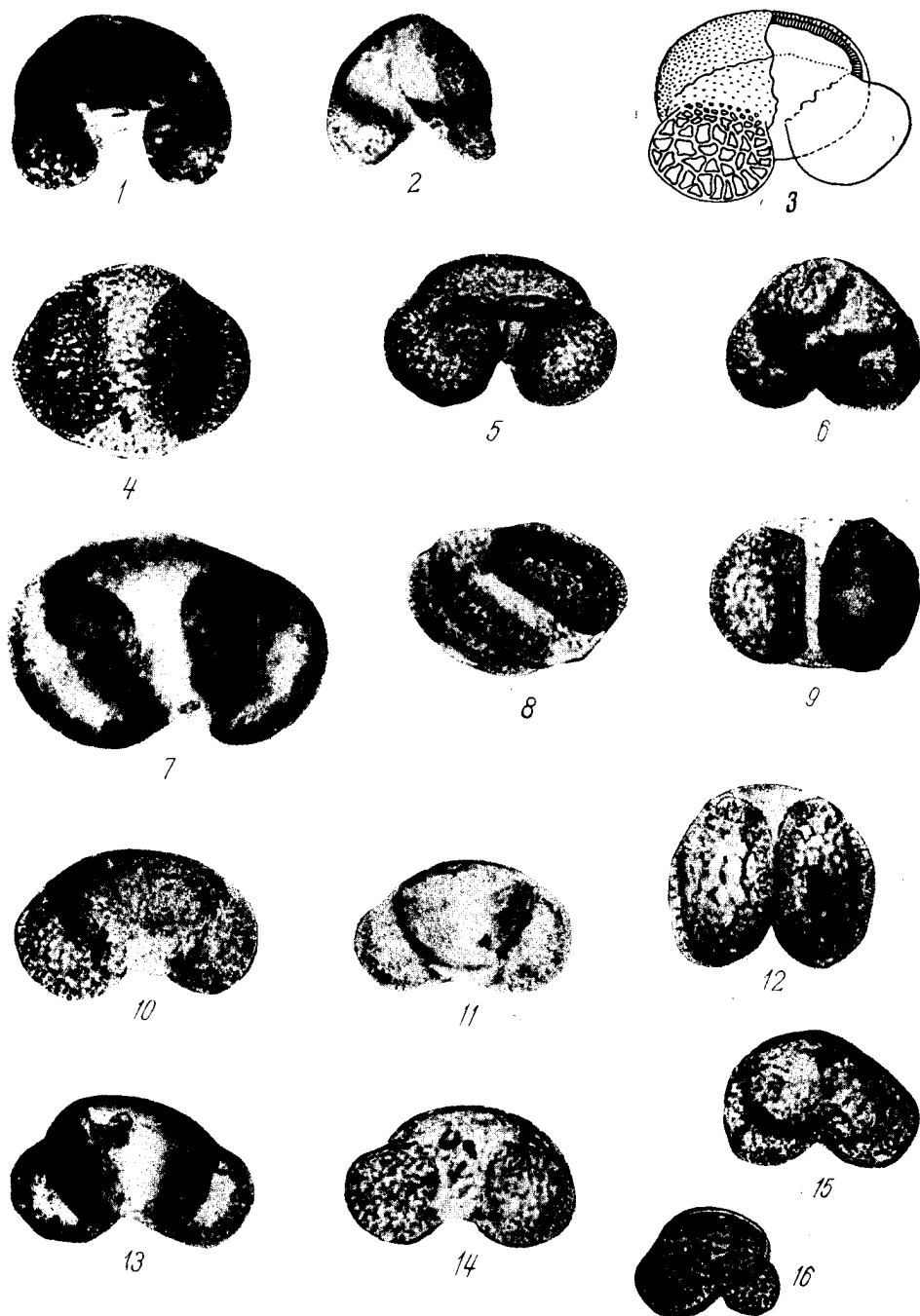




К т а б л и ц е X V

- 1—4. *Pinus banksianaeformis* sp. nov. (pollen). Рис. 3 — увел. 800;  
рис. 1, 2, 4 — увел. 400.
5. *Pinus halepensisformis* sp. nov. (pollen). Мелкий экземпляр.
6. *Pinus protosilvestris* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
- 7—13. *Pinus* aff. *silvestris* L. (из отложений нижнего и среднего  
олигоцена). Увел. 400.
- 14—16. *Pinus* aff. *silvestris* L. (из отложений плиоцена и четвер-  
тичных). Увел. 400.

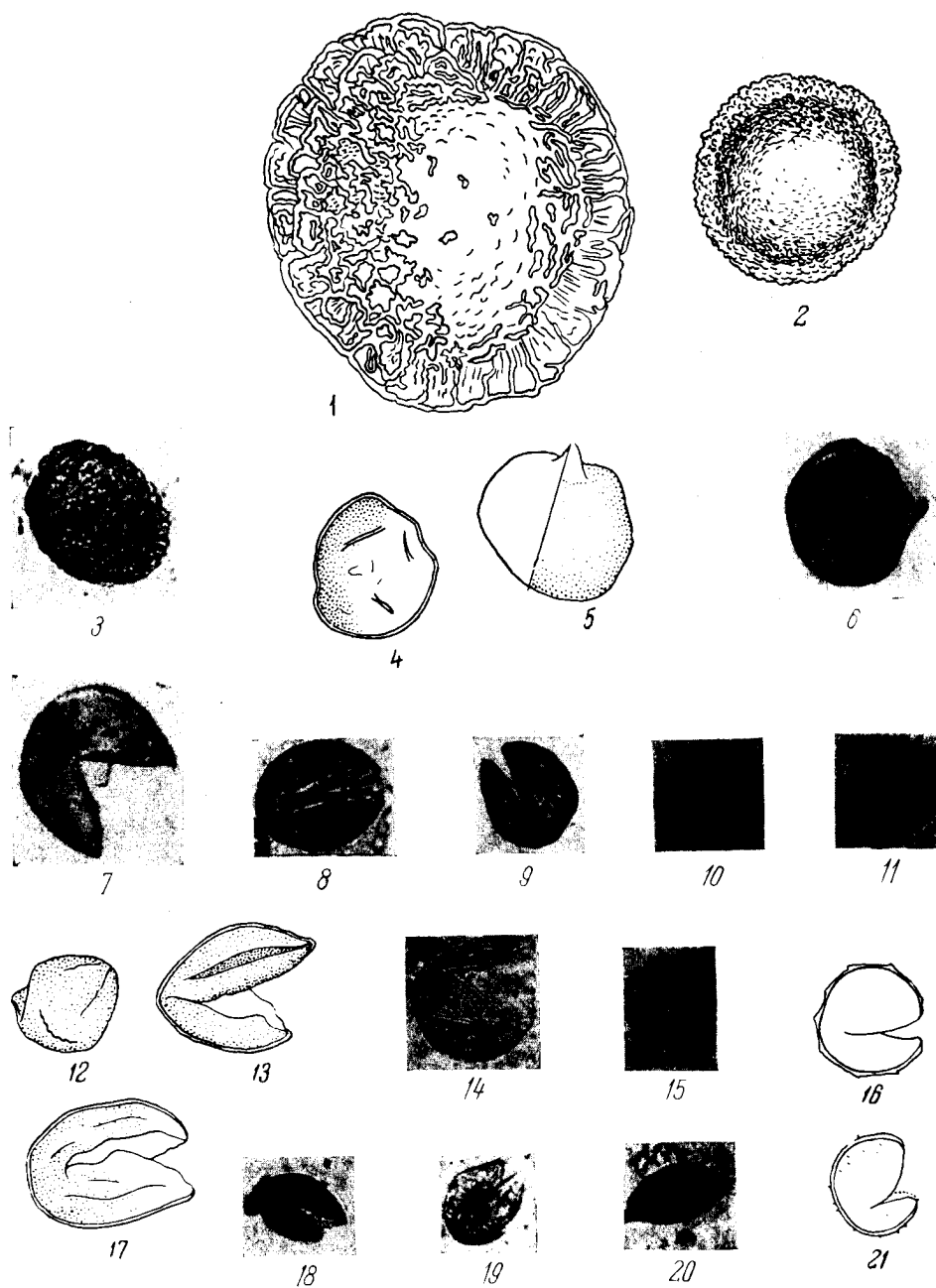
ТАБЛИЦА XV



К т а б л и ц е XVI

1. *Tsuga crista* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
2. *Tsuga torulosa* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. *Sciadopitys tuberculata* sp. nov. (pollen) (ex gr. *S. verticillata* Sieb. et Zucc.). Увел. 400.
- 4, 5. *Sequoia semperviriformis* sp. nov. (pollen). Увел. 500.
6. *Sequoia sempervirens* Endl. (recent.). Увел. 400.
7. *Taxodium* aff. *distichum* (L.) Rich. Увел. 400.
- 8, 9. *Taxodites* sp. Увел. 400.
- 10—12. *Cunninghamia* aff. *lanccolata* Lamb. Увел. 400.
- 13—15. *Thujaites* sp. (pollen). Увел. 500.
16. *Libocedrus* sp. (pollen). Увел. 400.
- 17—19. *Cupressites* sp. (pollen). Рис. 17.—увел. 500; рис. 18, 19—увел. 400.
20. *Cupressites* sp. (pollen) (ex gr. *Cupressus pollens* Bolsh.). Увел. 400.]
21. *Chamaecyparites* sp. (pollen). Увел. 400.

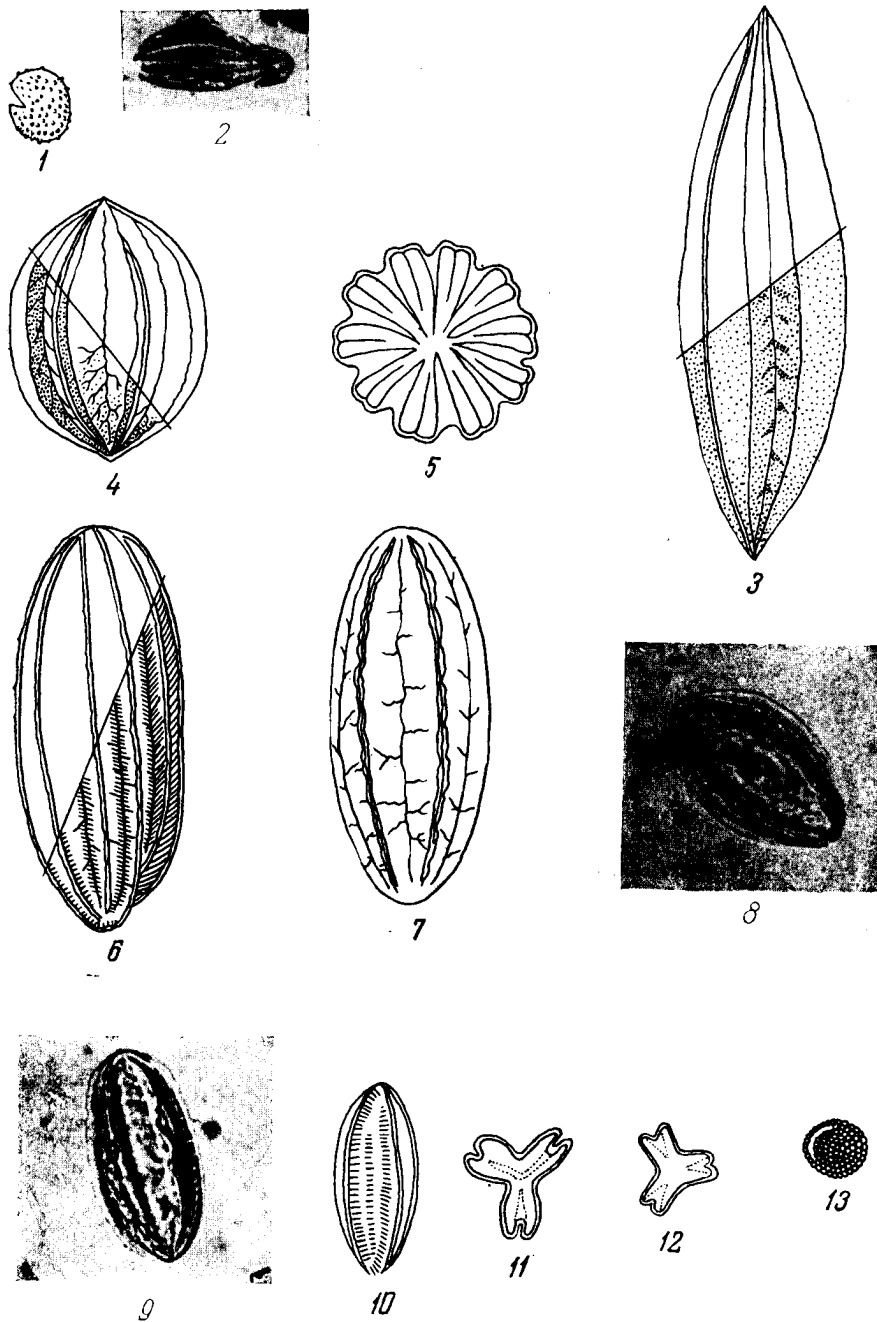
ТАБЛИЦА XVI



Т а б л и ц е XVII

1. *Chamaecyparites* sp. Увел. 400.
2. *Welwitschites protomirabilis* sp. nov. (pollen). Увел. 400.
3. *Ephedra eocenipites* W o d e h o u s e. Увел. 600.
4. *Ephedra* aff. *Przewalskii* S t a r f. (в боковой проекции).  
Увел. 400.
5. То же в полярной проекции.
- 6, 7. *Ephedra* aff. *distachya* L. Увел. 400.
- 8, 9. *Ephedra* aff. *intermedia*. S c h r. Увел. 400.
- 10—12. *Ephedrites trinata* sp. nov. (pollen). Рис. 10 — в боковой  
проекции; рис. 11 и 12 — в полярной.
13. *Gnetumites* sp. (pollen). Увел. 400.

ТАБЛИЦА XVII



## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение . . . . .	3
I. Краткий очерк геологии и палеогеографии Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья и некоторые сведения о геологическом строении Тургайской впадины . . . . .	13
II. К истории флоры и растительности Казахстана в третичное время . . . . .	39
III. Значение пыльцы голосеменных для характеристики палеоландшафта палеогена и отчасти неогена . . . . .	43
IV. Распространение пыльцы голосеменных в кайнозойских отложениях Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья . . . . .	50
V. Руководящие спорово-пыльцевые спектры голосеменных для стратиграфического расчленения кайнозойских отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья . . . . .	65
VI. Флористический анализ спектров и их стратиграфическое значение . . . . .	70
VII. Морфологическое описание пыльцы голосеменных, выделенной из кайнозойских отложений Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья	87
1. Класс Cycadales — Саговые . . . . .	90
Сем. Cycadaceae — Саговниковые . . . . .	92
2. Класс Ginkgoale — Гинкговые . . . . .	94
Сем. Ginkgoaceae — Гинкговые . . . . .	94
3. Класс Coniferales — Хвойные . . . . .	95
Сем. Taxaceae — Тиссовые . . . . .	95
Сем. Podocarpaceae — Ногоплодниковые . . . . .	98
Сем. Araucariaceae — Араукариевые . . . . .	111
Сем. Pinaceae — Сосновые . . . . .	113
Сем. Taxodiaceae — Таксодиевые . . . . .	164
Сем. Cupressaceae — Кипарисовые . . . . .	169
4. Класс Gnetales — Гнетовые . . . . .	173
Сем. Welwitschiaceae — Вельвичиевые . . . . .	174
Сем. Ephedraceae — Хвойниковые . . . . .	175
Сем. Gnetales — Гнетовые . . . . .	177
Литература . . . . .	179
Таблицы микрофотографий и зарисовок пыльцы голосеменных . . . . .	185

Елена Дмитриевна Заклинская

Стратиграфическое значение пыльцы голосеменных кайнозойских отложений  
Павлодарского Прииртышья и Северного Приаралья  
(Труды Геологического института, выпуск 6)

\*

Утверждено к печати Геологическим институтом Академии наук СССР

\*

Редактор издательства И. М. Чепикова. Технический редактор С. Г. Новикова

\*

РИСО АН СССР № 98-50В. Сдано в набор 1/IX—1956 г. Подп. в печать 17/I—1957 г. Формат бум.  
70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ. л. 11,5+2<sup>1</sup>/<sub>4</sub> на мел. бум. + 3 вкл.=15,05 + 2<sup>1</sup>/<sub>4</sub> на мел. бум. + 3 вкл. Уч.-изд. лист.  
14,4+3,4 вкл.=17,8. Тираж 1300. Изд. № 1555. Тип. зан. 856. Т-00308.

Цена 13 р.

Издательство Академии наук СССР. Москва, Б-64, Подсосенский пер., д. 211

2-я типография Издательства АН СССР. Москва, Г-99, Шубинский пер., д. 10

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строна	Напечатано	Должно быть
37	28 св.	Богданов	Бажанов
56	22 св.	Podocarpus kazakhstanica	Podocarpites kazakhstanica
59	Таблица 2, графа 1, стр. 9 св.	P. gerardiformes	P. gerardianaeformis
86—87	Фиг. 14, графа 3 слева, стр. 6 св.	Чограйская	Чаграйская
	Фиг. 14, графа 1 справа, стр. 3 св.	Dacridium	Dacrydium



13 p.

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ  
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том VI, № 7 (80)

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА 1957 ЛЕНИНГРАД

**Директор Института теоретической астрономии чл.-корр. АН СССР *М. Ф. Субботин***  
**Ответственный редактор проф. *Г. А. Чеботарев***

# Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 7 (80)

## Малые планеты

(1955)

Н. С. Самойлова-Яхонтова

Результаты наблюдательной и эфемеридной работы по малым планетам и краткий обзор литературы за 1955 г.

MINOR PLANETS 1955, by N. S. Samoilova-Yakhontova. — Summary on Minor Planets work during 1955.

В августе 1955 г. вышел из печати сборник эфемерид малых планет на 1956 г. (десятый год издания), составленный по образцу прошлых лет. В соответствии с пожеланиями, высказанными членами Комиссии № 20 на съезде Международного астрономического союза в Риме, и с решением комиссии Астросовета по терминологии названия малых планет в „Эфемеридах“ даны и впредь будут даваться в латинской транскрипции.

Планетным центром в Цинциннати выпущено в 1955 г. 159 планетных циркуляров от 1167 до 1326 номера (Minor Planet Circulars, 1955). В них опубликованы предварительные обозначения 27 планет, открытых в 1953 г.: 1953 CN, EM, FN<sub>1</sub>, JN, KB, OM, ON, TE<sub>3</sub>—TG<sub>3</sub>, VG<sub>3</sub>—VQ<sub>3</sub>, XB<sub>1</sub>, YD—YJ; обозначения 203 планет, открытых в 1954 г.: 1954 AK—AM, ET—EV, GK, HH, JP—JT, KK—KM, NQ—NS, OE, PE—PN, QK—QT, RO, RP, SB—SZ, SA<sub>1</sub>—SL<sub>1</sub>, TA—TQ, UA—UZ, UA<sub>1</sub>—UZ<sub>1</sub>, UA<sub>2</sub>—UY<sub>2</sub>, WA—WP, XB—XO, YA—YE и 257 планет, открытых до ноября 1955 г.: 1955 AA<sub>1</sub>, BA—BM, CA—CB, DA—DQ, EA—EP, GA—GB, HA—HO, KA—KC, MA—MP, NA, OA—OE, QA—QZ, QA<sub>1</sub>—QN<sub>1</sub>, RA—RZ, RA<sub>1</sub>—RF<sub>1</sub>, SA—SZ, SA<sub>1</sub>—SY<sub>1</sub>, TA—TQ, UA—UZ, UA<sub>1</sub>—UQ. В общей сложности в 1953 г. было открыто 503 планеты, а в 1954 г. — 379 планет.

Попрежнему очень мало планет, наблюдавшихся несколько раз. Так, в 1954 г. наблюдались:

311 планет один раз (82 %),

52 планеты два раза (14 %),

16 планет не меньше трех раз (4 %).

Только для четырех планет, открытых в 1954 г. (1954 AC, DE, ER, HC), и для трех, открытых в 1955 г. (1955 BG, FC, FG), удалось определить эллиптические элементы. Кроме того, определены 44 системы элементов, открытых ранее (в 1904—1953 гг.); из них 32 системы сотрудниками Астрономического вычислительного института в Гейдельберге (Nachrichtenblatt der Astronomischen Zentralstelle, 1955).

10 планет, список которых приведен в таблице, получили окончательные номера. Большой части этих планет оказалось возможным присвоить постоянные номера в результате отождествления различных объектов, наблюдавшихся в разные оппозиции, отделенные часто большими промежутками времени. Благодаря такому отождествлению удалось получить элементы, улучшенные по наблюдениям в нескольких оппозициях. Так, например, планета (1615) 1950 BW оказалась планетой, открытой еще в 1926 г. С. И. Белявским и получившей тогда обозначение 1926 TO; она была вторично открыта в 1948 г. и получила номер 1948 TG, и наконец, третий раз

в 1951 г., когда удалось определить ее эллиптические элементы, а затем отождествить с открытыми ранее планетами и произвести улучшение элементов. Планета (1610) 1928 RT была открыта П. Ф. Шайн. Ее удалось отождествить с планетой 1938 WN и определить элементы по двум оппозициям.

Список планет, получивших постоянные номера в 1955 г.

№ планеты	Предварительные обозначения	Кто открыл	Место наблюдения	Кто вычислял элементы	Где опубликованы элементы
1606	1950 RH.	L. Boyer.	Alger.	S. Böhme.	MPC 1186/87.
1607	1950 RA.	E. Johnson.	Johannesburg.	P. Sconzo.	MPC 1210.
1608	1951 RZ.	C. Rogati.	La Plata.	P. Sconzo.	MPC 1211.
1609	1951 NL.	E. Johnson.	Johannesburg.	H. Hirose и T. Takase.	MPC 1227.
1610	1928 RT.	П. Ф. Шайн.	Симеиз.	S. Böhme.	MPC 1244.
1611	1950 DJ.	K. Reinmuth.	Heidelberg.	S. Böhme.	MPC 1247/48.
1612	1950 BJ.	K. Reinmuth.	Heidelberg.	S. Böhme.	MPC 1281.
1613	1950 SD.	S. Arend.	Uccle.	S. Böhme.	MPC 1281/82.
1614	1952 HA.	A. Schmitt.	Uccle.	S. Böhme.	MPC 1282.
1615	1950 BW.	—	G. Link (Indiana Un.).	S. Böhme.	MPC 1325.

(1606) 1950 RH = 1928 RL = 1937 TS = 1937 VO; (1609) 1951 NL = 1934 JB = 1947 WB впервые открыта в 1934 г. в Симеизе Г. Н. Неуйминым; (1610) 1928 RT = 1938 WN; (1612) 1950 BJ = 1939 CD; (1613) 1950 SD = 1929 CL = 1941 SR; (1614) 1952 HA = 1928 SA = 1931 EA; (1615) 1950 BW = 1926 TO = 1948 TG впервые открыта С. И. Белявским в Симеизе.

Продолжалась и даже несколько оживилась работа по улучшению элементов нумерованных планет. В 1955 г. опубликовано 49 систем новых элементов, из них 25 систем определены в СССР (Бартенева, 1955а, 1955б; Каулина, Сипола и Дирикис, 1955; Ханина и Бартенева, 1955; Шмакова, 1955). Часть этих элементов помещена в „Эфемериды на 1956 г.“, часть войдет уже в „Эфемериды на 1957 г.“.

В 1955 г. вновь наблюдалась планета 515 Athalia, которая была вторично открыта в 1953 г. после того, как в течение 50 лет она считалась утерянной. Ее элементы теперь улучшены П. Музеном по наблюдениям в трех оппозициях и могут считаться вполне надежными (MPC, № 1283).

На старых пластинках, полученных на обсерватории Макдональда в 1951 г. по плану Г. Кайпера обозрения астероидов, были обнаружены два новых троянца, получивших предварительные обозначения 1951XJ и 1951XK. Однако каждый из них наблюдался только по два раза, и потому могли быть определены только круговые орбиты.

Восемь планет получили в истекшем году названия. Из них планеты 1379 Lomonosova, 1403 Idelsonia и 1484 Postrema были открыты Г. Н. Неуйминым, давно получили постоянные номера, но до сих пор не имели названий (MPC, № 1252).

В 1955 г. начались систематические наблюдения ярких планет, избранных для определения постоянных каталога слабых звезд (Самойлова-Яхонтова, 1955а). Наблюдения ведутся на обсерваториях Пулковской, Киевской (АН УССР), Ташкентской, Московской и на ряде зарубежных обсерваторий: обсерватории в Бухаресте, Копенгагене, Ла Плата, Лейдене, Сант-Яго да Чили, Сиднее. Весьма интенсивно ведется наблюдение планеты 51 Nemausa. Долгосрочные точные эфемериды этой планеты регулярно публикует П. Наур (Naur, 1955).

На Иельской обсерватории проводится окончательная дискуссия наблюдений первых четырех планет. Производится измерение пластинок и определение точных положений остальных 12-ти планет программы Д. Брауера (Yale Observatory, 1955).

Продолжается также обработка 2400 пластинок, полученных на обсерватории Макдональда по программе Г. Кайпера обозрения астероидов. Положения планет по этим снимкам определял при помощи сконструированной им машины Г. Ванбисброек, получивший 871 положение (Yerkes and McDonald Observatories, 1955).

В Ежегоднике Британской астрономической ассоциации на каждый год приводятся данные относительно покрытия звезд яркими малыми планетами (Taylor, 1955a). Была сделана попытка наблюдать покрытие (Nicholson a. Cragg, 1955): 22 декабря 1954 г. на обсерватории Паломар были сделаны с помощью 100-дюймового рефлектора два снимка Весты около предсказанного момента покрытия. Однако покрытие не произошло: Веста прошла на  $1''.8$  севернее звезды BD +19°945. Покрытие могло быть видимо в юго-западной Канаде. На 1956 г. предсказано только одно покрытие звезды Вестой, видимое в Антарктике. 28 июня 1956 г. Паллада пройдет перед туманностью M15 в Пегасе (Taylor, 1955a).

Г. Тайлор, занимающийся предвычислениями покрытий звезд малыми планетами, опубликовал описание применяемого им полуграфического метода предвычисления покрытий (Taylor, 1955b).

Теоретических работ по малым планетам в истекшем году вышло очень мало. Г. М. Баженов (1955) исследовал разложение в тригонометрические ряды выражений вида  $(1 - 2h \cos z + h^2)^{-n/2}$ , в которых  $n$  нечетное число, и установил достаточно тесные границы для коэффициентов этих разложений, вывел приближенные выражения для коэффициентов Лапласа  $b_n^{(i)}$ , причем для оценки абсолютной погрешности коэффициентов, вычисленных по этим формулам, даны простые графики. Ему удалось установить границы для максимальных значений остаточных членов разложений. Для оценки остаточного члена разложения при различных  $n$  также предложены графики, с помощью которых можно решить и обратный вопрос: сколькими членами нужно ограничиться, чтобы максимальная величина остаточного члена не превосходила допустимой ошибки. Полученные результаты применены для разложения в ряд величины, обратной кубу расстояния между планетами, и иллюстрируются на примере малой планеты 244 Сита.

Г. А. Чеботарев и А. И. Божкова с помощью методики, разработанной одним из авторов (Чеботарев Г. А. Бюлл. ИТА, 4, 10, 1951), построили приближенную теорию движения малых планет троянской группы (Чеботарев, Божкова, 1955). Численным методом построено периодическое решение Лагранжа в ограниченной эллиптической задаче трех тел и составлены аналитические выражения для возмущений элементов в окрестности этого периодического решения. Методика применена к планете 588 Ахиллес.

В самом конце 1954 г. появилась работа Е. Рабе (Rabe, 1954), посвященная вопросу о происхождении троянцев. Несколько лет тому назад Г. Кайпер (G. Kuiper) высказал гипотезу, что троянцы — бывшие спутники Юпитера, выброшенные из системы Юпитера вследствие уменьшения его первоначальной массы. Для проверки этой гипотезы и приближенной оценки возможной массы протопланеты Е. Рабе рассматривает плоскую круговую ограниченную задачу трех тел, считая массу Юпитера переменной. С уменьшением массы Юпитера постоянная Якоби  $C(\mu)$  непрерывно уменьшается, так же как и скорость тела малой массы  $V$ . Если тело малой массы вначале двигалось на небольшом расстоянии от Юпитера, то уменьшение  $V$  вызывает расширение его орбиты, т. е. удаление от Юпитера, а одновременное уменьшение  $C$  вызывает стремление тела к одному из центров либрации  $L_4$  или  $L_5$  — точкам абсолютного минимума  $C$ , т. е. происходит превращение спутника в троянца. Не исключена возможность возникновения при некоторых специальных начальных условиях также орбит, подобных орбите Гидальго. Воспользовавшись далее численными результатами Тюринга, полученными в его приближенной теории троянцев, Е. Рабе подсчитал, что масса протопланеты должна была быть приблизительно в 20 раз больше современной массы Юпитера, чтобы при ее уменьшении до нынешнего состояния спутник мог превратиться в троянца.

Ш. Кайат (Caillate, 1955a, 1955b, 1955c) продолжал работать над построением приближенной аналитической теории планеты 335 Роберта, суточное движение которой близко к соизмеримости 1:3. Сравнение с наблюдениями в 4 оппозициях 1947—1953 гг. показало, что наблюдения представляются с ошибками до  $1''.1$  по прямому восхождению. Автор выдвинул гипотезу, что причиной таких расхождений может быть сбли-

жение двух астероидов (Cailliet, 1955d) и исследовал обстоятельства сближения астероидов, принимая, что массы их порядка  $10^{-12} \odot$ . Показано, что под тесным сближением следует понимать приближение астероидов на расстояние  $\rho \leq 10^{-4}$  а. е. Получено выражение для возмущений координат и скоростей астероида, испытавшего тесное сближение. Однако влияние сближения оказалось совершенно ничтожным, и во всяком случае объяснить наблюдаемые расхождения теории с наблюдениями этим невозможно. Добавление в разложениях пертурбационной функции долгопериодических членов порядка 4-ой степени эксцентриситета несколько уменьшило невязки.

Фотометрические наблюдения малых планет продолжались на 82-дюймовом рефлекторе обсерватории Макдональда. На Морской обсерватории в Вашингтоне производились исследования поляризации Цереры, Паллады и Ириды (Provin, 1955).

На обсерватории Киевского университета закончена работа по определению показателей цвета 56 астероидов (Сандакова, 1955). Фотографирование производилось одновременно двумя камерами с объективами  $U 17$  ( $D=10$  см,  $F=50$  см) без фильтра и с желтым фильтром, установленным перед объективом. Звездные величины приводились к международной системе. Всего произведено 172 наблюдения. Показатели цвета, определенные в среднем с ошибкой  $\pm 0.05$  имеют большую дисперсию: они лежат в пределах от  $0.36$  до  $1.54$ , среднее значение равно  $0.80$ . Короткопериодические колебания блеска планет не связаны с изменениями цвета. Это говорит в пользу того, что колебания блеска обуславливаются неправильностями формы астероидов, а не их пятнистостью. Для 11 малых планет определены коэффициенты фаз в фотографических и визуальных лучах. Для трех планет — 9, 27 и 115 — коэффициенты фаз в фотографических лучах значительно больше, чем в визуальных; для остальных — различие в пределах ошибок наблюдений. Присоединение к киевским наблюдениям приведенных в ту же систему наблюдений других авторов — Фишера, Рехта, Рийвеса позволило сделать несколько общих выводов: 1) показатели цвета не обнаруживают явной зависимости от элементов орбиты  $a$ ,  $i$  и  $\varphi$ ; 2) существует связь между показателями цвета и размерами планеты — чем меньше планета, тем она краснее.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Баженов Г. М. 1955. Исследование разложений в тригонометрические ряды выражений вида  $(1 - 2h \cos z + h^2)^{-n/2}$ , в которых  $n$  — нечетное число. Бюлл. ИТА, 6, 1(74).
- Бартенева О. Н. 1955а. Новые элементы планеты 7 Ирида. Астр. ц. АН СССР, 163.
- Бартенева О. Н. 1955б. Новые элементы малой планеты 260 Губерта. Бюлл. ИТА, 6, 2(75).
- Бохан Н. А. 1955. Интегрирование уравнений движения малых планет на счетно-аналитических машинах. Бюлл. ИТА, 6, 3(76).
- Бугославская Е. Я., Т. П. Пережогина. 1955а. Фотографические наблюдения ярких малых планет. Астр. ц. АН СССР, 159.
- Бугославская Е. Я., Т. П. Пережогина. 1955б. Фотографические наблюдения малых планет на 380 мм астрографе Московской обсерватории. Астр. ц. АН СССР, 159.
- Булатова Ф. Ф. 1955. Точные положения малых планет по фотографическим наблюдениям в Пулкове. Изв. ГАО, 20, 1.
- Гаврилов И. В., И. Г. Жданова, А. Б. Онегина, А. П. Святоха. 1955. Точные положения малых планет Цереры, Гебы, Летиции, Немаузы. Астр. ц. АН СССР, 158.
- Гамалей Н. В. 1955. Точные положения малых планет Цереры, Юноны и Летиции по фотографическим наблюдениям. Изв. ГАО, 20, 1.
- Дубяго А. Д. 1955. О вычислении зависимостей при обработке астрофотографий. Астр. ц. АН СССР, 162.
- Каулина Э., В. Сипола, М. Дирикис. 1955. Элементы орбит и эфемериды малых планет. Астр. ц. АН СССР, 156.
- Корягина Э. В. 1955. Наблюдения малых планет на Горной обсерватории Астрофизического инст. АН Казахской ССР. Астр. ц. АН СССР, 164.
- Кохан Е. К., Ю. С. Подрядчик. 1955. Наблюдения малых планет на Вильнюсской астрономической обсерватории В. Г. У. Астр. ц. АН СССР, 156.
- Раудсаар Х. К. Наблюдения малых планет на Тартуской астрономической обсерватории Академии наук Эст. ССР. Астр. ц. АН СССР, 163.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. 1955а. Наблюдения малых планет для определения постоянных каталога слабых звезд. Тр. 11-й астр. конф. СССР, Л., 1955, 78.
- Самойлова-Яхонтова Н. С. 1955б. Обзор работ по малым планетам за 1953 г. Бюлл. ИТА, 6, 1(74).

- Самойлова-Яхонтова Н. С. 1955в. Малые планеты 1954 г. Бюлл. ИТА, **6**, 3 (76).
- Сандакова Е. В. 1955. О показателях цвета малых планет. Астр. ц. АН СССР, 163.
- Скляр Ю. А. 1955. Наблюдения малых планет на астрономической обсерватории СГУ им. Н. Г. Чернышевского в 1954 г. Астр. ц. АН СССР, 160.
- Ханина Ф. Б. 1955. Формулы и таблицы для интерполирования особых координат и вычисления компонентов скоростей. Бюлл. ИТА, **6**, 2 (75).
- Ханина Ф. Б. и О. Н. Бартенева. 1955. Исправление орбит 16 малых планет. Бюлл. ИТА, **6**, 2 (75).
- Хо Тьен-киен и Лю Пао-лин. 1955. Новые элементы планеты 497 Iva. Астр. ц. АН СССР, 157.
- Чеботарев Г. А. и А. И. Божкова. 1955. Теория движения малых планет троянской группы. Бюлл. ИТА, **6**, 4 (77).
- Чжан Юй-чже. 1955а. Улучшенная орбита планеты 415 Palatia. Астр. ц. АН СССР, 157.
- Чжан Юй-чже. 1955б. Новая малая планета P01. Астр. ц. АН СССР, 163.
- Шмакова М. Я. 1955. Абсолютные возмущения и новые элементы планет 386, 417, 430 и 735. Бюлл. ИТА, **6**, 1 (74).
- Эфемериды малых планет на 1956 г. 1955. Изд. АН СССР, Л.
- Cailliate Ch. 1955a. Théorie des astéroïdes caractéristiques (II). Application à une commensurabilité d'ordre deux. Etude de (335) Roberta. J. O., **38**, 4.
- Cailliate Ch. 1955b. Ephéméride de l'astéroïde (377) Campania. J. O., **38**, 4.
- Cailliate Ch. 1955c. Complément à l'étude de (335) Roberta. J. O., **38**, 11.
- Cailliate Ch. 1955d. Sur la possibilité de perturbations mutuelles entre deux astéroïdes. J. O., **38**, 11.
- Chang Y. C. a. others. 1955. Photographic observations of the Positions of Minor Planets at the Purple Mountain Observatory (1954). Acta Astr. Sinica, **3**, 1.
- Chang Y. C. a. Chang Chia-hsiang. 1955a. A new asteroid observed at the Purple Mountain Observatory. Acta Astr. Sinica, **3**, 1.
- Chang Y. C. a. Chang Chia-hsiang. 1955b. The improved orbit and the opposition ephemeris for 1956 of the new asteroid FO 1. Acta Astr. Sinica, **3**, 2.
- Gonsales-Aboin J. M. 1955. Nueva orbita del asteroïde 1372 Haremar. Rev. geofis., **14**, 54.
- Hirose H. a. K. Tomita. 1955. Photographic Observations made with the Brashear Astrograph. (31). Tokyo Astr. Bull., Sec., Ser., N 75.
- Ho Tien-chien a. Lui Pao-lin. 1955. The improved Orbit of the Minor Planet (497) Iva. Acta Astr. Sinica, **3**, 1.
- Kühne E. E. 1955. Verbesserte Bahnelemente für den kleinen Planeten (1221) Amor. A. N., **282**, 2.
- Lüde H. von. 1955. Über einen speziellen Fall des Dreikörperproblems: A. N., **282**, 1.
- Malsch W. 1955. Beobachtungen von Planetoiden und Kometen 1954. A. N., **282**, 5.
- Minor Planet Circulars 1955. NN 1167—1326.
- Nachrichtenblatt d. Astr. Zentralstelle 1955. Jahrg. 9, NN 1—11.
- Nakano S., H. Yasuda a. H. Hara. 1955. Meridian Observations of the Right Ascension of Minor Planets during the Year 1954. Tokyo Astron. Bull., Sec. Series, N 73.
- Naur P. 1955. Asteroid 51 Nemausa. U. A. I. Circulaire, 1522.
- Nicholson, S. B. a. T. A. Cragg. 1955. Position of Vesta. Publ. A. S. P., **67**, N 395.
- Paroubek A. a. R. Šášky. 1955. Observations of Minor Planets at Skalnaté Pleso II. Bull. Astr. Inst. Czechoslovakia, **6**, 5.
- Pascual M., de. 1955. Rectificación de la orbita del asteroïde 1547 (1929 CZ). Rev. geofis., **14**, 54.
- Pels G. 1955. Photographic Positions of Minor Planets and of comet 1953a observed in 1952 and 1953. Bull. Astr. Inst. Netherlands, **12**, 460.
- Provin S. S. 1955. Preliminary Observations of the Polarization of Asteroids (abstract). Pub. A. S. P., **67**, N 395.
- Purgathofer A. 1955. 165 Positionen des Kleinen Planeten 51 Nemausa. Mitteilungen d. Universitäts-Sternw. Wien, **7**, 17.
- Rabe E. 1954. The Trojans as Escaped Satellites of Jupiter. A. J., **59**, N 11.
- Schubart J. 1955. Verbesserung der Bahn des kleinen Planeten 1453 Fennia. A. N., **282**, 5.
- Taylor G. E. 1955a. Occultations of stars by Minor Planets. Handbook B. Astr. Ass. 1956.
- Taylor G. E. 1955b. The Prediction of Occultations of Stars by Minor Planets. Journ. B. Astr. Ass., **65**, 2.
- Wan Lai, Chow Tsou-Gui a. Chang Hsiao-Shun. 1955a. Photographic observations of the Positions of Minor Planets at the Zô-Sê Observatory (1954). Acta Astr. Sinica, **3**, 1.
- Wan Lai, Chow Tsou-Gni a. Chang Seiao-Sung. 1955b. Photographic observations of the Positions of Minor Planets at the Zô-Sê Observatory Acta Astr. Sinica, **3**, 2.
- Wilson R., Jr. 1955. Convenient procedure for computing preliminary planetary ephemerides. Publ. A. S. P., **67**, N 395.
- Yale Observatory Report 1955. A. J., **60**, 1231.
- Yerkes and McDonald Observatories Report 1955. A. J., **60**, 2.

Поступило в Редакцию  
24 апреля 1956 г.



# Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 7(80)

## Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности

### Часть III. Разложение пертурбационной функции в ряд по степеням приращения эксцентриситета

Н. Б. Еленевская

В настоящей III части работы получены разложения пертурбационной функции в ограниченной круговой задаче трех тел, пригодные и в тех случаях, когда обычные разложения по степеням эксцентриситетов перестают сходиться. Для получения этих разложений использован обычный метод аналитического продолжения. Разложения ведутся по степеням разности  $e - e_0$ , где  $e_0$  — некоторое начальное значение эксцентриситета.

ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IN EINE FOURIER-REIHE BEZÜGLICH DER NEIGUNG. III TEIL. ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IN EINE REIHE NACH DEN POTENZEN DES EXZENTRIZITÄTSZUWACHSES, von N. B. Jelenewskaja. — Im gegenwärtigen III Teil der vorliegenden Abhandlung werden die Entwicklungen der Störungsfunktion im kreisförmigen eingeschränkten Dreikörperproblem erhalten, die auch in Fällen, wo gewöhnliche Entwicklungen nach den Potenzen der Exzentrizitäten nicht konvergieren, brauchbar sind. Bei der Ausführung dieser Entwicklungen wurde übliche Methode der analytischen Fortsetzung benutzt. Die Entwicklungen sind nach den Potenzen der Differenz ( $e - e_0$ ) dargestellt, wo  $e_0$  einen Anfangswert der Exzentrizität bedeutet.

### Введение

Во II части данной работы нами были получены некоторые разложения пертурбационной функции в кратные ряды. Основным отличием этих разложений от всех опубликованных до сих пор разложений пертурбационной функции является то, что по всем угловым элементам, в частности и по наклонности, пертурбационная функция разлагается нами в тригонометрический ряд. Коэффициентами этого ряда являются некоторые функции эксцентриситета  $e$ .

Для фактического пользования этими рядами, например при интегрировании уравнений Лагранжа, упомянутые функции эксцентриситета в свою очередь должны быть разложены в ряд по степеням  $e$ . Такие разложения также были выполнены во II части настоящей работы.

После перегруппировки членов наши ряды преобразуются в степенные ряды по эксцентриситету  $e$  и отношению полуосей  $a$ , коэффициентами при которых в нашем случае будут тригонометрические полиномы по кратным всех угловых элементов: взаимной наклонности орбит  $i$ , разности долготы возмущающей точки и долготы узла возмущаемой точки  $\Omega = l_j - \Omega$ , расстояния перигелия оскулирующей орбиты от узла  $\omega$  и эксцентрической или средней аномалии возмущаемой точки.

Такая перегруппировка членов является возможной, разумеется, только в области абсолютной сходимости упомянутых разложений по степеням эксцентриситета, т. е. при  $e$  меньшем предела Лапласа ( $e < 0.6627\dots$ ). Для больших значений эксцентриситета, равно как и для значений эксцентриситета больших единицы, разложение в степенной ряд по эксцентриситету является невозможным.

В этой части работы мы попытаемся дать более общие разложения, годные для любых  $e$  (как больших, так и меньших единицы). Для этого мы будем пользоваться

не рядами Маклорена по степеням  $e$ , а более общими рядами Тейлора по степеням приращения эксцентриситета ( $e - e_0$ ), где  $e_0$  некоторое фиксированное значение эксцентриситета, которое мы будем считать в окончательном разложении вещественным и положительным, а в промежуточных преобразованиях, вообще говоря, комплексным аргументом.

О геометрическом значении  $e_0$  будет подробнее сказано в § 4. Полученные таким образом ряды для любого  $e$ , отличного от единицы, будут иметь конечный, отличный от нуля радиус сходимости. Этот радиус будет убывать от 0.6627... до нуля, когда  $e_0$  изменяется от нуля до единицы, и возрастать от нуля до бесконечности, когда  $e_0$  изменяется от единицы до бесконечности.

### § 1. Предварительный анализ. Разложение обратной величины радиуса-вектора в ряд Лорана по степеням $z = \varepsilon^{iE}$ для случая $e$ больше единицы

Во II части работы мы рассмотрели разложение функции

$$\frac{1}{(1 - \bar{x} \cos y)^x} \quad (3.1)$$

в ряд Фурье. Коэффициенты этого разложения мы определили как некоторые специальные функции:

$$J_n^*(x, \bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\bar{y}}{(1 - \bar{x} \cos \bar{y})^x} d\bar{y}. \quad (3.2)$$

В предварительном анализе, во II части, мы рассматривали эти функции при целых  $x$  и  $n$  и для параметра  $x$  по модулю меньшего единицы. В этой части мы рассмотрим разложение функции (3.1) для случая  $|x| > 1$ .<sup>\*</sup> Величину  $\bar{y}$  мы будем рассматривать, как и прежде, комплексной, а затем подробнее остановимся на случае, когда  $\bar{y}$  чисто мнимая величина. Этот последний случай имеет для нас практическую важность, так как он имеет место при движении точки по гиперболе. Если  $|\bar{x}| > 1$ , то мы не можем пользоваться разложением функции (3.1) в ряд Фурье, так как при  $\bar{y}$  действительном эта функция обращается в бесконечность при  $\cos \bar{y} = \frac{1}{\bar{x}}$ , а при  $\bar{y}$  чисто мнимом функция (3.1) не является периодической.

Попытаемся разложить эту функцию в ряд Лорана по степеням величины  $z = \varepsilon^{iE}$ , где  $i = \sqrt{-1}$ , а  $\varepsilon$  — основание натуральных логарифмов.

Пусть  $\bar{y} = E$ , где  $E$  — эксцентрическая аномалия, а  $\bar{x} = e$ ,  $e$  — эксцентриситет кепле-рова движения. Будем считать  $E$  и  $e$  комплексными:

$$E = x + iy, \quad e = \xi + i\eta. \quad (3.3)$$

Введем угол эксцентриситета  $\varphi$  и его вещественную и мнимую части  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  формулой:

$$e = \sin \varphi = \sin(\varphi_1 + i\varphi_2) = \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2. \quad (3.4)$$

Отсюда видно, что  
при  $\varphi_2 = 0$   $e = \sin \varphi_1$ ,  $|e| < 1$ ,  
при  $\varphi_2 \neq 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 = 0, \quad e = i \operatorname{sh} \varphi_2 \\ \varphi_1 = \pi, \quad e = -i \operatorname{sh} \varphi_2 \end{aligned} \right\} 0 \leq |e| < \infty,$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad e = \operatorname{ch} \varphi_2 \\ \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}, \quad e = -\operatorname{ch} \varphi_2 \end{aligned} \right\} |e| < 1. \quad (3.5)$$

<sup>\*</sup> Более общий случай, когда  $-\infty < x < +\infty$ , разобран в работе (Еленевская, 1949).

Заменим в формуле (3.1) тригонометрические функции через показательные и сделаем замену переменного, положив  $z = \varepsilon^{iE}$ . Тогда будет:

$$\frac{1}{(1 - e \cos E)^{\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha} z^{\alpha}}{e^{\alpha} \left[ z^2 - \frac{2}{e} z + 1 \right]^{\alpha}}. \quad (3.6)$$

Положим

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_1}{2} + i \frac{\varphi_2}{2} \right) = \beta. \quad (3.7)$$

После элементарных преобразований находим:

$$\beta = \frac{\sin \varphi_1 + i \operatorname{sh} \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi_2}; \quad \frac{1}{\beta} = \frac{\sin \varphi_1 - i \operatorname{sh} \varphi_2}{\operatorname{ch} \varphi_2 - \cos \varphi_1}. \quad (3.8)$$

Тогда равенство (3.6) можно будет переписать в виде:

$$\frac{1}{(1 - e \cos E)^{\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha} z^{\alpha}}{e^{\alpha} \left[ z^2 - \frac{\beta^2 + 1}{\beta} z + 1 \right]^{\alpha}}. \quad (3.9)$$

Найдем особые точки этой функции. Приравняв нулю знаменатель, находим его корни:

$$z_1 = \beta, \quad z_2 = \frac{1}{\beta}.$$

Перепишем формулу (3.9) в виде:

$$\frac{1}{(1 - e \cos E)^{\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha} z^{\alpha}}{e^{\alpha} (z - \beta)^{\alpha} \left( z - \frac{1}{\beta} \right)^{\alpha}}. \quad (3.10)$$

Преобразование  $\varepsilon^{iE} = \varepsilon^{ix} \varepsilon^{-y} = z$ , как известно, переводит отрезок действительной оси  $0 \leq x \leq 2\pi$  в окружность с центром в точке  $z = 0$  и радиусом  $r = 1$ .

Полагая  $z_1 = \beta$  и  $z_2 = \frac{1}{\beta}$ , получим:

$$z_1 = \varepsilon^{ix_1} \varepsilon^{-y_1} = \varepsilon^{-y_1} (\cos x_1 + i \sin x_1) = \frac{\sin \varphi_1 + i \operatorname{sh} \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi_2} \quad (3.11)$$

или, разделяя действительную и мнимую части, —

$$\varepsilon^{-y_1} \cos x_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi_2}, \quad \varepsilon^{-y_1} \sin x_1 = \frac{\operatorname{sh} \varphi_2}{\cos \varphi_1 + \operatorname{ch} \varphi_2}. \quad (3.12)$$

Аналогично, полагая  $z_2 = \frac{1}{\beta}$ , получим

$$\varepsilon^{-y_2} \cos x_2 = \frac{\sin \varphi_1}{\operatorname{ch} \varphi_2 - \cos \varphi_1}, \quad \varepsilon^{-y_2} \sin x_2 = \frac{-\operatorname{sh} \varphi_2}{\operatorname{ch} \varphi_2 - \cos \varphi_1}. \quad (3.13)$$

Отсюда получаем координаты особых точек:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_1 &= \frac{\operatorname{sh} \varphi_2}{\sin \varphi_1}, & \varepsilon^{-y_1} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \operatorname{sh}^2 \varphi_2}}{\operatorname{ch} \varphi_2 + \cos \varphi_1}, \\ \operatorname{tg} x_2 &= -\frac{\operatorname{sh} \varphi_2}{\sin \varphi_1}, & \varepsilon^{-y_2} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \operatorname{sh}^2 \varphi_2}}{\operatorname{ch} \varphi_2 - \cos \varphi_1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Полагая теперь эксцентриситет  $e$  действительным, будем иметь:

а) для  $|e| < 1$  особые точки (рис. 1) определяются по (3.15), поскольку  $x_1 = x_2 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{-y_1} &= \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}, \quad \varepsilon^{-y_2} = \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}, \\ y_1 &= -y_2 = \ln \frac{e}{1 - \sqrt{1 - e^2}}; \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

б) для  $|e| > 1$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_1 &= \operatorname{sh} \varphi_2 = \sqrt{e^2 - 1}, \quad \operatorname{tg} x_2 = -\operatorname{sh} \varphi_2 = -\sqrt{e^2 - 1}, \\ \varepsilon^{-y_1} &= \varepsilon^{-y_2} = \frac{\operatorname{ch} \varphi_2}{\operatorname{ch} \varphi_1} = 1, \quad y_1 = y_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

(как указывалось, в этом случае  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  или  $\varphi_1 = \frac{3\pi}{2}$ )

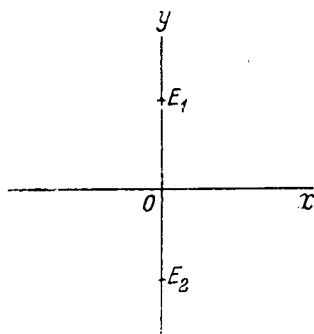


Рис. 1.

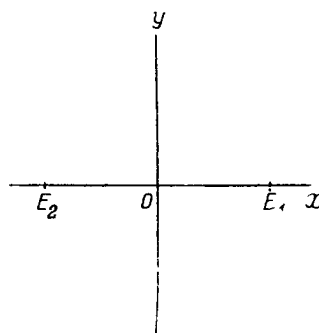


Рис. 2.

или

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \varepsilon^{i\varphi_1} = \varepsilon^{i \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}} = \frac{1 + i\sqrt{e^2 - 1}}{e}, \\ z_2 &= \varepsilon^{i\varphi_2} = \varepsilon^{-i \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}} = \frac{1 - i\sqrt{e^2 - 1}}{e}. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Особые точки будут расположены на оси  $x$  симметрично относительно начала координат (рис. 2).

Если рассматривать расположение особых точек в плоскости  $z = u + iv$ , то будем иметь следующее:

а) Для  $|e| < 1$

$$\left. \begin{aligned} z &= r\varepsilon^{i\varphi} = \varepsilon^{-y}\varepsilon^{ix} = u + iv, \\ v_1 &= v_2 = 0, \quad x = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}, \\ r_1 &= \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}, \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

При  $e \rightarrow 0$ ,  $r_1 \rightarrow 0$ ,  $r_2 \rightarrow \infty$ ;  
при  $e \rightarrow 1$ ,  $r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow 1$ .

В плоскости  $z$  получим следующую картину (рис. 3), т. е. для  $|e| < 1$   $\beta$  и  $\frac{1}{\beta}$  всегда действительны и расположены на оси  $u$  на расстоянии  $\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}$  и  $\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}$ .

В кольце  $\beta < r < \frac{1}{\beta}$  функция  $\frac{1}{(1 - e \cos E)^2}$  аналитическая и может быть разложена в ряд Лорана по степеням  $z$ . При  $e = 0$  внутренняя окружность  $z = \beta$  стягивается

в точку, а внешняя  $z = \frac{1}{\beta}$  уходит в бесконечность и ряд сходится во всей плоскости.

При  $e=1$  обе особые точки попадают на окружность единичного радиуса.

б) Посмотрим, как будут расположены особые точки в случае  $|e| > 1$ .

В этом случае

$$\left. \begin{aligned} z_1 = e^{i\varphi_1} = \frac{1 + i\sqrt{e^2 - 1}}{e}, \quad z_2 = e^{i\varphi_2} = \frac{1 - i\sqrt{e^2 - 1}}{e}, \\ \varphi_1 = x_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}, \quad \varphi_2 = x_2 = -\operatorname{arctg} \sqrt{e^2 - 1}, \\ r_1 = r_2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Лорановское кольцо стягивается в линию, как показано на рис. 4. Разложение в ряд Лорана оказывается невозможным: в этом случае мы будем иметь два различных разложения. Внутри окружности единичного радиуса функция

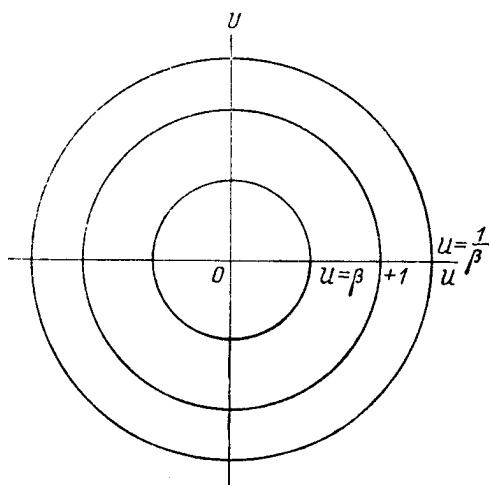


Рис. 3.

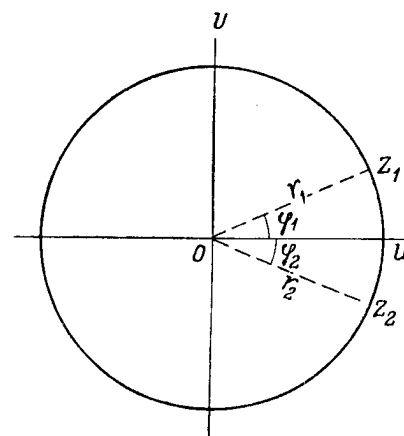


Рис. 4.

$$\frac{1}{(1 - e \cos E)^a} = \frac{(-1)^a 2^a}{e^a} \cdot \frac{z^a}{\left(z^2 - \frac{2}{e}z + 1\right)^a} \quad (3.20)$$

может быть разложена в сходящийся ряд Маклорена по положительным степеням  $z$ , а вне этой окружности эта же функция разлагается в сходящийся ряд по отрицательным степеням  $z$ . В этом случае, т. е. когда  $e$  действительно и по модулю больше единицы, функция  $\frac{1}{r^a} = \frac{1}{(1 - e \cos E)^a}$  будет непрерывной для любого  $x, y \neq 0$  ( $z = u + iv = e^{iE} = e^{-y} e^{ix}$ ), причем  $\bar{r} = \frac{r}{a}$ , где  $r$  — радиус-вектор, и  $a$  — большая полуось орбиты возмущенного тела. Для  $E$  действительного функция  $\frac{1}{r^a}$  имеет разрыв непрерывности в точке  $E = \arccos \frac{1}{e}$ .

Рассмотрим случай, когда  $\frac{1}{r^a}$  действительно. В этом случае (при действительном  $e > 1$ )  $\frac{1}{r^a}$  будет непрерывной функцией, когда  $\cos E$  действителен и больше единицы. Пусть  $E$  комплексное:  $E = x + iy$ ; тогда

$$\cos E = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Следовательно,  $\sin x \operatorname{sh} y = 0$ .

Когда  $\operatorname{sh} y = 0$ ,  $\cos E = \cos x \leq 1$ . Этот случай мы сейчас не рассматриваем.

Когда  $\sin x = 0$ ,  $\cos E = \operatorname{ch} y \geq 1$ . В этом случае  $x = k\pi$ ,  $E = k\pi + iy$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  т. е.  $E$  будет бесконечнозначной функцией  $x$ .

Однако в функцию  $\frac{1}{z^\alpha}$  она входит только под знаком косинуса, поэтому  $\frac{1}{z^\alpha}$  определяется однозначно. Следовательно, мы, не нарушая общности, можем положить  $E = iu$ , считая  $u$  действительным. В этом случае формула (3.6) примет вид:

$$f(u) = \frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^2} = \frac{(-1)^{2\alpha}}{e^\alpha} \cdot \frac{z^\alpha}{\left(z^2 - \frac{2}{e}z + 1\right)^\alpha}, \quad z = e^u. \quad (3.21)$$

Внутри окружности единичного радиуса, т. е. для  $|z| < 1$ , искомое разложение будет иметь вид:

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\operatorname{ch} nu + \operatorname{sh} nu). \quad (3.22)$$

Вне окружности, т. е. для  $|z| > 1$ , получим разложение

$$f(u) = \frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.23)$$

Однако оба эти ряда можно объединить в один, если заметить, что когда  $z$  меняется от нуля до единицы, то  $u$  пробегает все значения от минус бесконечности до нуля; когда же  $z$  растет от единицы до бесконечности,  $u$  меняется от нуля до плюс бесконечности. Замечая также, что  $f(u)$  четная функция аргумента  $u$ , получим:

$$f(-u) = f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.24)$$

При этом в формуле (3.24) всегда берется положительное значение  $u$ . Ряд (3.24) будет сходиться для всех положительных значений  $u$ , кроме  $u = 0$ . Однако для случая  $u = 0$ ,  $f(u)$  обращается в  $\frac{1}{(1 - e)^2}$ . Таким образом,  $f(u)$  будет определено для любого  $u$  в интервале  $0 \leq u < \infty$ .

## § 2. Предварительный анализ. Коэффициенты разложения

Как показано в предыдущем параграфе, коэффициенты разложения (3.22) будут тождественны соответствующим коэффициентам разложения (3.23)  $P_n = Q_n = \hat{f}_n(\alpha, e)$ . Следовательно, мы можем вычислить либо коэффициенты  $P_n$  как коэффициенты ряда Маклорена по формуле:

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{(z - b)^\alpha \left(z - \frac{1}{\beta}\right)^\alpha z^{n-\alpha+1}}, \quad (3.25)$$

либо коэффициенты  $Q_n$  как коэффициенты ряда Лорана:

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{z^{n+\alpha-1}}{(z - b)^\alpha \left(z - \frac{1}{\beta}\right)^\alpha} dz. \quad (3.26)$$

В первом случае коэффициент  $P_n$  будет равен вычету подынтегральной функции относительно точки  $z=0$  (полюс порядка  $n-\alpha+1$ ), интегрирование ведется по замкнутому контуру, заключенному внутри окружности единичного радиуса. Во втором случае  $Q_n$  равняется сумме вычетов относительно особых точек  $z=\beta$  и  $z=\frac{1}{\beta}$  (полюса порядка  $\alpha$ ). За контур интегрирования может быть принят любой замкнутый контур, заключающий внутри себя точки  $z=\beta$  и  $z=\frac{1}{\beta}$ . Первый способ, естественно, будет проще, однако второй способ представляет интерес как распространение теории функций  $J_n^*(\alpha, e)$  на случай  $e$  большего единицы. Поэтому рассмотрим его отдельно.

Положим

$$\bar{J}_n(\alpha, e) = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha}}{2\pi i \cdot e^{\alpha}} \int_{\bar{c}} \frac{z^{\alpha+n-1}}{(z-\beta)^{\alpha} \left(z-\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha}} dz = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha}}{e^{\alpha}} (c_{-1} + \bar{c}_{-1}), \quad (3.27)$$

где  $c_{-1}$  и  $\bar{c}_{-1}$  соответствующие вычеты подынтегральной функции относительно точек  $z=\beta$  и  $z=\frac{1}{\beta}$ .

Коэффициенты разложения функции

$$\frac{1}{(1-e \cos E)^{\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha}}{e^{\alpha}} \cdot \frac{z^{\alpha}}{\left(z^2 - \frac{1+\beta^2}{\beta} z + 1\right)^{\alpha}}$$

по степеням  $z$  будут иметь различные аналитические выражения для  $|e| < 1$  и  $|e| > 1$ . Это обычное явление в случае, когда лорановское кольцо стягивается в линию.

В общем случае, т. е. когда  $e$  комплексное, коэффициенты этого разложения будут даваться формулой:

$$\bar{J}_n(\alpha, e) = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha}}{e^{\alpha} 2\pi i} \int_{\bar{c}} \frac{z^{\alpha+n-1}}{(z-\beta)^{\alpha} \left(z-\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha}} dz = J_n^*(\alpha, e) + \bar{J}_n^*(\alpha, e), \quad (3.28)$$

где

$$J_n^*(\alpha, e) = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha}}{e^{\alpha}} C_{-1} \quad \text{и} \quad \bar{J}_n^*(\alpha, e) = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha}}{e^{\alpha}} \bar{C}_{-1}.$$

Очевидно, для  $|e| < 1$ ,  $\bar{J}_n = J_n^*$  (см. Еленевская, 1953, где подробно развита теория функций  $J_n^*(\alpha, e)$ ). В этом случае внутрь контура интегрирования попадает только точка  $z=\beta$  и  $\bar{J}_n^*(\alpha, e) = 0$ .

Найдем конечные выражения для  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  и  $J_n^*(\alpha, e)$ .

Согласно теории вычетов

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \frac{1}{(\alpha-1)!} \lim_{z \rightarrow \beta} \frac{d^{\alpha-1}}{dz^{\alpha-1}} \left[ \frac{z^{\alpha+n-1}}{\left(z-\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha}} \right] = \\ &= \frac{(-1)^{\alpha}}{[(\alpha-1)!]^2} \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-\gamma)}{\gamma!} (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots \\ &\quad \dots (n+\alpha-\gamma)(2\alpha-\gamma-2)! \frac{\beta^{3\alpha+n-2\gamma-2}}{(1-\beta^2)^{2\alpha-\gamma-1}}; \\ \bar{C}_{-1} &= \frac{1}{(\alpha-1)!} \lim_{z \rightarrow \frac{1}{\beta}} \frac{d^{\alpha-1}}{dz^{\alpha-1}} \left[ \frac{z^{\alpha+n-1}}{(z-\beta)^{\alpha}} \right] = \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$= \frac{(-1)^{\alpha}}{[(\alpha-1)!]^2} \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} (-1)^{\gamma+1} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-\gamma)}{\gamma!} (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots$$

$$\dots (n+\alpha-\gamma)(2\alpha-\gamma-2)! \frac{\beta^{\alpha-n}}{(1-\beta^2)^{2\alpha-\gamma-1}}; \quad (3.30)$$

$$J_n^*(\alpha, e) = \frac{2^{\alpha}}{e^{\alpha}[(\alpha-1)!]^2} \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-\gamma)}{\gamma!} (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots$$

$$\dots (n+\alpha-\gamma)(2\alpha-\gamma-2)! \frac{\beta^{3\alpha+n-2\gamma-2}}{(1-\beta^2)^{2\alpha-\gamma-1}}; \quad (3.31)$$

$$\bar{J}_n^*(\alpha, e) = \frac{2^{\alpha}}{e^{\alpha}[(\alpha-1)!]^2} \sum_{\gamma=0}^{\alpha-1} (-1)^{\gamma+1} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-\gamma)}{\gamma!} (n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots$$

$$\dots (n+\alpha-\gamma)(2\alpha-\gamma-2)! \frac{\beta^{\alpha-n}}{(1-\beta^2)^{2\alpha-\gamma-1}}. \quad (3.32)$$

Таким образом, выражение для функции  $J_n^*(\alpha, e)$ , рассматриваемой как функция  $\beta$ , будет тем же самым, как в случае  $|e| < 1$ . Различие будет только в том, что в случае  $|e| > 1$ ,  $\beta$  будет комплексным и, следовательно, такими же будут функции  $J_n^*(\alpha, e)$ .

Из самого построения этих функций и из того, что в случае  $|e| > 1$  и  $E = iu$ ,  $\beta$  и  $\frac{1}{\beta}$  являются величинами комплексными сопряженными следует, что функции  $J_n^*(\alpha, e)$  и  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  также будут комплексными сопряженными функциями  $e$ .

Функция  $\bar{J}_n(\alpha, e) = J_n^*(\alpha, e) + \bar{J}_n^*(\alpha, e)$  как сумма двух комплексных сопряженных будет величиной действительной.

Непосредственно из формулы (3.21) видно, что

$$f(u) = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha}}{e^{\alpha}} \cdot \frac{z^{\alpha}}{\left(z^2 - \frac{2}{e}z + 1\right)^{\alpha}}$$

имеет в точке  $z=0$  нуль порядка  $\alpha$ . Следовательно, ее разложение будет начинаться с члена  $z^{\alpha}$ . Поэтому  $\bar{J}_n(\alpha, e)$  обращается в нуль для всех  $n < \alpha$ , хотя каждая из функций  $J_n^*(\alpha, e)$  и  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  в отдельности этим свойством не обладает.

В заключение дадим определение функций  $J_n^*(\alpha, e)$  и  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  для  $0 \leq |e| < \infty$ .

Мы определили раньше функцию  $J_n^*(\alpha, e)$  в форме определенного интеграла

$$J_n^*(\alpha, e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nE}{(1 - e \cos E)^{\alpha}} dE. \quad (3.33)$$

Это определение будет справедливо для  $|e| < 1$  ( $e$  может быть, вообще говоря, комплексным). Для  $|e| > 1$  это определение уже не будет годиться, так как для  $|e| > 1$  определенный интеграл (3.33) будет иметь, как функция  $e$ , совершенно другое аналитическое выражение, определяемое формулами (3.26), (3.28) и (3.32). Мы можем дать теперь другое определение функций  $J_n^*(\alpha, e)$  как функций эксцентриситета  $e$  или, что то же, как функций  $\beta$ , где  $\beta = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  ( $e = \sin \varphi$ ), которое будет справедливым для любого  $e$  или  $\beta$ .



Определим  $J_n^*(\alpha, e)$  как вычет функции

$$\frac{(-1)^\alpha 2^\alpha z^{\alpha+n-1}}{e^\alpha (z-\beta)^\alpha \left(z-\frac{1}{\beta}\right)^\alpha}$$

относительно особой точки  $z=\beta$ :

$$J_n^*(\alpha, e) = \frac{(-1)^\alpha 2^\alpha}{2\pi i e^\alpha} \int_{c_1} \frac{z^{\alpha+n-1}}{(z-\beta)^\alpha \left(z-\frac{1}{\beta}\right)^\alpha} dz. \quad (3.34)$$

Контур интегрирования  $C_1$  выбирается так, чтобы внутри его заключалась единственная особая точка  $z=\beta$ . Это всегда можно сделать, так как особые точки нашей функции  $z=\beta$  и  $z=\frac{1}{\beta}$  суть изолированные особые точки (полоса порядка  $\alpha$ ) и могут совпадать для единственного значения  $e$ , именно для  $e=1$ . В точке  $e=1$  функция  $\frac{1}{(1-e \cos E)^\alpha}$  имеет точку разветвления и будет неоднозначной.

Определив функцию  $J_n^*(\alpha, e)$  выражением (3.34), мы получим аналогично для функции  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$ , которая будет комплексной, сопряженной с  $J_n^*(\alpha, e)$ , выражение:

$$\bar{J}_n^*(\alpha, e) = \frac{(-1)^\alpha 2^\alpha}{2\pi i e^\alpha} \int_{c_2} \frac{z^{\alpha+n-1}}{(z-\beta)^\alpha \left(z-\frac{1}{\beta}\right)^\alpha} dz. \quad (3.35)$$

Контур  $C_2$  выбирается так, чтобы внутри его попадала только особая точка  $z=\frac{1}{\beta}$ .

Можно легко вывести для функций  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  те же рекуррентные соотношения, что и для функций  $J_n^*(\alpha, e)$ . Выведем некоторые из них. Напишем  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  в виде:

$$\bar{J}_n^*(\alpha, e) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\arctg \sqrt{e^2-1}+\varepsilon_1}^{\arctg \sqrt{e^2-1}+\varepsilon_2} \frac{\cos nE}{(1-e \cos E)^\alpha} dE, \quad (3.36)$$

$\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  сколь угодно малы.

Продифференцировав под знаком интеграла по параметру  $e$ , получим

$$\frac{d}{de} \bar{J}_n^*(\alpha, e) = \frac{\alpha}{2} [\bar{J}_{n-1}^*(\alpha+1, e) + \bar{J}_{n+1}^*(\alpha+1, e)]. \quad (3.37)$$

Умножим правую и левую части выражения (3.36) на  $e$  и снова продифференцируем обе части по  $e$ . Мы получим

$$\frac{d}{de} \bar{J}_n^*(\alpha, e) = \frac{\alpha}{e} [\bar{J}_n^*(\alpha+1, e) - \bar{J}_n^*(\alpha, e)]. \quad (3.38)$$

Исключая из (3.37) и (3.38)  $\frac{d}{de} \bar{J}_n^*(\alpha, e)$ , получим

$$\bar{J}_n^*(\alpha, e) = \bar{J}_n^*(\alpha+1, e) - \frac{e}{2} [\bar{J}_{n-1}^*(\alpha+1, e) + \bar{J}_{n+1}^*(\alpha+1, e)]. \quad (3.39)$$

Написав конечные выражения  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  для индексов  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$  с помощью формулы (3.31), находим еще одно рекуррентное соотношение:

$$n \bar{J}_n^*(\alpha, e) = \frac{\alpha e}{2} [\bar{J}_{n-1}^*(\alpha+1, e) - \bar{J}_{n+1}^*(\alpha+1, e)]. \quad (3.40)$$

И, наконец, исключая  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  из уравнений (3.39) и (3.40), получим

$$n\bar{J}_n^*(\alpha+1, e) = \frac{e}{2} [(n+\alpha)\bar{J}_{n-1}^*(\alpha+1, e) - (n-\alpha)\bar{J}_{n+1}^*(\alpha+1, e)]. \quad (3.41)$$

Исходя из этих формул, легко показать, аналогично тому, как это делалось во второй части, что функции  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению типа Фукса, что и функции  $J_n^*(\alpha, e)$ . Это уравнение имеет вид:

$$e^2 \frac{d^2}{de^2} \bar{J}_n^*(\alpha, e) + e \frac{2(\alpha+1)e^2-1}{e^2-1} \cdot \frac{d}{de} \bar{J}_n^*(\alpha, e) + \frac{\alpha(\alpha+1)e^2+n^2}{e^2-1} \bar{J}_n^*(\alpha, e) = 0. \quad (3.42)$$

Напишем это уравнение в виде:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + xP(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0, \quad (3.43)$$

где

$$P(x) = \frac{2(\alpha+1)e^2-1}{e^2-1},$$

$$Q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)e^2+n^2}{e^2-1}. \quad (3.44)$$

Как указывалось во второй части, функция  $J_n^*(\alpha, e)$  будет одним из правильных интегралов этого уравнения. Очевидно, что функция  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  также будет правильным интегралом того же уравнения. А так как  $J_n^*(\alpha, e)$  и  $\bar{J}_n^*(\alpha, e)$  независимы, то мы можем написать общий интеграл этого уравнения в виде:

$$J = C_1 J_n^*(\alpha, e) + C_2 \bar{J}_n^*(\alpha, e), \quad (3.45)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  суть произвольные постоянные. Очевидно, что функция

$$\tilde{J}_n(\alpha, e) = J_n^*(\alpha, e) + \bar{J}_n^*(\alpha, e)$$

будет также интегралом этого уравнения и будет удовлетворять тем же рекуррентным соотношениям.

Дадим в заключение выражение для  $\tilde{J}_n(\alpha, e)$  наиболее удобное для практического употребления. Определяя  $\tilde{J}_n(\alpha, e)$  по формуле (3.25) как вычет подинтегральной функции относительно точки  $z=0$ , будем иметь

$$\tilde{J}_n(\alpha, e) = \frac{(-1)^{\alpha} 2^{\alpha}}{e^{\alpha} (n-\alpha)!} \sum_{\lambda=0}^{k_1} (-1)^{\lambda} \frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1) \dots (\lambda+1)}{(n-\alpha-2\lambda)!} \alpha(\alpha+1) \dots (n-\lambda-1) \frac{e^2}{2^{2\lambda}}, \quad (3.46)$$

где  $\lambda_1 = \frac{n-\alpha}{2}$  или  $\lambda_1 = \frac{n-\alpha-1}{2}$ , в зависимости от того, какое из этих двух чисел целое.

Как видно из формулы (3.46) для случая  $|e| > 1$ ,  $\tilde{J}_n(\alpha, e)$  будет не только алгебраической, но и рациональной функцией эксцентриситета, и представляет собой многочлен, расположенный по отрицательным степеням  $e$ .

§ 3. Разложение функции  $\Psi_n(e)$  по степеням приращения эксцентриситета для случая эллиптического движения

Для того, чтобы получить разложение главной части пертурбационной функции  $\frac{1}{r_j}$  по степеням приращения эксцентриситета  $(e - e_0)$  в случае эллиптического движения, нам нужно разложить по этим приращениям функции  $\Psi_n(e) = F_n(e) + \Phi_n(e)$  и  $\cos nE$ . Разложение для функции  $\Psi_n(e)$  получается чрезвычайно просто. Из формулы (2.58) и (2.68) второй части мы имеем:

$$F_n(e) = \sum_{\sigma=0}^p \sum_{\lambda=0}^{\delta} G_{\sigma}^{(\lambda)} e^{2\sigma-p} J_n^*(x+p-\lambda, e),$$

$$\Phi_n(e) = n\sqrt{1-e^2} \sum_{\sigma=0}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\delta} \bar{G}_{\sigma}^{(\lambda)} \frac{e^{2\sigma-p}}{(x+p-\lambda-1)} J_n^*(x+p-\lambda-1, e), \quad (3.47)$$

где  $G_{\sigma}^{(\lambda)}$  есть числовой коэффициент, определяемый формулой (2.57) и (2.69) II части. Суммирование по  $\lambda$  ведется до  $\delta$ , где  $\delta$  принимает значения:

$$\delta = \frac{3p-2\sigma}{2} \text{ или } \delta = \frac{3p-2\sigma-1}{2}, \text{ если } \sigma > \frac{p}{2} \text{ или } \sigma > \frac{p-1}{2}$$

и  $\delta = p$ , если  $\sigma \leq \frac{p}{2}$  или  $\sigma \leq \frac{p-1}{2}$ ,  $p = -k, (-k+2), \dots, k$ .

$x$  как и прежде обозначает

$$k+2l+1, \quad k=0, +1, +2, \dots \quad l=0, 1, 2, \dots$$

Разложим функцию  $\Psi_n(e)$  в ряд Тейлора:

$$\Psi_n(e) = \Psi_n(e_0) + (e - e_0) \Psi_n'(e_0) + \frac{(e - e_0)^2}{2!} \cdot \Psi_n''(e_0) + \dots +$$

$$+ \frac{(e - e_0)^{s_1}}{s_1!} \Psi_n^{(s_1)}(e_0) + \dots \quad (3.48)$$

Коэффициент общего члена в формуле (3.48) равен  $s_1$ -той производной от функции  $\Psi_n(e)$  при  $e = e_0$ .

$$\Psi_n^{(s_1)}(e_0) = \frac{d^{s_1}}{de_0^{s_1}} \left[ \sum_{\sigma=0}^p \sum_{\lambda=0}^{\delta} G_{\sigma}^{(\lambda)} e_0^{2\sigma-p} J_n^*(p+x-\lambda, e_0) + \right.$$

$$\left. + n\sqrt{1-e_0^2} \sum_{\sigma=0}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\delta} \bar{G}_{\sigma}^{(\lambda)} \frac{e_0^{2\sigma-p}}{(x+p-\lambda-1)} J_n^*(x+p-\lambda-1, e_0) \right] =$$

$$= \sum_{\sigma=0}^p \sum_{\lambda=0}^{\delta} G_{\sigma}^{(\lambda)} \frac{d^{s_1}}{de_0^{s_1}} [e_0^{2\sigma-p} J_n^*(p+x-\lambda, e_0)] +$$

$$+ n \sum_{\sigma=0}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\delta} \bar{G}_{\sigma}^{(\lambda)} \frac{1}{x+p-\lambda-1} \cdot \frac{d^{s_1}}{de_0^{s_1}} [\sqrt{1-e_0^2} e_0^{2\sigma-p} J_n^*(x+p-\lambda-1, e_0)]. \quad (3.49)$$

Производная от функции  $e_0^{2\sigma-p} J_n^*(x+p-\lambda, e_0)$  может быть получена либо при помощи ряда

$$\begin{aligned} & \frac{d^{s_1}}{de_0^{s_1}} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(p+x-\lambda)(p+x-\lambda+1)\dots(p+x-\lambda+n+2v-1)}{(n+v)! v! 2^{n+2v}} \cdot e_0^{n+2\sigma-p+2v} = \\ & = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(p+x-\lambda)(p+x-\lambda+1)\dots(p+x-\lambda+n+2v-1)}{(n+v)! v! 2^{n+2v}} (n+2\sigma+2v-p)(n+2\sigma+ \\ & +2v-p-1)\dots(n+2\sigma+2v-p-s_1+1) e_0^{n+2\sigma+2v-j-s_1}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

либо в конечном виде

$$\begin{aligned} & \frac{d^{s_1}}{de_0^{s_1}} [e_0^{2\sigma-p} J_n^*(p+x-\lambda, e_0)] = \\ & = \frac{e_0^{2\sigma-n-p}}{[(p+x-\lambda-1)!]^2} \sum_{\gamma=0}^{p+x-\lambda-1} \frac{(p+x-\lambda-1)(p+x-\lambda-2)\dots(p+x-\lambda-\gamma)}{\gamma!} \times \\ & \times (n+p+x-\lambda-1)(n+p+x-\lambda-2)\dots(n+p+x-\lambda-\gamma) \cdot 2^{\gamma+1} \times \\ & \times (2p+2x-2\lambda-\gamma-2)! \frac{[1-\sqrt{1-e_0^2}]^{n+p+x-\lambda-\gamma-1}}{[\sqrt{1-e_0^2}]^{2p+2x-2\lambda-\gamma-1}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Подставим теперь выражение  $\Psi_n(e)$ , даваемое формулой (3.48) в разложение главной части пертурбационной функции. Мы получим искомое разложение  $\frac{1}{r_j}$  в виде ряда по степеням  $(e-e_0)$  и кратным эксцентрисической аномалии  $E$  в виде:

$$\frac{1}{r_j} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{l,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pq,r}^{(k)} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(s_1)}(e_0) \frac{(e-e_0)^{s_1}}{s_1!} \cos nE \cdot \cos(p\omega + q\bar{\omega} + ri). \quad (3.52)$$

Здесь  $b_{l,l}^{(k)}$  есть  $l$ -тый член коэффициента Лапласа  $b_l^{(k)}$ ,  $a$  — большая полуось оскулирующей орбиты,  $A_{pq,r}^{(k)}$  те же коэффициенты, которые фигурировали в I и II частях настоящей работы, т. е. коэффициенты Фурье в разложении  $\cos k\theta$  по кратным углам элементов  $v, \omega, \bar{\omega}, i$ .

Во II части нами было получено разложение главной части пертурбационной функции по степеням эксцентриситета и косинусам углов кратных эксцентрисической аномалии. Там было указано, что оно может иметь самостоятельное значение, т. е. может применяться в тех же задачах небесной механики, в которых применяется разложение по кратным средней аномалии, например, при вычислении возмущений. Разложение по эксцентрисической аномалии может иметь даже некоторое преимущество, потому что, хотя затем и придется определять  $E$  как функцию средней аномалии  $M$  при помощи рядов, но зато структура разложения  $\frac{1}{r_j}$  по эксцентрисической аномалии значительно проще, чем структура аналогичных разложений по средней аномалии. В данном случае при разложении величины  $\frac{1}{r_j}$  по степеням приращения эксцентриситета  $(e-e_0)$ , это преимущество в значительной мере уменьшается за счет того, что мы получаем уже не многочлен по  $\cos nE$ , а бесконечный ряд. Для практических приложений неудобно использовать разложение  $\frac{1}{r_j}$  в виде (3.52), в котором имеется двойная

зависимость от эксцентриситета как через посредство  $\cos nE$ , так и прямо через посредство  $(e - e_0)$ . Поэтому в следующем параграфе мы займемся разложением  $\cos nE$  по степеням  $(e - e_0)$ .

#### § 4. Разложение $\cos nE$ по степеням приращения эксцентриситета $(e - e_0)$

Чтобы получить разложение  $\cos nE$  по степеням  $(e - e_0)$ ,<sup>1</sup> воспользуемся рядом Лагранжа. Как известно, ряд Лагранжа для уравнения

$$y = \alpha + \epsilon \varphi(y) \quad (3.53)$$

дает разложение по степеням малого параметра  $\epsilon$  того корня уравнения (3.53), который обращается в  $\alpha$  при  $\epsilon = 0$ .

Связь между эксцентрической и средней аномалиями дается, как известно, уравнением Кеплера:

$$E = M + e \sin E. \quad (3.54)$$

При помощи уравнения Кеплера получаются разложения в ряд Лагранжа по степеням  $e$  эксцентрической аномалии  $E$  и ее функций.

Чтобы получить разложение эксцентрической аномалии  $E$  и ее функций по степеням приращения эксцентриситета  $(e - e_0)$ , рассмотрим два эллиптических движения. Одно из этих движений будет движением по эллипсу, имеющему эксцентриситет  $e$ , большую полуось  $a$  и момент прохождения через перигелий  $\tau$ , а другое — движением по эллипсу, имеющему ту же полуось  $a$  и тот же момент прохождения через перигелий  $\tau$ , а эксцентриситет  $e_0$ . Назовем первое движение, соответствующее элементам  $(a, e, \tau)$ , основным, а движение, определяемое элементами  $(a, e_0, \tau)$ , — смежным движением. У этих двух движений, очевидно, одновременные значения средних аномалий будут одинаковы, а одновременные значения эксцентрических аномалий будут различны.

Напишем два уравнения Кеплера для обоих движений:

$$\begin{aligned} E &= M + e \sin E, \\ E_0 &= M + e_0 \sin E_0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Образую разность

$$E - E_0 = e \sin E - e_0 \sin E_0. \quad (3.56)$$

Прибавляя и вычитая в правой части величину  $e_0 \sin E$  и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \psi(E) &= \frac{\sin E - \sin E_0}{E - E_0}, \\ \Phi(E) &= \frac{\sin E}{1 - e_0 \psi(E)}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

приведем уравнение (3.56) к виду:

$$E = E_0 + (e - e_0) \Phi(E). \quad (3.58)$$

Пользуясь рядом Лагранжа, мы получим разложение по степеням малого параметра  $(e - e_0)$  того корня уравнения (3.58), который обращается в  $E_0$  при  $e = e_0$ .

Ряд Лагранжа для уравнения (3.53) имеет вид:

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\alpha) + \epsilon \varphi(\alpha) f'(\alpha) + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{d}{d\alpha} [\varphi^2(\alpha) f'(\alpha)] + \dots + \\ &+ \frac{\epsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\alpha^{k-1}} [\varphi^k(\alpha) f'(\alpha)] + \dots \end{aligned} \quad (3.59)$$

<sup>1</sup> В этом параграфе при получении уравнения, связывающего величины  $E$  и  $(e - e_0)$ , мы используем метод Н. Д. Моисеева (1936), при помощи которого им получены первые члены разложений в ряд Лагранжа величин  $E$ ,  $\sin E$ ,  $\cos E$ .

Чтобы получить разложение по степеням  $(e - e_0)$  корня уравнения (3.58), положим

$$y = E, \quad \alpha = E_0, \quad \varepsilon = (e - e_0),$$

$$f(y) = \cos nE, \quad f(\alpha) = \cos nE_0, \quad \varphi(\alpha) = \Phi(E_0) = \frac{\sin E_0}{1 - e_0 \cos E_0}.$$

Ряд Лагранжа в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \cos nE &= \cos nE_0 - n(e - e_0) \frac{\sin E_0}{(1 - e_0 \cos E_0)} \sin nE_0 - n \frac{(e - e_0)^2}{2!} \frac{d}{dE_0} \left[ \frac{\sin^2 E_0 \sin nE}{(1 - e_0 \cos E_0)^2} \right] - \\ &- \dots - n \frac{(e - e_0)^\sigma}{\sigma!} \frac{d^{\sigma-1}}{dE_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\sin^\sigma E_0 \cdot \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^\sigma} \right] - \dots - \dots \end{aligned} \quad (3.60)$$

Мы хотим получить разложение для  $\cos nE$  по степеням  $(e - e_0)$  и в ряд Фурье по кратным  $E_0$ . Для этого разложим предварительно величины, стоящие в квадратных скобках, в правой части формулы (3.60), в ряды Фурье по синусам и косинусам углов кратных  $E_0$ .

Рассмотрим величину

$$\frac{\sin^\sigma E_0 \cdot \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^\sigma}. \quad (3.61)$$

Это периодическая функция  $E_0$ , удовлетворяющая условиям Дирихле. Она будет четной функцией  $E_0$ , в случае если  $\sigma$  нечетное, для  $\sigma$  четного она будет нечетной функцией  $E_0$ . Следовательно, выражение (3.61) может быть разложено в ряд Фурье, в первом случае по косинусам, а во втором — по синусам  $E_0$ . Коэффициенты этих разложений, как ясно из самого вида функции (3.61), будут некоторыми комбинациями функций  $J_n^*(x, e)$ .

Для  $\sigma$  нечетного мы получим разложение:

$$\frac{\sin^\sigma E_0 \cdot \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^\sigma} = (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{I}_{\mu, n}(\sigma, e_0) \cdot \cos \mu E_0. \quad (3.62)$$

Для  $\sigma$  четного будем иметь:

$$\frac{\sin^\sigma E_0 \cdot \sin nE_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^\sigma} = (-1)^{\frac{\sigma}{2}} \sum_{\mu=0}^{\infty} I_{\mu, n}(\sigma, e_0) \cdot \sin \mu E_0. \quad (3.63)$$

Величины  $I_{\mu, n}(\sigma, e_0)$  и  $\tilde{I}_{\mu, n}(\sigma, e_0)$  как коэффициенты ряда Фурье определяются формулами:

$$\begin{aligned} I_{\mu, n}(\sigma, e_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^\sigma E_0 \cdot \sin nE_0 \sin \mu E_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^\sigma} dE_0 = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{\sigma}{2}}}{2^{k-1} \pi} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} (-1)^\lambda \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\sigma-2\lambda) E_0 \cdot \sin nE_0 \cdot \sin \mu E_0}{(1 - e_0 \cos E_0)^\sigma} dE_0 = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{\sigma}{2}}}{2^k \pi} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} (-1)^\lambda \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \int_0^{2\pi} \frac{[\sin(n+\sigma-2\lambda) E_0 + \sin(n-\sigma+2\lambda) E_0]}{(1 - e_0 \cos E_0)^\sigma} \sin \mu E_0 dE_0 = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{\sigma}{2}}}{2^{k+1} \pi} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} (-1)^\lambda \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \int_0^{2\pi} [\cos(\mu - n - \sigma + 2\lambda) E_0 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos(\mu+n+\sigma-2\lambda)E_0 + \cos(\mu-n+\sigma-2\lambda)E_0 - \cos(\mu+n-\sigma+2\lambda)E_0 \Big] \frac{dE_0}{(1-e_0 \cos E_0)^\sigma} = \\
& = \frac{(-1)^{\frac{\sigma}{2}}}{2^k} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} (-1)^\lambda \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} [J_{\mu-n-\sigma+2\lambda}^*(\sigma, e_0) - J_{\mu+n+\sigma+2\lambda}^*(\sigma, e_0) + \\
& + J_{\mu-n+\sigma-2\lambda}^*(\sigma, e_0) - J_{\mu+n-\sigma+2\lambda}^*(\sigma, e_0)]. \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Если обозначить

$$J_{\alpha}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) = \frac{1}{2^k} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} J_{\alpha+2\lambda}^*(\sigma, e_0)$$

и

$$J_{\alpha}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) = \frac{1}{2^k} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} J_{\alpha-2\lambda}^*(\sigma, e_0), \quad (3.65)$$

то

$$I_{\mu, n}(\sigma, e_0) = (-1)^{\frac{\sigma}{2}} \cdot [J_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) - J_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) + J_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - J_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)]. \quad (3.66)$$

Каждая из величин, стоящих в квадратных скобках, зависит от трех индексов:  $\mu+n, \sigma, e_0$  или  $\mu-n, \sigma, e_0$ , поэтому для них могут быть составлены таблицы с тремя входами.

Совершенно аналогично получаем:

$$\bar{I}_{\mu, n}(\sigma, e_0) = (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} [J_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) + J_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - J_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - J_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)]. \quad (3.67)$$

Взяв теперь  $(\sigma-1)$ -ую производную от функции (3.61) по  $E_0$ , получим для  $\sigma$  четного:

$$\frac{d^{\sigma-1}}{dE_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\sin \sigma E_0 \sin n E_0}{(1-e_0 \cos E_0)^\sigma} \right] = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\sigma-2}{2}} I_{\mu, n}(\sigma, e_0) \mu^{\sigma-1} \cos \mu E_0, \quad (3.68, a)$$

и для  $\sigma$  нечетного:

$$\frac{d^{\sigma-1}}{dE_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\sin \sigma E_0 \sin n E_0}{(1-e_0 \cos E_0)^\sigma} \right] = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} \bar{I}_{\mu, n}(\sigma, e_0) \mu^{\sigma-1} \cos \mu E_0. \quad (3.68, б)$$

Подставляя разложения (3.68, а) и (3.68, б) в формулу (3.60), получим разложение  $\cos nE$  в виде:

$$\cos nE = \cos nE_0 + \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^\sigma \frac{(e-e_0)^\sigma}{\sigma!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} I_{\mu, n}(\sigma, e_0) \cos \mu E_0. \quad (3.69)$$

$I_{\mu, n}(\sigma, e_0)$  для  $\sigma$  четного определяется формулой (3.68, а), а для  $\sigma$  нечетного — формулой (3.68, б).

§ 5. Разложение главной части пертурбационной функции по степеням  $(e - e_0)$  в случае эллиптического движения

Подставим теперь разложение  $\cos nE$  по степеням  $(e - e_0)$  в формулу (3.52) для разложения  $\frac{1}{r_j}$ . Это даст нам

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_j} = & \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{\substack{\mu, q, r=-k \\ \mu, q, r=-k}}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s_1=0}^{\infty} \frac{d^{s_1}}{de_0^{s_1}} \Psi_n(e_0) \frac{(e - e_0)^{s_1}}{s_1!} \times \\ & \times \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} I_{\mu, n}(\sigma, e_0) \cos \mu E_0 \cos(p\omega + q\overline{\delta\ell} + ri). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Введем обозначение

$$\frac{\mu^{\sigma-1}}{s_1 2! \sigma!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{s_1}}{de_0^{s_1}} \Psi_n(e_0) I_{\mu, n}(\sigma, e_0) = \chi_{\mu, \sigma, s_1}(e_0). \quad (3.71)$$

Развернем суммы по  $s_1$  и  $\sigma$  и перегруппируем члены. Мы получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (e - e_0)^{s_1+\sigma} \chi_{\mu, \sigma, s_1}(e_0) = \\ & = \sum_{s_1=0}^{\infty} (e - e_0)^{s_1} [\chi_{\mu, 0, s_1}(e_0) + (e - e_0) \chi_{\mu, 1, s_1}(e_0) + (e - e_0)^2 \chi_{\mu, 2, s_1}(e_0) + \dots] = \\ & = [\chi_{\mu, 0, 0}(e_0) + (e - e_0) \chi_{\mu, 1, 0}(e_0) + (e - e_0)^2 \chi_{\mu, 2, 0}(e_0) + \dots] + \\ & + [(e - e_0) \chi_{\mu, 0, 1}(e_0) + (e - e_0)^2 \chi_{\mu, 1, 1}(e_0) + (e - e_0)^3 \chi_{\mu, 2, 1}(e_0) + \dots] + \\ & + [(e - e_0)^2 \chi_{\mu, 0, 2}(e_0) + (e - e_0)^3 \chi_{\mu, 1, 2}(e_0) + (e - e_0)^4 \chi_{\mu, 2, 2}(e_0) + \dots] + \\ & + \dots = \\ & = \chi_{\mu, 0, 0}(e_0) + (e - e_0) [\chi_{\mu, 1, 0}(e_0) + \chi_{\mu, 0, 1}(e_0)] + (e - e_0)^2 [\chi_{\mu, 2, 0}(e_0) + \chi_{\mu, 1, 1}(e_0) + \\ & + \chi_{\mu, 0, 2}(e_0)] + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} (e - e_0)^s \sum_{j=0}^s \chi_{\mu, s-j, j}(e_0). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Подставляя теперь выражение (3.72) в формулу (3.70), получим окончательно

$$\frac{1}{r_j} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{\substack{\mu, q, r=-k \\ \mu, q, r=-k}}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \Omega_{s, \mu}(e_0) (e - e_0)^s \cos(\mu E_0 + p\omega + q\overline{\delta\ell} + ri), \quad (3.73)$$

где положено

$$\Omega_{\mu, s}(e_0) = \sum_{j=0}^s \chi_{\mu, s-j, j}(e_0). \quad (3.74)$$

§ 6. Разложение главной части пертурбационной функции в ряд Фурье по аргументам  $(v + \omega)$ ,  $\overline{\delta\ell}$ ,  $i$  в случае гиперболического движения

Рассмотрим теперь задачу разложения пертурбационной функции в случае гиперболического движения.



Пертурбационная функция определяется формулой:

$$R = k^2 m \left( \frac{1}{r_j} - \frac{r \cos \theta}{a_j^2} \right). \quad (3.75)$$

Ее главная часть имеет вид

$$\frac{1}{r_j} = (a_j^2 + r^2 - 2a_j r \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.76)$$

где  $a_j$  — расстояние от Солнца до Юпитера,  $r$  — радиус-вектор возмущаемой точки,  $\theta$  — угол, образованный направлением из Солнца на Юпитер и астероид,  $m_j$  масса Юпитера.

Разлагая  $\frac{1}{r_j}$  в ряд Фурье по  $\cos k\theta$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_j} &= \frac{1}{2r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_1^{(k)} \cos k\theta, \quad r > a_j, \\ \frac{1}{r_j} &= \frac{1}{2a_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_1^{(k)} \cos k\theta, \quad r < a_j, \end{aligned} \quad (3.77)$$

где  $B_1^{(k)}$ , так же как во II части, представляют собой однородные функции относительно  $a_j$  и  $r$ , образующиеся в соответствующие коэффициенты Лапласа, если положить  $r = a$ . Они определяются формулой:

$$\frac{1}{2} B_1^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k + 2l + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k + 2l)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} (\bar{a})^{k+2l}, \quad (3.78)$$

$$\bar{a} = \frac{a_j}{r}, \quad a_j < r \quad \text{или} \quad \bar{a} = \frac{r}{a_j}, \quad a_j > r.$$

$\cos \theta$ , являющийся стороной сферического треугольника  $\Omega PJ$ , определяется формулой:

$$\cos \theta = \cos(v + \omega) \cos(l_j - \Omega) + \sin(v + \omega) \sin(l_j - \Omega) \cos i,$$

см. рис. 5.

Разлагая  $\cos k\theta$  в трехкратный ряд Фурье по аргументам  $v + \omega$ ,  $\bar{\Omega} = l_j - \Omega$ ,  $i$ , будем иметь

$$\cos k\theta = \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \cos[p(v + \omega) + q\bar{\Omega} + ri] \quad (3.79)$$

или

$$\cos k\theta = \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} [\cos pv \cos(p\omega + q\bar{\Omega} + ri) - \sin pv \sin(p\omega + q\bar{\Omega} + ri)]. \quad (3.80)$$

Разложения, полученные до сих пор и определяемые формулами (3.77) и (3.80), тождественны аналогичным разложениям эллиптического движения. Чтобы получить далее выражения для  $\cos k\theta$  и  $\frac{1}{r_j}$  через величину  $u$ , являющуюся для гиперболического движения аналогом эксцентрической аномалии, нужно получить разложения для величин  $\frac{\sin pv}{r^{k+2l+1}}$  и  $\frac{\cos pv}{r^{k+2l+1}}$  по кратным  $u$ .  $\bar{r} = \frac{r}{a}$ ,  $a$  — большая полуось орбиты возмущаемого тела,  $r$  — радиус вектор возмущаемой точки.

### § 7. Разложение произведения степени радиуса вектора на косинус угла кратного истинной аномалии в случае гиперболического движения

Если мы заменим в уравнении эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$   $y$  на  $iy$ , то получим уравнение гиперболы. Мы можем формально удовлетворить этому уравнению таким же способом, как в случае движения эллиптического, т. е. положив:

$$x = -a(\cos E - e), \quad y = -a\sqrt{1-e^2} \sin E \quad (3.81)$$

или

$$x = a - (\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1-e^2} \sin E.$$

Так как в этом случае  $e > 1$ , то  $\sin E$  будет чисто мнимой величиной, а  $\cos E$  остается действительным ( $x$  и  $y$  мы считаем действительными).  $E$  в этом случае

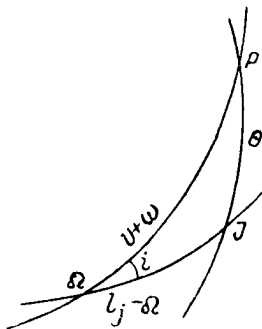


Рис. 5.

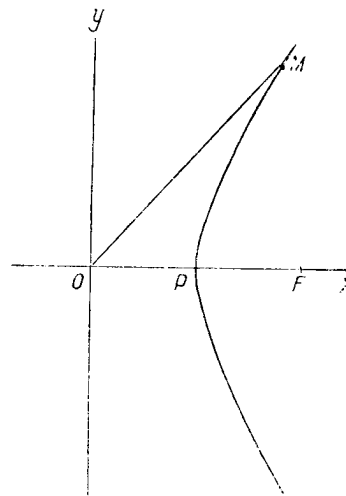


Рис. 6.

может быть комплексным:  $E = k\pi + iu$ . Давая  $k$  все возможные целочисленные значения,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , мы будем получать наложенные друг на друга гиперболы. А так как в уравнение (3.81)  $E$  входит только под знаком тригонометрических функций, то  $x$  и  $y$  определяются однозначно. Мы можем поэтому положить  $k = 0$  и считать  $E = iu$ , где  $u$  действительно.

Геометрически  $u$  представляет собой площадь гиперболического сектора  $OMP$  равнобочной гиперболы с центром в начале координат (рис. 6). В этом случае по величине  $u = \ln(\bar{x} + \bar{y})$ ,  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  здесь прямоугольные координаты точки  $M$ .

Формулы для координат гиперболического движения мы могли бы получить, не прибегая к указанной выше замене переменного  $E = iu$ . Но, не говоря уже о том, что геометрический путь сложнее, мы везде в этой работе предпочитаем аналитический метод как более строгий.

Подставляя  $E = iu$  в уравнение (3.81), получим:

а) для ветви гиперболы вогнутой к Солнцу

$$\cos v = \frac{\text{ch } u - e}{1 - e \text{ch } u}, \quad \sin v = -\sqrt{e^2 - 1} \frac{\text{sh } u}{1 - e \text{ch } u}, \quad (3.82)$$

$$\frac{r}{a} = -1 + e \text{ch } u;$$

б) для ветви гиперболы выпуклой к Солнцу

$$\cos v = \frac{\operatorname{ch} u + 1}{1 + e \operatorname{ch} u}, \quad \sin v = \sqrt{e^2 - 1} \frac{\operatorname{sh} u}{1 + e \operatorname{ch} u}, \quad (3.83)$$

$$\frac{r}{a} = 1 + e \operatorname{ch} u.$$

Рассмотрим сначала случай вогнутой к Солнцу ветви гиперболы. Подставив выражение для радиуса-вектора  $r$  в формулу (3.78), получим

$$\frac{1}{2} B_1^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k + 2l + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k + 2l)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left(\frac{a_f}{a}\right)^{k+2l} \frac{(-1)^k}{(1 - e \operatorname{ch} u)^{k+2l}}. \quad (3.84)$$

Тогда

$$\frac{1}{r_j} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \frac{\cos pv \cos(p\omega + q\bar{\omega} + ri) - \sin pv \sin(p\omega + q\bar{\omega} + ri)}{(1 - e \operatorname{ch} u)^{k+2l+1}}. \quad (3.85, a)$$

Итак, нам надо получить разложение для величин

$$\frac{\cos pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}, \quad \frac{\sin pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}, \quad x = k + 2l + 1. \quad (3.85, b)$$

По формулам Эйлера имеем для величин  $\cos pv$  и  $\sin pv$

$$\cos pv = \sum_{m=0}^{x_1} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \cos^{p-2m} v,$$

$$x_1 = \frac{p}{2} \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{p-1}{2},$$

$$\sin pv = \sum_{m=0}^{x_2} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \cos^{p-2m-1} v \cdot \sin v, \quad (3.86)$$

$$x_2 = \frac{p-1}{2} \quad \text{или} \quad x_2 = \frac{p-2}{2}.$$

Подставляя в формулу (3.86) значения  $\cos^{p-2m} v$  и  $\sin v$  из формул (3.82), получим

$$\frac{\cos pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} = \sum_{m=0}^{x_1} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \cdot \frac{(\operatorname{ch} u - e)^{p-2m}}{(1 - e \operatorname{ch} u)^{x+p-2m}}, \quad (3.87)$$

и

$$\frac{\sin pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} = \sum_{m=0}^{x_2} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \cdot \frac{(\operatorname{ch} u - e)^{p-2m-1}}{(1 - e \operatorname{ch} u)^{x+p-2m}} \operatorname{sh} u. \quad (3.88)$$

Разлагая величину  $\frac{(\operatorname{ch} u - e)^{p-2m}}{(1 - e \operatorname{ch} u)^{x+p-2m}}$  на элементарные дроби, получим

$$\begin{aligned} \frac{\cos pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} &= \sum_{m=0}^{x_1} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{p-2m} (-1)^j \frac{(p-2m)(p-2m-1) \dots (p-2m-j+1)(1-e^2)^{p-2m-j}}{j! e^{p-2m} (1 - e \operatorname{ch} u)^{x+p-2m-j}} \end{aligned} \quad (3.89)$$

и

$$\frac{\sin p u}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} = -\sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{x_2} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1) (p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m-1) (p-2m-2) \dots (p-2m-j) (1-e^2)^{p-2m-j-1}}{j! e^{p-2m} (1 - e \operatorname{ch} u)^{x+p-2m-j}} \cdot \operatorname{sh} u. \quad (3.90)$$

Величина  $\frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^{x+p-2m-j}}$ , как было рассмотрено в § 1, может быть разложена в ряд по степеням  $z$ , где  $z = e^{-u}$ . Это разложение будет иметь вид:

$$\frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^{x+p-2m-j}} \sum_{n=n_1}^{\infty} \tilde{J}_n(x+p-2m-j, e) (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.91)$$

Следовательно,

$$\frac{\cos p u}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} \sum_{n=n_1}^{\infty} \bar{F}_n(e) (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu), \quad (3.92)$$

где  $n_1 = x + p - 2m - j$ , а  $\bar{F}_n(e)$  определяется формулой:

$$\bar{F}_n(e) = \sum_{m=0}^{x_1} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p (p-m-1) (p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{p-2m} (-1)^j \frac{(p-2m) (p-2m-1) \dots (p-2m-j+1) (1-e^2)^{p-2m-j}}{j! e^{p-2m}} \tilde{J}_n(p-2m+x-j, e). \quad (3.93)$$

Что касается величины  $\frac{\operatorname{sh} u}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}$ , то очевидно, что она также может быть разложена в ряд по степеням  $z$ . Этот ряд может быть получен либо при помощи методов, аналогичных методам второй части, либо непосредственным умножением ряда (3.92) на  $\operatorname{sh} u$ . Этот ряд будет сходиться в той же области  $|z| < 1$  или  $0 \leq u < \infty$ . В области  $|z| > 1$  получим разложение по отрицательным степеням  $z$ . Оба эти разложения так же, как разложение для  $\frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}$ , можно объединить в одно:

$$\frac{\operatorname{sh} u}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} = \sum_{n=n_2}^{\infty} Q_n(e) (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu), \quad (3.94)$$

где  $n_2 = x - 1$ , а вместо  $u$  берется его абсолютное значение.

Коэффициенты  $Q_n(n)$  ряда (3.94) проще всего можно получить, заметив, что

$$\frac{\operatorname{sh} u}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} = \frac{1}{e} \cdot \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^{x-1}} \right] \frac{1}{(x-1)}. \quad (3.95)$$

Получив разложение для величины  $\frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^{x-1}}$

$$\frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^{x-1}} = \sum_{n=n_2}^{\infty} \tilde{J}_n(x-1, e) (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu) \quad (3.96, a)$$

и продифференцировав его почленно, получим<sup>1</sup>

$$\frac{\operatorname{sh} u}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} = - \frac{n}{e(x-1)} \sum_{n=n_2}^{\infty} \tilde{J}_n(\alpha-1, e)(\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.96, б)$$

Полагая  $\alpha = x + p - 2m - j$  и подставляя разложение (3.96, б) в формулу (3.90), получим разложение для  $\frac{\operatorname{sh} pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}$ :

$$\frac{\operatorname{sh} pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} = \sum_{n=n_2}^{\infty} \bar{\Phi}_n(e)(\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu), \quad (3.97)$$

где  $\bar{\Phi}_n(e)$  определяется формулой:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_n(e) = & n \sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{n_2} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \times \\ & \times \sum_{j=1}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m-1)(p-2m-2) \dots (p-2m-j)}{j! (p-2m+x-j-1) e^{p-2m}} (1-e^2)^{p-2m-j-1} \tilde{J}_n(x+p-2m-j-1, e). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Таким образом, разложение (3.97) для  $\frac{\operatorname{sh} pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}$  будет отличаться от разложения (3.92) для  $\frac{\cos pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}$  в случае гиперболического движения только коэффициентом при соответствующей степени  $z^n = (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu)$ , который является функцией эксцентриситета.

### § 8. Разложение главной части пертурбационной функции по степеням приращения эксцентриситета для случая движения по вогнутой к Солнцу ветви гиперболы

Мы имели

$$\frac{\cos k\Theta}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} = \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} [\cos pv \cos(p\omega + q\bar{\delta} + ri) - \sin pv \sin(p\omega + q\bar{\delta} + ri)] \frac{1}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}. \quad (3.99)$$

Подставляя теперь вместо  $\frac{\cos pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}$  и  $\frac{\sin pv}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}$  их разложения, получим

$$\begin{aligned} \frac{\cos k\Theta}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x} = & \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{F}_n(e)(\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu) \cos(p\omega + q\bar{\delta} + ri) - \\ & - \bar{\Phi}_n(e)(\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu) \sin(p\omega + q\bar{\delta} + ri)]. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Подставив разложение для  $\frac{\cos k\Theta}{(1 - e \operatorname{ch} u)^x}$  в формулу для  $\frac{1}{r_j}$  пертурбационной функции, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_j} = & \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{F}_n(e) \cos(p\omega + q\bar{\delta} + ri) - \\ & - \bar{\Phi}_n(e) \sin(p\omega + q\bar{\delta} + ri)] \cdot (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \end{aligned} \quad (3.101)$$

<sup>1</sup> Операция дифференцирования ряда (3.96, а) по  $u$  является законной, так как  $\frac{d}{du} = \epsilon_n \frac{d}{dz}$ , а относительно  $z$  ряд (3.96, а) является степенным, который, как известно, можно почленно дифференцировать всюду в области его сходимости.

Теперь нам остается, так же как в случае эллиптического движения, разложить функции  $\bar{F}_n(e)$  и  $\bar{\Phi}_n(e)$ ,  $\text{sh } nu$  и  $\text{ch } nu$  по степеням разности эксцентриситета. Разложение для функций  $\bar{F}_n(e)$  и  $\bar{\Phi}_n(e)$  получается так же, как и для эллипса. Именно:

$$\bar{F}_n(e) = \bar{F}_n(e_0) + (e - e_0) \bar{F}'_n(e_0) + \frac{(e - e_0)^2}{2!} \bar{F}''_n(e_0) + \dots, \quad (3.102)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F}_n^{(s_1)}(e_0) &= \frac{d^{s_1}}{de_0^{s_1}} \sum_{m=0}^{x_1} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{p-2m} (-1)^j \frac{(p-2m)(p-2m-1) \dots (p-2m-j+1)}{j! e_0^{p-2m}} (1 - e_0)^{p-2m-j} \bar{J}_n(p-2m+x-j, e_0), \quad (3.103) \\ x_1 &= \frac{p}{2} \text{ или } x_1 = \frac{p-1}{2}. \end{aligned}$$

Разложение для  $\bar{\Phi}_n(e)$  будет иметь вид:

$$\bar{\Phi}_n(e) = \bar{\Phi}_n(e_0) + (e - e_0) \bar{\Phi}'_n(e_0) + \frac{(e - e_0)^2}{2!} \bar{\Phi}''_n(e_0) + \dots \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_n^{(s_1)}(e_0) &= \frac{d^{s_1}}{de_0^{s_1}} n \sqrt{e_0^2 - 1} \sum_{m=0}^{x_2} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m)}{m! e_0^{p-2m}} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{p-2m-1} (-1)^j \frac{(p-2m-1)(p-2m-2) \dots (p-2m-j)}{j! (p-2m+x-j-1)} (1 - e_0^2)^{p-2m-j-1} \bar{J}_n(x+p-2m-j-1, e_0), \\ x_2 &= \frac{p-1}{2} \text{ или } x_2 = \frac{p-2}{2}. \end{aligned}$$

Разложения для  $\text{ch } nu$  и  $\text{sh } nu$  получаются также аналогично разложениям  $\cos nE$  и  $\sin nE$  в эллиптическом движении. Именно, напомним два аналога уравнения Кеплера в гиперболическом движении, для основного и смежного движений.

$$u = -M + e \text{sh } u, \quad u_0 = -M + e_0 \text{sh } u_0, \quad M = ka^{-3/2} (t - t_0).$$

Образовав разность и введя обозначения

$$\Psi(u) = \frac{\text{sh } u - \text{sh } u_0}{u - u_0}, \quad (3.105)$$

$$\Phi(u) = \frac{\text{sh } u}{1 - e_0 \Psi(u)}, \quad (3.106)$$

получим

$$u = u_0 + (e - e_0) \Phi(u). \quad (3.107)$$

Ряд Лагранжа для разложения  $\text{ch } nu$  по степеням  $(e - e_0)$  в этом случае будет иметь вид:

$$\text{ch } nu = \text{ch } nu_0 + n \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^s}{s!} \frac{d^{s-1}}{du_0^{s-1}} \left[ \frac{\text{sh}^2 u_0 \text{sh } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^2} \right]. \quad (3.108)$$

Для разложения  $\text{sh } nu$  ряд Лагранжа будет:

$$\text{sh } nu = \text{sh } nu_0 + n \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^{\sigma}}{\sigma!} \frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\text{sh}^{\sigma} u_0 \text{ch } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{\sigma}} \right]. \quad (3.109)$$

Чтобы получить разложение главной части пертурбационной функции по степеням  $(e - e_0)$ , коэффициентами которых будут ряды синусов и косинусов углов кратных  $u$ , мы разложим сначала величины

$$\frac{\text{sh}^{\sigma} u_0 \cdot \text{sh } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{\sigma}} \text{ и } \frac{\text{sh}^{\sigma} u_0 \cdot \text{ch } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{\sigma}}$$

в ряды по степеням  $z = \varepsilon^{-u}$ , а затем возьмем от этих рядов соответствующие производные. Эти ряды будут такого же типа, как и ряды, полученные в § 7 и будут сходиться для всех  $0 \leq u < \infty$ . Для получения таких разложений выразим сначала  $\text{sh}^{\sigma} u$  через гиперболические синусы и косинусы кратных углов. Эти выражения могут быть написаны в виде:

$$\text{sh}^{\sigma} u_0 = \frac{1}{2^{\sigma-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \text{ch}(\sigma-2\lambda) u_0 \quad (3.110)$$

для  $\sigma$  четного, причем последний член суммы в уравнении (3.110) должен быть разделен на два. Для  $\sigma$  нечетного  $\text{sh}^{\sigma} u_0$  может быть выражен через гиперболические синусы углов кратных по формуле:

$$\text{sh}^{\sigma} u_0 = \frac{1}{2^{\sigma-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma-1}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \text{sh}(\sigma-2\lambda) u_0. \quad (3.111)$$

Разложение величины  $\frac{1}{(1 - e \text{ch } u_0)^{\sigma}}$ , согласно результатам § 7, может быть получено в виде:

$$\frac{1}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{\sigma}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \tilde{J}_{\alpha}(\sigma, e_0) (\text{ch } \alpha u_0 - \text{sh } \alpha u_0). \quad (3.112)$$

Тогда, разложение для

$$\frac{\text{sh}^{\sigma} u_0 \cdot \text{sh } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{\sigma}}$$

будет иметь следующий вид.

а) Для случая, когда  $\sigma$  четное, будет:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}^{\sigma} u_0 \text{sh } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{\sigma}} &= \frac{1}{2^{\sigma-2}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \text{ch}(\sigma-2\lambda) u_0 \text{sh } nu_0 \times \\ &\times \sum_{\alpha=0}^{\infty} \tilde{J}_{\alpha}(\sigma, e_0) (\text{ch } \alpha u_0 - \text{sh } \alpha u_0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{\frac{\sigma}{2}-1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \tilde{J}_n(\alpha, e_0) (\operatorname{ch} \alpha u_0 - \operatorname{sh} \alpha u_0) [\operatorname{sh}(n+\sigma-2\lambda) u_0 + \operatorname{sh}(n-\sigma+2\lambda) u_0] = \\
&= \frac{1}{2^{\frac{\sigma}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \tilde{J}_n(\alpha, e_0) \{ -[\operatorname{ch}(\alpha+n+\sigma-2\lambda) u_0 - \operatorname{sh}(\alpha+n+\sigma-2\lambda) u_0] + \\
&\quad + [\operatorname{ch}(\alpha-n-\sigma+2\lambda) u_0 - \operatorname{sh}(\alpha-n-\sigma+2\lambda) u_0] - \\
&\quad - [\operatorname{ch}(\alpha+n-\sigma+2\lambda) u_0 - \operatorname{sh}(\alpha+n-\sigma+2\lambda) u_0] + \\
&\quad + [\operatorname{ch}(\alpha-n+\sigma-2\lambda) u_0 - \operatorname{sh}(\alpha-n+\sigma-2\lambda) u_0] \}. \quad (3.113)
\end{aligned}$$

Положим теперь  $\alpha+n+\sigma=\mu$  и соберем члены с одинаковыми кратностями  $u_0$ , мы получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sh}^{\sigma} u_0 \operatorname{sh} n u_0}{(1-e_0 \operatorname{ch} u_0)^{\sigma}} &= \frac{1}{2^{\frac{\sigma}{2}+1}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \times \sum_{\mu=0}^{\infty} [-\tilde{J}_{\mu-n-\sigma+2\lambda}(\sigma, e_0) + \\
&+ \tilde{J}_{\mu+n+\sigma-2\lambda}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n+\sigma-2\lambda}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu+n-\sigma+2\lambda}(\sigma, e_0)] \times (\operatorname{ch} \mu u_0 - \operatorname{sh} \mu u_0). \quad (3.114)
\end{aligned}$$

Полагая, наконец,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{\alpha}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) &= \frac{1}{2^{\frac{\sigma}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \tilde{J}_{\alpha+2\lambda}(\sigma, e_0), \\
\tilde{J}_{\alpha}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) &= \frac{1}{2^{\frac{\sigma}{2}}} \sum_{\lambda=0}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma(\sigma-1) \dots (\sigma-\lambda+1)}{\lambda!} \tilde{J}_{\alpha-2\lambda}(\sigma, e_0), \quad (3.115)
\end{aligned}$$

мы получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sh}^{\sigma} u_0 \operatorname{sh} n u_0}{(1-e_0 \operatorname{ch} u_0)^{\sigma}} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} [\tilde{J}_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)] \times \\
&\quad \times (\operatorname{ch} \mu u_0 - \operatorname{sh} \mu u_0). \quad (3.116)
\end{aligned}$$

б) Для случая, когда  $\sigma$  нечетное.

В этом случае сумма синусов в формуле (3.113) заменится через разность косинусов, перед суммой будет знак минус, и разложение для

$$\frac{\operatorname{sh}^{\sigma} u_0 \cdot \operatorname{sh} n u_0}{(1-e_0 \operatorname{ch} u_0)^{\sigma}}$$

будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sh}^{\sigma} u_0 \operatorname{sh} n u_0}{(1-e_0 \operatorname{ch} u_0)^{\sigma}} &= - \sum_{\mu=0}^{\infty} [\tilde{J}_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)] \times \\
&\quad \times (\operatorname{ch} \mu u_0 - \operatorname{sh} \mu u_0). \quad (3.117)
\end{aligned}$$



Возьмем теперь производную по  $u_0$  порядка  $(\sigma - 1)$  от выражений (3.116) и (3.117). Мы будем иметь:

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\text{sh}^\sigma u_0 \text{sh } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^\sigma} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [\tilde{J}_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch } \mu u_0 - \text{sh } \mu u_0), \quad (3.118)$$

когда  $\sigma$  четное, и

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\text{sh}^\sigma u_0 \text{sh } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^\sigma} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [\tilde{J}_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch } \mu u_0 - \text{sh } \mu u_0), \quad (3.119)$$

когда  $\sigma$  нечетное.

Аналогичным путем мы можем получить разложения для величин

$$\frac{\text{sh}^\sigma u_0 \cdot \text{ch } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^\sigma}.$$

Они будут иметь форму:

$$\frac{\text{sh}^\sigma u_0 \text{ch } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^\sigma} = \sum_{\mu=0}^{\infty} [\tilde{J}_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch } \mu u_0 - \text{sh } \mu u_0) \quad (3.120)$$

для  $\sigma$  четного и

$$\frac{\text{sh}^\sigma u_0 \text{ch } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^\sigma} = - \sum_{\mu=0}^{\infty} [\tilde{J}_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch } \mu u_0 - \text{sh } \mu u_0) \quad (3.121)$$

для  $\sigma$  — нечетного.

Дифференцируя ряды (3.120) и (3.121) по  $u$   $(\sigma - 1)$  раз, получим:

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\text{sh}^\sigma u_0 \text{ch } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^\sigma} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [\tilde{J}_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch } \mu u_0 - \text{sh } \mu u_0) \quad (3.122)$$

для  $\sigma$  четного и

$$\frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\text{sh}^\sigma u_0 \text{ch } nu_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^\sigma} \right] = - \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\sigma-1} [\tilde{J}_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0) - \tilde{J}_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)] \times (\text{ch } \mu u_0 - \text{sh } \mu u_0) \quad (3.123)$$

для  $\sigma$  нечетного.

Для получения разложения  $(\text{ch } nu_0 - \text{sh } nu_0)$  по степеням  $(e - e_0)$  и кратным  $u_0$  нам остается только вычесть выражение (3.122) из (3.123) и (3.118) из (3.119).

При вычитании функции  $\tilde{J}_{\mu+n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0)$  и  $\tilde{J}_{\mu-n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0)$  уничтожаются, и мы получим разложение  $(\text{ch } nu_0 - \text{sh } nu_0)$  в виде:

$$(\text{ch } nu - \text{sh } nu) = (\text{ch } nu_0 - \text{sh } nu_0) + n \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)}{\sigma!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{I}_{\mu n}^{\sigma}(e_0) (\text{ch } \mu u_0 - \text{sh } \mu u_0), \quad (3.124)$$

где положено:

$$I_{\mu, n}^{\sigma}(e_0) = \mu^{\sigma-1} [\tilde{J}_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0)] \quad (3.125)$$

для  $\sigma$  четного

$$I_{\mu, n}^{\sigma}(e_0) = \mu^{\sigma-1} [-\tilde{J}_{\mu+n-\sigma}^{(+\lambda)}(\sigma, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n+\sigma}^{(-\lambda)}(\sigma, e_0)]$$

для  $\sigma$  нечетного.

При  $\sigma=0$  будет:

$$I_{\mu, n}^{\sigma}(e_0) = \mu^{-1} [\tilde{J}_{\mu+n}^{(+\lambda)}(0, e_0) + \tilde{J}_{\mu-n}^{(-\lambda)}(0, e_0)], \quad \mu^{-1} = 1.$$

Так как по свойству функций  $\tilde{J}_n(z, e_0)$

$$\tilde{J}_{\mu+n}^{(-\lambda)}(0, e_0) = \tilde{J}_{\mu-n}^{(+\lambda)}(0, e_0) = \frac{1}{2}$$

для  $\mu = n = \lambda = 0$  и

$$\tilde{J}_{\mu+n}^{(-\lambda)}(0, e_0) = \tilde{J}_{\mu-n}^{(+\lambda)}(0, e_0) = 0$$

для остальных  $\mu, n, \lambda$ , то

$$\tilde{J}_{0,0}^0(0, e_0) = 1,$$

и формула (3.124) может быть написана в виде:

$$(\operatorname{ch} \mu u - \operatorname{sh} \mu u) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{\mu=0}^{\infty} I_{\mu, n}^{\sigma}(e_0) (\operatorname{ch} \mu u_0 - \operatorname{sh} \mu u_0). \quad (3.126)$$

Подставим теперь выражение (3.126) в формулу (3.101) для разложения главной части пертурбационной функции. Мы получим это разложение в следующей формуле:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_j} = & \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{pqr=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{s_1=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^{s_1}}{s_1!} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^{\sigma}}{\sigma!} \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{I}_{\mu, n}^{\sigma}(e_0) [\operatorname{ch} \mu u_0 - \operatorname{sh} \mu u_0] [\bar{F}_n^{(s_1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\delta}\bar{\omega} + ri) - \\ & - \bar{\Phi}_n^{(s_1)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\delta}\bar{\omega} + ri)]. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Положим

$$\frac{1}{s_1!} \cdot \frac{1}{\sigma!} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}_n^{(s_1)}(e_0) I_{\mu, n}^{\sigma}(e_0) = \chi_{\mu, s_1, \sigma}^{(1)}(e_0),$$

$$\frac{1}{s_1!} \cdot \frac{1}{\sigma!} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\Phi}_n^{(s_1)}(e_0) I_{\mu, n}^{\sigma}(e_0) = \chi_{\mu, s_1, \sigma}^{(2)}(e_0). \quad (3.128)$$

Преобразуем двойную сумму по  $s_1$  и  $\sigma$ .

$$\sum_{s_1=0}^{\infty} (e - e_0)^{s_1} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (e - e_0)^{\sigma} [\chi_{\mu, s_1, \sigma}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\delta}\bar{\omega} + ri) - \chi_{\mu, s_1, \sigma}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\delta}\bar{\omega} + ri)].$$

Развертывая обе суммы и собирая члены с одинаковыми степенями  $(e - e_0)$ , получим:

$$\sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (e - e_0)^{s_1} (e - e_0)^{\sigma} [\chi_{\mu, s_1, \sigma}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\delta} + ri) - \chi_{\mu, s_1, \sigma}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\delta} + ri)] =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} (e - e_0)^s \sum_{\alpha=0}^{\infty} [\chi_{\mu, \alpha, s-\alpha}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\delta} + ri) - \chi_{\mu, \alpha, s-\alpha}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\delta} + ri)]. \quad (3.129)$$

Положив

$$\sum_{\alpha=0}^s \chi_{\mu, \alpha, s-\alpha}^{(1)}(e_0) = \Omega_{\mu, s}^{(1)}(e_0), \quad (3.130)$$

и

$$\sum_{\alpha=0}^s \chi_{\mu, \alpha, s-\alpha}^{(2)}(e_0) = \Omega_{\mu, s}^{(2)}(e_0),$$

получим:

$$\sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (e - e_0)^{s_1} (e - e_0)^{\sigma} [\chi_{\mu, s_1, \sigma}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\delta} + ri) - \chi_{\mu, s_1, \sigma}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\delta} + ri)] =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} (e - e_0)^s [\Omega_{\mu, s}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\delta} + ri) - \Omega_{\mu, s}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\delta} + ri)]. \quad (3.131)$$

Подставляя выражение (3.130) в формулу (3.127), получим окончательно:

$$\frac{1}{r_j} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{s=0}^{\infty} (e - e_0)^s \times$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\infty} (\operatorname{ch} \mu u_0 - \operatorname{sh} \mu u_0) [\Omega_{\mu, s}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\delta} + ri) - \Omega_{\mu, s}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\delta} + ri)]. \quad (3.132)$$

Разложения (3.132) получены для случая  $r > a_j$ . Для случая  $a_j > r$  в уравнении (3.132) вместо  $\frac{2}{a}$  будет множитель  $\frac{2}{a_j}$ , а величина, входящая в формулы (3.85)  $\lambda = k - 2l$ .

### § 9. Разложение главной части пертурбационной функции по степеням $(e - e_0)$ для случая движения по выпуклой к солнцу ветви гиперболы

В случае движения возмущаемой точки по ветви гиперболы, обращенной выпуклостью к Солнцу, т. е. для движения, обусловленного отталкивательной силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, выражения для косинуса и синуса истинной аномалии даются формулами (3.83)

$$\cos v = \frac{\operatorname{ch} u + e}{(1 + e \operatorname{ch} u)}, \quad \sin v = \sqrt{e^2 - 1} \frac{\operatorname{sh} u}{(1 + e \operatorname{ch} u)}.$$

Рассмотрим разложение величины  $\frac{1}{(1+e \operatorname{ch} u)^{\alpha}}$  в ряд Лорана. Делая ту же замену переменного, что и для функции  $\frac{1}{(1-e \operatorname{ch} u)^{\alpha}}$ , т. е. полагая  $z = e^{-u}$ , получим:

$$\frac{1}{(1+e \operatorname{ch} u)^{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(e) (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \quad (3.133)$$

$P_n(e)$  определяются формулами:

$$P_n(e) = \frac{2^i i}{2\bar{u} e^{\alpha}} \int_c \frac{z^{\alpha-n-1}}{\left(z^2 + \frac{\beta^2+1}{\beta} z + 1\right)^{\alpha}} dz. \quad (3.134)$$

Особые точки подинтегральной функции будут

$$z = -\beta, \quad z = -\frac{1}{\beta}. \quad (3.135)$$

Иначе говоря, коэффициенты этого ряда мы получим, заменив в коэффициентах ряда для вогнутой ветви  $\beta$  и  $-\beta$  или, что то же,  $e$  на  $-e$ . Так как

$$\tilde{J}_n(\alpha, -e) = (-1)^n \tilde{J}_n(\alpha, e), \quad (3.136)$$

то

$$P_n(e) = (-1)^n \tilde{J}_n(\alpha, e). \quad (3.137)$$

Следовательно, разложение для выпуклой к Солнцу ветви гиперболы по кратным аналога эксцентрической аномалии  $u$  будет отличаться от аналогичного разложения для вогнутой к Солнцу ветви только тем, что в соответствующие члены войдет множитель  $(-1)^n$ .

Это разложение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_j} = & \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} b_{l,i}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \times \\ & \times \sum_{s_i=0}^{\infty} \frac{(e-e_0)^{s_i}}{s_i!} [\bar{F}_n(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + ri) - \bar{\Phi}_n(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + \\ & + ri)] (\operatorname{ch} nu - \operatorname{sh} nu). \end{aligned} \quad (3.138)$$

Рассмотрим теперь разложение пертурбационной функции для выпуклой к Солнцу ветви по кратным  $u_0$ .

В этом случае аналогом уравнения Кеплера будет уравнение:

$$u = u_0 - (e - e_0) \Phi(u), \quad (3.139)$$

где

$$\Phi(u) = \frac{\operatorname{sh} u}{1 + e_0 \psi(u)}, \quad \Psi(u) = \frac{\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} u_0}{u - u_0}. \quad (3.140)$$

этом случае ряд Лагранжа для  $\operatorname{ch} nu$  будет иметь вид:

$$\operatorname{ch} nu = \operatorname{ch} nu_0 + n \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(e - e_0)^{\sigma}}{\sigma!} \frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{(-1)^{\sigma} \operatorname{sh}^{\sigma} u_0 \operatorname{sh} nu_0}{(1 + e_0 \operatorname{ch} u_0)^{\sigma}} \right]. \quad (3.141, a)$$

Для  $\text{sh } nu$  ряд Лагранжа будет:

$$\text{sh } nu = \text{sh } nu_0 + n \sum_{\sigma=1}^{\infty} (-1)^{\sigma} \frac{(e - e_0)^{\sigma}}{\sigma!} \frac{d^{\sigma-1}}{du_0^{\sigma-1}} \left[ \frac{\text{sh } u_0 \text{ ch } nu_0}{(1 + e_0 \text{ ch } u_0)^{\sigma}} \right]. \quad (3.141, 6)$$

Разложение величин

$$\frac{\text{sh }^2 u_0 \text{ sh } nu_0}{(1 + e_0 \text{ ch } u_0)^{\sigma}}, \quad \frac{\text{sh }^2 u_0 \text{ ch } nu_0}{(1 + e_0 \text{ ch } u_0)^{\sigma}}$$

будет отличаться от разложений § 8 только множителем  $(-1)^{\sigma+n+\nu}$ , а так как в формулу (3.141, а) и (3.141, б) уже входит  $(-1)^{\sigma}$ , а в формулу (3.138) входит  $(-1)^n$ , то разложение для случая выпуклой к Солнцу ветви будет отличаться от аналогичного разложения для вогнутой ветви только множителем в соответствующих членах  $(-1)^{\mu}$  и может быть написано в форме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_j} = & \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{s=0}^{\infty} (e - e_0)^s \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{k+l+\nu} [\Omega_{\mu,s}^{(1)}(e_0) \cos(p\omega + q\bar{\delta}l + ri) - \\ & - \Omega_{\mu,s}^{(2)}(e_0) \sin(p\omega + q\bar{\delta}l + ri)] (\text{ch } \mu u_0 - \text{sh } \nu u_0), \end{aligned} \quad (3.142)$$

где  $\Omega_{\mu,s}^{(1)}(e_0)$  и  $\Omega_{\mu,s}^{(2)}(e_0)$  определяются формулами (3.130).

§ 10. Другая форма разложений  $\frac{1}{r_j}$  по степеням  $(e - e_0)$

Для очень малых значений  $u$  и  $e$  близких к единице ряды (3.92) и (3.97) будут сходиться медленно и поэтому практически могут оказаться непригодными. В этом случае мы считаем более удобным или непосредственное разложение величин  $\frac{\cos pv}{(1 - e \text{ ch } u)^x}$  и  $\frac{\sin pv}{(1 - e \text{ ch } u)^x}$  в ряды Лагранжа по степеням  $(e - e_0)$  или же разложение этих величин по кратным  $u$  не в окрестности точки  $z = 0$ , а в окрестности точки  $z = 1$ . Последние ряды будут сходиться не вдоль всей траектории, а только в некоторой окрестности точки  $z = 1$  (перигелия). Зависимость радиуса этой окрестности от эксцентриситета исследована нами в одной еще не опубликованной работе.

Ряд Лагранжа для величины  $\frac{(\text{ch } u - e)^x}{(1 - e \text{ ch } u)^{x+\alpha}}$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{(\text{ch } u - e)^x}{(1 - e \text{ ch } u)^{x+\alpha}} = & \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^x}{(1 - e_0 \text{ ch } u_0)^{x+\alpha}} + n \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^{\mu}}{\mu!} \frac{d^{\mu-1}}{du_0^{\mu-1}} \left[ (2x + x) \frac{\text{sh}^{\mu+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{x-1}}{(1 - e_0 \text{ ch } u_0)^{x+\alpha+\mu}} + \right. \\ & \left. + x \frac{\text{sh}^{\mu-1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{x-2}}{(1 - e_0 \text{ ch } u_0)^{x+\alpha+\mu-1}} + (x + x) \frac{\text{sh}^{\mu+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^x}{(1 - e_0 \text{ ch } u_0)^{x+\alpha+\mu+1}} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, подставляя эти разложения в формулу (3.86), для

$$\frac{\cos pv}{(1 - e \text{ ch } u)^x}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\cos pv}{(1 - e \text{ ch } u)^x} = & \sum_{m=0}^{x_1} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \cdot \frac{(\text{ch } u - e)^{p-2m}}{(1 - e \text{ ch } u)^{x+p-2m}} = \\ = & \sum_{m=0}^{x_1} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p(p-m-1)(p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \left\{ \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1 - e_0 \text{ ch } u_0)^{x+p-2m}} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{d^{\mu-1}}{du_0^{\mu-1}} \left[ (2\mu - 4m + z) \frac{\text{sh}^{\mu-1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{z+p-2m+\mu}} + \right. \\ \left. + z \frac{\text{sh}^{\mu-1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{z+p-2m+\mu-1}} + (z + p - 2m) e_0 \frac{\text{sh}^{\mu+1} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{z+p-2m+\mu+1}} \right] \}. \quad (3.143)$$

Для величины  $\frac{(\text{ch } u - e)^{z-1} \text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^{z+z}}$  ряд Лагранжа будет:

$$\frac{(\text{ch } u - e)^{z-1} \text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^{z+z}} = \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{z-1} \text{sh } u_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{z+z}} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^\mu}{\mu!} \frac{d^{\mu-1}}{du_0^{\mu-1}} \left[ (2 - z) \frac{\text{sh}^\mu u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{z-2}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{z+z+\mu-1}} + \right. \\ \left. + \frac{\text{sh}^\mu u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{z-2} [\alpha \text{sh}^2 u_0 + (z + z) (\text{ch } u_0 - e_0) \text{ch } u_0]}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{z+z+\mu}} + (z + z) e_0 \frac{\text{sh}^{\mu+2} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{z-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{z+z+\mu+1}} \right].$$

Следовательно, разложение для  $\frac{\sin pv}{(1 - e \text{ch } u)^x}$  будет иметь вид:

$$\frac{\sin pv}{(1 - e \text{ch } u)^x} = -\sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{x_2} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1) (p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \cdot \frac{(\text{ch } u - e)^{p-2m-1} \text{sh } u}{(1 - e \text{ch } u)^{x+p-2m}} = \\ = -\sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{x_2} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1) (p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \left\{ \frac{(\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1} \text{sh } u_0}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{x+p-2m}} + \right. \\ \left. + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(e - e_0)^\mu}{\mu!} \frac{d^{\mu-1}}{du_0^{\mu-1}} \left[ (2 - p + 2m) \frac{\text{sh}^\mu u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-2}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{x+p-2m+\mu-1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\text{sh}^\mu u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-2} [(p-2m) \text{sh}^2 u_0 + (x + p - 2m) (\text{ch } u_0 - e_0)]}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{x+p-2m+\mu}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (z + p - 2m) e_0 \frac{\text{sh}^{\mu+2} u_0 (\text{ch } u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \text{ch } u_0)^{x+p-2m+\mu+1}} \right] \right\}. \quad (3.144)$$

В тех случаях, когда невыгодно разлагать в ряд по степеням  $z = \varepsilon^{-u}$  величину  $\frac{1}{(1 - e \text{ch } u)^x}$ , также невыгодно разлагать в ряд по степеням  $z_0 = \varepsilon^{-u_0}$  величины, стоящие в скобках в правых частях уравнений (3.143) и (3.144), так как  $u$  и  $e$  весьма мало отличаются от  $u_0$  и  $e_0$ . В этом случае придется воспользоваться разложением величин  $\frac{\sin pv}{(1 - e \text{ch } u)^x}$  и  $\frac{\cos pv}{(1 - e \text{ch } u)^x}$  в формуле (3.143) и (3.144). Нам кажется, что это не может вызвать особых затруднений ввиду того, что мы всегда можем выбрать  $e_0$  достаточно близким к  $e$ , чтобы ряды (3.143) сходились достаточно быстро. Поэтому в них не придется брать больше трех-четырех производных, чтобы вычислить коэффициенты при соответствующих степенях  $(e - e_0)$ . Эти коэффициенты при заданном  $e_0$  будут зависеть от времени через посредство  $u_0$ .

Подставляя разложения (3.143) и (3.144) в ряд для  $\frac{1}{r_f}$ , получим ее разложение в виде:

$$\frac{1}{r_f} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{s=0}^{\infty} (e - e_0)^s [f_s(u_0) \cos(p\omega + q\bar{\omega} + ri) + \\ + \varphi_s(u_0) \sin(p\omega + q\bar{\omega} + ri)], \quad (3.145)$$

где положено

$$\begin{aligned}
f_s(u_0) = & \sum_{m=0}^{x_1} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} p (p-m-1) (p-m-2) \dots (p-2m+1)}{m!} \left\{ \frac{(\operatorname{ch} u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^{x+p-2m}} + \right. \\
& + \frac{1}{s!} \frac{d^{s-1}}{du_0^{s-1}} \left[ (2p-4m+z) \frac{\operatorname{sh}^{s+1} u_0 (\operatorname{ch} u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^{x+p-2m+s}} + z \frac{(\operatorname{ch} u_0 - e_0)^{p-2m-1} \operatorname{sh}^{s-1} u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^{x+p-2m+s-1}} + \right. \\
& \left. \left. + (z+p-2m) e_0 \frac{\operatorname{sh}^{s+1} u_0 (\operatorname{ch} u_0 - e_0)^{p-2m}}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^{x+p-2m+s+1}} \right] \right\}, \\
\varphi_s(u_0) = & \sqrt{e^2 - 1} \sum_{m=0}^{x_2} (-1)^m \frac{2^{p-2m-1} (p-m-1) (p-m-2) \dots (p-2m)}{m!} \left\{ \frac{(\operatorname{ch} u_0 - e_0)^{p-2m-1} \operatorname{sh}^s u_0}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^{x+p-2m}} + \right. \\
& + \frac{1}{s!} \frac{d^{s-1}}{du_0^{s-1}} \left[ (2-p+2m) \frac{\operatorname{sh}^s u_0 (\operatorname{ch} u_0 - e_0)^{p-2m-2}}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^{x+p-2m+s-1}} + \right. \\
& + \frac{(\operatorname{ch} u_0 - e_0)^{p-2m-2} \operatorname{sh}^s u_0 [(p-2m) \operatorname{sh}^2 u_0 + (p-2m+2) (\operatorname{ch} u_0 - e_0) \operatorname{ch} u_0]}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^{x+p-2m+s}} + \\
& \left. \left. + (z+p-2m) \frac{\operatorname{sh}^{(s+2)} u_0 (\operatorname{ch} u_0 - e_0)^{p-2m-1}}{(1 - e_0 \operatorname{ch} u_0)^{x+p-2m+s+1}} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

### § 11. Разложение дополнительной части пертурбационной функции по степеням $(e - e_0)$

Рассмотрим теперь разложение дополнительной части пертурбационной функции по степеням приращения эксцентриситета  $(e - e_0)$ .

Для дополнительной части пертурбационной функции в круговой ограниченной задаче трех точек имеет формулу:

$$R_1 = \frac{r \cos \theta}{a_j^2} = \frac{r}{a_j^2} \sum_{p, q, r=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} \cos [p(\nu + \omega) + q\bar{\delta} + ri].$$

Или

а) для эллиптического движения

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, q, r=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} \sum_{n=-1}^1 [F_n(e) + \Phi_n(e)] \cos nE \cos (p\omega + q\bar{\delta} + ri); \quad (3.146)$$

б) для вогнутой к Солнцу ветви гиперболы

$$\begin{aligned}
R_1 = & \frac{a}{a_j^2} \sum_{pqr=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} \sum_{n=-1}^1 [(\operatorname{ch} u - e) \cos (p\omega + q\bar{\delta} + ri) + \\
& + \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} u \sin (p\omega + q\bar{\delta} + ri)]. \quad (3.147)
\end{aligned}$$

Разложив по степеням  $(e - e_0)$  величины  $\cos nE$ ,  $\operatorname{sh} nu$  и  $\operatorname{ch} nu$ , мы получим ряды Лагранжа в виде:

а) для эллипса

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, q, r=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} \sum_{n=-1}^1 [F_n(e) + \Phi_n(e)] \cdot \left\{ \cos nE_0 - \right.$$

$$-np \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(e-e_0)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{d^{\mu-1}}{du_0^{\mu-1}} \left[ \frac{\sin^\mu E_0 \sin nE_0}{(1-e_0 \cos E_0)^\mu} \right] \times \cos(p\omega + q\bar{\delta} + ri), \quad (3.148)$$

$$p, q = -1, +1, \quad r, n = -1, 0, 1,$$

$$F_{-1}(e) = F_1(e) = \frac{1}{2}, \quad F_0(e) = -e, \quad \Phi_{-1}(e) = -\Phi_1(e) = \sqrt{1-e^2};$$

б) для вогнутой к Солнцу ветви гиперболы

$$R_1 = \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, q, r=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} \sum_{n=-1}^1 \left\{ \operatorname{ch} nu_0 + n \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(e-e_0)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{d^{\mu-1}}{du_0^{\mu-1}} \left[ \frac{\operatorname{sh}^\mu u_0 \operatorname{sh} nu_0}{(1-e_0 \operatorname{ch} u_0)^\mu} \right] \times \right. \\ \left. \times \cos(p\omega + q\bar{\delta} + ri) + \sqrt{e^2-1} \left\{ \operatorname{sh} nu_0 + np \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(e-e_0)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{d^{\mu-1}}{du_0^{\mu-1}} \left[ \frac{\operatorname{sh}^\mu u_0 \operatorname{ch} nu_0}{(1-e_0 \operatorname{ch} u_0)^\mu} \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin(p\omega + q\bar{\delta} + ri) \right\} \right\} \quad (3.149)$$

Для выпуклой к Солнцу ветви гиперболы надо везде в разложении (3.147) перед  $e_1 e_0$ ,  $\sqrt{e^2-1}$  изменить знаки.

Мы оставляем здесь разложение величин  $\cos nE$ ,  $\operatorname{ch} nu$ ,  $\operatorname{sh} nu$  в указанной форме. Их разложения по кратным  $u_0$  (в том случае, когда это целесообразно) получаются из формул (3.148) и (3.149), (3.122) и (3.123), если в них положить  $n = \pm 1$ .

Разлагать  $\sqrt{e^2-1}$  в ряд по степеням  $(e-e_0)$  нецелесообразно.

## § 12. Обзор полученных результатов

Основным результатом, полученным в III части настоящей работы, мы считаем вывод формул для общих членов не применявшихся ранее тейлоровских рядов по степеням приращения эксцентриситета  $(e-e_0)$  для главной части пертурбационной функции.

Эти ряды являются более общими, чем обычные маклореновские ряды по степеням эксцентриситета, которые получаются из наших рядов, если положить  $e_0 = 0$ . Эти обычные разложения пригодны, кроме того, только для  $e < 0.6627\dots$ , в то время как применяемые нами ряды Тейлора будут годиться (при надлежащем выборе  $e_0$ ) для любых  $e$  (кроме  $e=1$ ) в интервале от 0 до  $\infty$ , т. е., в частности, и для гиперболического движения. Кроме того, пользуясь произволом при выборе  $e_0$ , мы можем увеличивать быстроту сходимости наших разложений, выбрав  $e_0$  достаточно близким к  $e$ .

Как побочный результат этой части можно отметить рассмотрение свойств функций  $J_n^*(z, e)$  в случае, когда  $|e| > 1$ , и, в частности, тот факт, что для случая  $|e| > 1$  и  $E$  — чисто мнимого, мы получаем коэффициентами разложения величины  $\frac{1}{(1-e \cos E)^\alpha}$  по степеням  $z = e^{iE}$  два вида функций эксцентриситета  $J_n^*(z, e)$  и  $\bar{J}_n^*(z, e)$ , которые являются комплексными сопряженными функциями. Каждая из этих функций будет иметь ту же структуру, что и функция  $J_n^*(z, e)$  для случая  $|e| < 1$  и будет иррациональной функцией, а их сумма  $\bar{J}_n(z, e)$  будет рациональной функцией эксцентриситета, представляющей собой многочлен, расположенный по степеням  $\frac{1}{e}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- Еленевская Н. Б. 1949. О коэффициентах разложения координат невозмущенного движения в ряды Фурье по кратным эксцентрической аномалии. Уч. зап. Львовск. Гос. ун-в., **15**, 4.  
Еленевская Н. Б. 1952. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности, ч. I. Бюлл. ИТА, **5**, 2 (65).  
Еленевская Н. Б. 1953. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности, ч. II. Бюлл. ИТА, **5**, 5 (68).  
Моисеев Н. Д. 1936. Лекции по небесной механике. Литографированное издание МГУ.  
Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, **2**. ОНТИ.  
Tisserand F. 1889. Traité de mécanique céleste, **1**. Paris.

Поступило в Редакцию  
6 марта 1956 г.



# Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 7 (80)

## Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности

Часть IV. Разложение пертурбационной функции в пространственной ограниченной эллиптической задаче трех точек и в неограниченной задаче  $n$  точек

Н. Б. Еленевская

В настоящей IV части получено разложение по степеням эксцентриситета пертурбационной функции в случае так называемой ограниченной эллиптической задачи, когда возмущающее тело движется по невозмущенному эллипсу. Разложение проводится двумя методами: Ньюкомба и нашим, с применением специальных функций  $J_n^*(\alpha x)$ . Полученные разложения содержат наклонность под знаками тригонометрических функций.

Указывается путь получения аналогичных разложений в задаче  $n$ -тел.

ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IN EINE FOURIER-REIHE BEZÜGLICH DER NEIGUNG. IV Teil. ENTWICKLUNG DER STÖRUNGSFUNKTION IM RÄUMLICHEN EINGESCHRÄNKTELLIPTISCHEN DREIKÖRPERPROBLEM UND IM UNERSTRINGIERTEN  $n$ -KÖRPERPROBLEM. — Von N. B. Jelenewskaja. — In dem vorliegenden IV. Teil wird die Entwicklung der Störungsfunktion nach den Potenzen der Exzentrizität im räumlichen eingeschränkten, sog. elliptischen Dreikörperproblem für den Fall, wo störender Körper in ungestörter Bahn bewegt, gewonnen. Diese Entwicklung wurde nach zwei Methoden durchgeführt: nach der von Newcomb und der von uns vorgeschlagenen Methode unter Anwendung der Spezialfunktionen  $J_n^*(z, x)$ . Die Bahnneigung geht in die erhaltene Entwicklungen mittels der trigonometrischen Funktionen ein. Es wird das Ausführungsverfahren für Erhalten analoger Entwicklungen im  $n$ -Körperproblem angewiesen.

### Введение

В предыдущих частях настоящей работы нами было получено разложение пертурбационной функции в пространственной ограниченной круговой задаче трех точек. Благодаря тому, что по взаимной наклонности разложение велось в тригонометрический, а не в степенной ряд, были получены ряды, сходящиеся для любых значений наклонности, сравнительно простой структуры, так что мы получили возможность писать общие члены этих рядов, чего в классической небесной механике не делалось. Полученное разложение представляет собой кратный ряд по эксцентриситету и отношению больших полуосей, коэффициентами которого являются тригонометрические полиномы относительно величин: эксцентрической аномалии  $E$  (или средней аномалии  $M$ ), расстояния перигелия от узла  $\omega$ , величины  $\delta l_j = l_j - \delta l$ , где  $l_j$  — долгота возмущающей точки, а  $\delta l$  — расстояние перигелия оскулирующей орбиты от узла и взаимной наклонности орбит  $i$ .

В этой части работы мы хотим дать обобщение этого способа разложения пертурбационной функции на случай эллиптической ограниченной задачи трех точек, а затем — на случай неограниченной задачи  $n$  точек.

Для этого можно идти двумя путями. В первом случае, получив разложение в „дважды круговой“ задаче, т. е. когда эксцентриситеты возмущаемой и возмущающей точек  $e$  и  $e_j$  равны нулю, воспользоваться затем методом Ньюкома для получения разложений по степеням  $e$  и  $e_j$ . Во втором случае мы не полагаем предварительно

$e = e_j = 0$ , а получаем сразу разложение по некоторым функциям эксцентриситета [функции  $J_n^*(\alpha, e)$ ] и затем преобразовываем полученные ряды в степенные по  $e$  и  $e_j$ . Последний путь кажется нам более удобным, поэтому применение метода Ньюкома мы осветим очень кратко и остановимся более подробно на методе функции  $J_n^*(\alpha, e)$ . Насколько это оправдано, будет ясно из последующего изложения.

### § 1. Применение метода Ньюкома к разложению пертурбационной функции в эллиптической задаче трех точек

Разложения, полученные для „дважды круговой“ задачи трех точек, имеют вид:<sup>1</sup>

$$\left(\frac{a_j}{\Delta}\right)_{00} = \sum_{k=0}^{\infty} b_1^{(k)} \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \cos p\bar{M} \cos(q\bar{\Omega} + ri). \quad (4.1)$$

Здесь положено:  $\Delta$  — взаимное расстояние возмущаемой и возмущающей точек,  $b_1^{(k)}$  — коэффициенты Лапласа, нижний индекс которых равен единице,  $A_{pqr}^{(k)}$  — некоторые численные коэффициенты:

$$\bar{M} = M + \omega, \quad \bar{\Omega} = l_j - \Omega.$$

Применим к разложению (4.1) метод Ньюкома в его классической форме, описанной в части I (Еленевская, 1952), а также в работах (Субботин, 1937) и (Newcomb, 1895), где  $r$  — радиус-вектор возмущаемой точки,  $r'$  — радиус вектор возмущающей точки,  $v$  и  $v_j$  — истинные аномалии.

Если выбрать оси координат так, чтобы ось  $x$  была направлена к перигелию орбиты возмущающей точки (будем в дальнейшем называть ее для простоты Юпитером), то  $v_j = l_j$ . Тогда

$$\frac{a_j}{\Delta} = F(\ln a + \varphi, \ln a_j + \varphi_j, M + f, M_j + f_j), \quad (4.2)$$

где

$$f = v - M, \quad f_j = l_j - M_j; \quad \varphi = \ln(1 - e \cos E), \quad \varphi_j = \ln(1 - e_j \cos E_j).$$

$e, e_j, E, E_j$  суть эксцентриситеты и эксцентрические аномалии возмущаемой точки и Юпитера.

Разлагая функции (4.2) в ряд Тейлора по степеням малых величин  $f, f_j, \varphi, \varphi_j$ , получим, пользуясь символической записью, ряд вида:

$$\frac{a_j}{\Delta} = E^{(\varphi + \varphi_j + f + f_j)} F(\ln a, \ln a_j, M, M_j). \quad (4.3)$$

Через  $E$  здесь, как везде, обозначено основание натуральных логарифмов.

Выражение (4.3) можно иначе записать в виде:

$$\frac{a_j}{\Delta} = E^{(\varphi + \varphi_j + f + f_j)} E^{(\varphi_j + f_j)} F(\ln a, \ln a_j, M, M_j). \quad (4.4)$$

Т. е. мы сначала символически умножаем функцию  $F$  на первый множитель, а затем так же символически умножаем результат на второй множитель. Результат первого умножения получен нами в I части этой работы в форме:

$$\left(\frac{a_j}{\Delta}\right)_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{-n} \sum_{p, q, r=-k}^k e^n p_m^n A_{pqr}(k) \cos[(p + m)M + p\omega + q\bar{\Omega} + ri], \quad (4.5)$$

<sup>1</sup> „Дважды круговой“ мы называем такую задачу трех точек, когда эксцентриситеты орбит возмущаемой и возмущающей точек положены равными нулю (Еленевская, 1952).

где  $p_m^n$  есть результат операции, обозначенной символом  $\Pi_m^n$  над коэффициентами Лапласа  $b_1^{(k)}$ , а  $\Pi_m^n$  есть в свою очередь символические полиномы, названные операторами Ньюкома.<sup>1</sup>  $\bar{\partial} = l_j - \partial$  [в данном случае  $l_j = n_j(t - t_0) = M_j$ ]. Разложение (4.5) можно записать в форме:

$$\left(\frac{a_j}{\Delta}\right)_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=-k}^k \lambda_1^q H'_{k,q}(p, r), \quad (4.6)$$

где  $\lambda_1 = E^{i\bar{\partial}}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $H'_{k,q}(p, r)$  — голоморфная функция всех аргументов, кроме  $\bar{\partial}$ .

Умножим символически правую часть уравнения (4.6) на второй множитель в выражении (4.4). Обозначим через  $K_0^1$  выражение

$$R_0^1 = \sum_{s=0}^k \lambda_1^s H_{s,q}(p, r), \quad (4.7)$$

где  $s$  — некоторое фиксированное значение  $k$ . Пусть  $R_0^{1,0}$  — общий член ряда (4.7)

$$R_0^{1,0} = \lambda_1^0 H_{s,\beta}(p, r). \quad (4.8)$$

Умножая символически  $K_0^{1,0}$  на  $E^{(\rho_j l_j + f_j l_j')}$ , получим:

$$E^{(\rho_j l_j + f_j l_j')} K_0^{1,0} = E^{(\rho_j l_j + \sqrt{-1} f_j)} R_0^{1,0}, \quad (4.9)$$

так как

$$D'_j = \frac{\partial}{\partial \bar{\partial}} = \sqrt{-1} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1}.$$

Положим  $\mu_1 = E^{\sqrt{-1} l_j}$ . Заменяя теперь в известных разложениях уравнения центра  $l_j - M_j = f_j$  и  $\rho_j = \ln \frac{r'}{a_j}$ , синусы и косинусы  $M_j$  их выражениями через  $\mu_1$ , получим разложения этих величин по степеням  $\mu_1$ . Подставим затем полученные значения  $f_j$  и  $\rho_j$  в функцию  $E^{(\rho_j l_j + \sqrt{-1} f_j)}$  и разложим эту функцию по степеням  $e_j$  с неопределенными коэффициентами. Приравнявая затем коэффициенты в правых и левых частях, получим значение этих коэффициентов в виде символических полиномов  $\Pi_{0,m'}^{0,n'}$ .

Итак, член разложения (4.8), содержащий множителем  $l_j^{m'}$ , будет иметь вид:

$$R_{0n_1}^{1,0} = e_j^{n'} \sum_{m'=-n'}^{-n'} \Pi_{0,m'}^{0,n'} H_{s,\beta} \lambda_1^{\beta} \mu_1^{m'}. \quad (4.10)$$

Суммируя по  $e_j$  от 0 до  $\infty$ , получим:

$$\frac{a_j}{\Delta} = \sum_{n'=0}^{\infty} e_j^{n'} \sum_{m'=-n'}^{-n'} \Pi_{0,m'}^{0,n'} H_{s,\beta} \lambda_1^{\beta} \mu_1^{m'}. \quad (4.11)$$

Подставляя в разложение (4.11) значение  $H_{s,\beta}$  из формулы (4.5), получим:

$$\frac{a_j}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{-n} \sum_{m'=-n'}^{-n'} \sum_{p,q,r=-k} e^{n+n'} \Pi_{mm'}^{nn'} A_{pqr}^{(k)} \lambda_{11}^q \mu_1^{m'} \cos[(p+m)M + p\omega + ri] =$$

<sup>1</sup> См. (Субботин, 1937; Newcomb, 1895).

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{-n} \sum_{m'=n'}^{-n'} \sum_{p,q,r=-k}^k e^{n+n'} \Pi_{mm'}^{nn'} A_{pqr}^{(k)} \cos q(l_j - \Omega) \cos m'l_j \cdot \cos[(p+m)M + p\omega + ri] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{-n} \sum_{m'=n'}^{-n'} \sum_{p,q,r=-k}^k e^{n+n'} \Pi_{mm'}^{nn'} A_{pqr}^{(k)} \cos[(p+m)M + (q+m')M_j + p\omega - q\delta + ri].
\end{aligned}$$

Здесь через  $\Pi_{mm'}^{nn'}$  обозначен результат действия на исходный коэффициент  $b_1^{(k)}$  сначала оператора  $\Pi_{mn}^n$ , а затем оператора  $\Pi_{0m'}^{0n'}$ .

Вычисление операторов  $\Pi_{mm'}^{nn'}$  подробно рассмотрено в монографии Б. А. Орлова (1936).

К недостаткам этого способа разложения нужно отнести прежде всего невозможность написания общего члена, потому что мы не знаем общих членов для операторов Ньюкома  $\Pi_{mm'}^{nn'}$ .

Работа Б. А. Орлова была написана в 1936 г., а в то время еще не была известна структура общих членов в разложениях уравнения центра  $f$  и  $\ln \frac{r}{a}$ , откуда следует невозможность получения общих членов и в операторах Ньюкома.

Общие члены упомянутых разложений получены нами в работах (Еленевская, 1949, 1953).

## § 2. Разложение пертурбационной функции в эллиптической задаче трех точек по функциям $J_n^*(\alpha, e_j)^1$

Возьмем пертурбационную функцию пространственной ограниченной задачи трех точек в конечном виде:

$$R = k^2 m \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos \theta}{(r')^2} \right].$$

Здесь  $\Delta$  — взаимное расстояние возмущаемой и возмущающей точек,  $r$  и  $r'$  — радиусы-векторы этих точек и  $\theta$  — угол между ними.

Главная часть пертурбационной функции в этом случае определяется формулой:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}, \\ \cos \theta &= \cos(v + \omega) \cos(v_j - \Omega) + \sin(v + \omega) \sin(v_j - \Omega) \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Для пространственной круговой ограниченной задачи трех точек, когда  $r_j = a_j$ , нами было получено в части II разложение:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_n(e) + \Phi_n(e)] \cos(nE + p\omega + p\delta + ri), \quad (4.14)$$

где  $F_n(e)$  и  $\Phi_n(e)$  некоторые функции эксцентриситета  $e$ , являющиеся линейными комбинациями функций  $J_n^*(\alpha, e)$ .<sup>2</sup> Рассмотрим теперь разложение функции (4.13) в

<sup>1</sup> Подробно о функциях  $J_n^*(\alpha, e)$  сказано в работах (Еленевская, 1949, 1953)

<sup>2</sup> См. § 5, формула (2.53) и § 6, формула (2.67) (Еленевская, 1953).

эллиптической задаче. Ограничимся случаем, когда отношение  $\frac{r}{r'}$  или  $\frac{r'}{r}$  все время меньше единицы, и обозначим это отношение через  $\bar{r}$ . Тогда  $\frac{1}{\Delta}$  можно написать в виде:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} (1 - 2\bar{r} \cos \theta + \bar{r}^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.15)$$

В данном случае  $\bar{r} = \frac{r'}{r}$  (внешний вариант). Величина, стоящая в скобках в правой части формулы (4.15) будет четной непрерывной периодической функцией  $\theta$ , удовлетворяющей условиям Дирихле. Разлагая ее в ряд Фурье, получим

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_1^{(k)} \cos k\theta. \quad (4.16)$$

$B_1^{(k)}$  суть однородные функции нулевой степени относительно  $\bar{r}$ , обращающиеся в известные коэффициенты Лапласа, когда  $r = a$ ,  $r' = a_j$ . Функции  $B_1^{(k)}$  определяются известными формулами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} B_1^{(k)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2l)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \bar{r}^{k+2l} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2l)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left(\frac{a_j}{a}\right)^{k+2l} \left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E}\right)^{k+2l}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{2} B_1^{(0)} = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \right)^2 \left(\frac{a_j}{a}\right)^{2l} \left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E}\right)^{2l}. \quad (4.18)$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} b_{1,l}^{(k)} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k+2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k+2l)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \left(\frac{a_j}{a}\right)^{k+2l}, \\ b_{1,l}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2l} \right]^2 \cdot \left(\frac{a_j}{a}\right)^{2l}, \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

получим

$$\frac{1}{2} B_1^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E}\right)^{k+2l}.$$

Разложение  $\frac{1}{\Delta}$  теперь примет вид:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \cos k\theta \left(\frac{1 - e_j \cos E_j}{1 - e \cos E}\right)^{k+2l}. \quad (4.20)$$

Как показано в части II данной работы, разложение величины  $\frac{\cos k\theta}{(1 - e \cos E)^{k+2l}}$  может быть получено в виде:

$$\frac{\cos k\theta}{(1 - e \cos E)^{k+2l}} = \sum_{p, r, r=-k}^k A_{p,l}^{(k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(e) \cos(nE + p\omega + q\bar{\omega} + ri). \quad (4.21)$$

Здесь  $\Psi_n(e) = F_n(e) + \Phi_n(e)$ . Подставляя разложение (4.21) в выражение главной части пертурбационной функции  $\frac{1}{\Delta}$  (4.20), получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta} &= \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(e) \cos(nE + p\omega + q\bar{\delta} + ri) (1 - e_j \cos E_j)^{k+2l} = \\
&= \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(e) [\cos qv_j \cos(nE + p\omega - q\delta + ri) - \\
&\quad - \sin qv_j \sin(nE + p\omega - q\delta + ri)] (1 - e_j \cos E_j)^{k+2l}.
\end{aligned} \quad (4.22)$$

Выразим величины  $\cos qv_j$  и  $\sin qv_j$  по формулам Эйлера через степени. Мы получим

$$\left. \begin{aligned} \cos qv_j &= \sum_{m'=0}^{z_1} (-1)^{m'} \frac{2^{q-2m'-1} q(q-m'-1)(q-m'-2) \dots (q-2m'+1)}{m'!} \cos^{q-2m'} v_j, \\ \sin qv_j &= \sum_{m'=0}^{z_2} (-1)^{m'} \frac{2^{q-2m'-1} (q-m'-1)(q-m'-2) \dots (q-2m')}{m'!} \cos^{q-2m'} v_j \sin v_j, \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{q}{2} \quad \text{или} \quad z_1 = \frac{q-1}{2}, \\ z_2 &= \frac{q-2}{2} \quad \text{или} \quad z_2 = \frac{q-1}{2}, \end{aligned}$$

в зависимости от того, какое из этих чисел будет целым.

По формулам невозмущенного движения

$$\cos^{q-2m'} v_j = \left( \frac{\cos E_j - e_j}{1 - e_j \cos E_j} \right)^{q-2m'} : \quad \cos^{q-2m'-1} v_j \sin v_j = \sqrt{1 - e^2} \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m'-1}}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m'}} \sin nE_j.$$

Мы будем здесь поступать так же, как это было сделано во II части. Поэтому нам сейчас необходимо разложить в ряд Фурье величины

$$f(e_j) = \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m'}}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m'-x+1}} \quad (4.24)$$

и

$$\varphi(e_j) = \sqrt{1 - e^2} \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m'-1} \sin E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m'-x+1}}, \quad (4.25)$$

где  $x = k + 2l + 1$ . Отличие от разложений аналогичных функций в круговой задаче будет состоять только в том, что величина  $x' = q - m - x + 1$  в данном случае будет отрицательной, и потому в функциях  $J_{n'}^*(x', e_j)$  аргумент  $x'$  будет отрицательный. Как показано в части II, функции  $J_n^*(x, e)$  от отрицательного аргумента  $x'$  представляют собой не бесконечные ряды, а полиномы.

Итак, разложим функции (4.24) и (4.25) в ряды Фурье. Начнем с функции (4.25)

$$f'(e_j) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} G_{n'}(q, m', x, e_j) \cos n'E_j. \quad (4.26)$$

$G_{n'}(q, m', x, e_j)$  как коэффициенты Фурье определяются формулой:

$$G_{n'}(q, m', x, e_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m'} \cos n'E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m'-x+1}} dE_j. \quad (4.27)$$

Разложим предварительно величины  $(\cos E_j - e_j)^{q-2m'}$  на элементарные дроби. Мы получим

$$(\cos E_j - e_j)^{q-2m'} = \sum_{s=0}^{q-2m'} (-1)^s \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-s+1)}{s! e_j^{q-2m'}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s}. \quad (4.28)$$

Подставляя формулу (4.28) в (4.27), получим

$$\begin{aligned} G_{n'}(q, m', x, e_j) &= \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{q-2m'} (-1)^s \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-s+1)}{s! e_j^{q-2m'}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s} \int_0^\pi \frac{\cos n'E_j dE_j}{(1 - e_j \cos E_j)^i} = \\ &= \sum_{s=0}^{q-2m'} (-1)^s \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-s+1)}{s! e_j^{q-2m'}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s} J_{n'}^*(\gamma, e_j) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\gamma = q - 2m' - x - s + 1.$$

Аналогично получим разложения для величин

$$\frac{(\cos E_j - e_j)^{q-2m'-1} \sin E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{q-2m'-x+1}} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} H_{n'}(e_j) \sin n'E_j, \quad (4.30)$$

где

$$\begin{aligned} H_{n'}(q, m', x, e_j) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=0}^{q-2m'-1} (-1)^s \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-s)}{s! e_j^{q-2m'-1}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s-1} \int_0^{2\pi} \frac{\sin E_j \sin n'E_j dE_j}{(1 - e_j \cos E_j)^i} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=0}^{q-2m'-1} (-1)^s \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-s)}{s! e_j^{q-2m'-1}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s-1} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(\cos(n'-1)E_j - \cos(n'+1)E_j) dE_j}{(1 - e_j \cos E_j)^i} = \\ &= \sum_{s=0}^{q-2m'-1} (-1)^s \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-s)}{s! e_j^{q-2m'-1}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s-1} \frac{1}{2} [J_{n'-1}^*(\gamma, e_j) - J_{n'+1}^*(\gamma, e_j)]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями между функциями  $J_{n'}^*(\gamma, e_j)$ , получим

$$H_{n'} = \sum_{s=0}^{q-2m'-1} (-1)^s \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-s)}{s! e_j^{q-2m'-1} (q-2m'-x-j)} J_{n'}^*(\gamma+1, e_j). \quad (4.32)$$

Подставляя теперь разложения (4.26) с коэффициентами (4.29) и (4.30) с коэффициентами (4.32) сначала в формулы (4.23), а затем в (4.22), получим

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(p, z, e) \cdot \sum_{n'=-\infty}^{\infty} [F_{n'}(q, -x+1, e_j) \times \cos n'E_j \cdot \cos(nE + p\omega - q\delta\zeta + ri) - \Phi_{n'}(q, -x+1, e_j) \sin n'E_j \sin(nE + p\omega - q\delta\zeta + ri)], \quad (4.33)$$

где

$$\begin{aligned} F_{n'}(q, -x+1, e_j) &= \sum_{m'=0}^{x_1} (-1)^{m'} \frac{2^{q-2m'-1} q(q-m'-1)(q-m'-2)\dots(q-2m'+1)}{m'!} \times \\ &\times \sum_{s=0}^{q-2m'} (-1)^s \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-s+1)}{s! e_j^{q-2m'}} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s} J_{n'}^*(q-2m'-x-s+1, e_j), \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\Phi_{n'}(q, -\kappa + 1, e_j) = \sqrt{1 - e_j^2} \cdot \sum_{m'=0}^{\kappa} (-1)^{m'} \frac{2^{q-2m'-1} (q-m'-1)(q-m'-2)\dots(q-2m')}{m'!} \times \\ \times \sum_{s=0}^{q-2m'-1} (-1)^s \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-s)}{s! e_j^{q-2m'} (q-2m'-\kappa-s)} (1 - e_j^2)^{q-2m'-s-1} J_{n'}^*(q-2m'-\kappa-s, e_j).$$

Преобразовывая в выражении (4.33) произведения синусов и косинусов в разность и сумму косинусов и замечая, что  $\Phi_{n'} = -\Phi_{-n'}$ , а  $F_{n'} = F_{-n'}$ , получим окончательное разложение  $\frac{1}{\Delta}$  по функциям  $J_n^*(\kappa, e)$  в виде

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{p,q,r}^{(k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \Psi_n(p, \kappa, e) \cdot \Psi_{n'}(q, -\kappa + 1, e_j) \times \\ \times \cos(nE + n'E_j + p\omega - q\delta + ri). \quad (4.35)$$

Мы получили разложения для внешнего варианта. В случае внутреннего варианта отличие будет состоять только в том, что функции  $\Psi_n(p, \kappa, e)$  и  $\Psi_{n'}(q, -\kappa + 1, e_j)$  поменяются местами, т. е. мы будем иметь  $\Psi_n(p, -\kappa + 1, e)$  и  $\Psi_{n'}(q, \kappa, e_j)$ .

Чтобы получить теперь разложение  $\frac{1}{\Delta}$  по кратным средней аномалии  $M$ , достаточно подставить в ряд (2.23) выражения  $\cos nE$  и  $\cos n'E_j$  через косинусы  $M$  и  $M_j$  по формулам:

$$\cos nE = n \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_{n-s}(se) \frac{\cos sM}{s}, \quad (4.36)$$

где  $J_{n-s}(se)$  суть функции Бесселя от аргумента  $se$ .

Мы получили, таким образом, разложения главной части пертурбационной функции в пространственной и ограниченной эллиптической задаче трех точек. Что касается дополнительной части пертурбационной функции, то ее влияние учитывается точно так же, как в круговой задаче, разобранный в части II, поэтому здесь мы на этом останавливаться не будем.

### § 3. Разложение главной части пертурбационной функции в пространственной ограниченной эллиптической задаче трех точек по степеням эксцентриситетов

В части II было показано, что, перегруппировав члены в разложениях величин  $\frac{\cos p\nu}{(1-e \cos E)^{\kappa}}$  и  $\frac{\sin p\nu}{(1-e \cos E)^{\kappa}}$ , мы можем представить эти разложения в виде степенных рядов по эксцентриситету с коэффициентами — тригонометрическими полиномами относительно  $\cos nE$  и  $\sin nE$ . Эти разложения будут иметь вид:

$$\frac{\cos p\nu}{(1-e \cos E)^{\kappa}} = \sum_{s=0}^{\infty} e^s \sum_{n=p+s}^{p-s} C_s(n, p, \kappa) \cos nE. \\ \frac{\sin p\nu}{(1-e \cos E)^{\kappa}} = \sum_{s=0}^{\infty} e^s \sum_{n=p+s}^{p-s} \bar{C}_s(n, p, \kappa) \sin nE. * \\ \kappa = k + 2l + 1. \quad (4.37)$$

\* См. часть II (Еленевская, 1953) : § 9, формулы (2.95), (2.97), (2.98); § 10, формулы (2.99), (2.100).



Совершенно аналогично мы можем поступить с величинами

$$\frac{\cos qv_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{-x+1}}, \quad \frac{\sin qv_j}{(1 - e_j \cos E_j)^{-x+1}}. \quad (4.38)$$

Однако в этом случае мы будем иметь принципиальное различие. Дело в том, что величина  $(1 - e_j \cos E_j)$  стоит в знаменателе в отрицательной степени, поэтому аргумент, входящий в функции  $J_{n'}^*(\alpha, e_j)$  этих разложений, будет отрицательным. В этом случае функции  $J_{n'}^*(\alpha, e_j)$  вырождаются в полиномы. Напомним выражения для этих функций при помощи рядов.

$$J_n^*(\alpha, x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n+2v-1)}{(n+v)! v!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2v},$$

$$J_n^*(-x, x) = \sum_{v=0}^{\bar{v}} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n-2v+1)}{(n+v)! v!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2v}, \quad (4.39)$$

где  $v = \frac{x-n}{2}$  или  $\bar{v} = \frac{\alpha-n-1}{2}$  в зависимости от того, какое из этих двух чисел будет целым.

Для получения коэффициентов разложений величин (4.38) по степеням эксцентриситета „Юпитера“  $e_j$ , разложим по степеням  $e_j$  функции  $F_{n'}(q, -x+1, e_j)$  и  $\Phi_{n'}(q, -x+1, e_j)$ . Как было показано в предыдущем параграфе,

$$\left. \begin{aligned} F_{n'}(q, -x+1, e_j) &= \sum_{m'=0}^{x_1} (-1)^{m'} \frac{2^{q-2m'-1} q(q-m'-1)(q-m'-2) \dots (q-2m'+1)}{m'!} G_{n'}(q, m', x, e_j), \\ \Phi_{n'}(q, -x+1, e_j) &= \sum_{m'=0}^{x_2} (-1)^{m'} \frac{2^{q-2m'-1} (q-m'-1)(q-m'-2) \dots (q-2m'+1)}{m'!} H_{n'}(q, m', x, e_j), \\ x_1 &= \frac{q}{2} \text{ или } x_1 = \frac{q-1}{2}, \quad x_2 = \frac{q-1}{2} \text{ или } x_2 = \frac{q-2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

где коэффициенты  $G_{n'}$  и  $H_{n'}$  определяются формулами (4.29) и (4.32).

Разложим по степеням  $e_j$  сначала величину  $G_{n'}$ .

Развернем сумму в формуле (4.29) и одновременно возведем  $(1 - e_j^2)$  в соответствующие степени. Мы получим:

$$\begin{aligned} G_{n'} &= \frac{1}{e_j^{q-2m'}} \left\{ J_{n'}^*(q-2m'-x+1, e_j) \left[ 1 - (q-2m')e_j^2 + \frac{(q-2m')(q-2m'-1)}{2!} e_j^4 - \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \dots (-1)^{q-2m'} e_j^{2q-4m'} \right] - (q-2m') J_{n'}^*(q-2m'-x, e_j) \left[ 1 - (q-2m'-1)e_j^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)}{2!} e_j^4 - \dots (-1)^{q-2m'-1} e_j^{2q-4m'-2} \right] + \\ &\quad + \dots + (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} J_{n'}^*(q-2m'-x-r+1, e_j) \left[ 1 - (q-2m'-r)e_j^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(q-2m'-r-1)(q-2m'-r-2)}{2!} e_j^4 - \dots + (-1)^{q-r} e_j^{2q-4m'-2r} \right] + \dots \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{q-2m'} J_{n'}^*(-x+1, e_j) \right\}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Подставим теперь в формулу (4.41) разложение (4.39). Выберем затем первые члены из функции  $J_{n'}^*(x, e_j)$ , умноженные на первые члены, стоящие в квадратных скобках формулы (4.41), получим коэффициент при  $e_j^{n'-q+2m'}$ . Затем возьмем первые члены в  $J_{n'}^*(x, e)$ , умноженные на второй член в квадратных скобках и вторые члены  $J_{n'}^*(x, e)$ , умноженные на первые члены в квадратных скобках, получим коэффициент при  $e_j^{n'-q+2m'+2}$ , и т. д.

Мы получим:

$$\begin{aligned}
 G_{n'} = & \frac{(-1)^{n'} e_j^{n'-q+2m'}}{2^{n'}} \left\{ \sum_{r=0}^{q-2m'} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} \times \right. \\
 & \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n')}{n!} + \\
 & + e_j^2 \left[ \sum_{r=0}^{q-2m'} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} \times \right. \\
 & \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n'-2)}{(n'+1)! 2^2} - \\
 & - (q-2m') \sum_{r=0}^{q-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2) \dots (q-2m'-r)}{r!} \times \\
 & \times \left. \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n')}{n!} \right] + \\
 & + e_j^4 \left[ \sum_{r=0}^{q-2m'} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} \times \right. \\
 & \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n'-4)}{(n'+2)! 2! 2^4} - \\
 & - (q-2m') \sum_{r=0}^{q-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2) \dots (q-2m'-r)}{r!} \times \\
 & \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n'-2)}{(n'+1)! 2^2} + \\
 & + \frac{(q-2m')(q-2m'-1)}{2!} \sum_{r=0}^{q-2m'-2} (-1)^r \frac{(q-2m'-2)(q-2m'-3) \dots (q-2m'-r-1)}{r!} \times \\
 & \times \left. \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2) \dots (x-q+2m'+r-n')}{n!} \right] + \\
 & + \dots + \\
 & + e_j^{2\alpha} \left[ \sum_{r=0}^{q-2m'} (-1)^r \frac{(q-2m')(q-2m'-1) \dots (q-2m'-r+1)}{r!} \times \right.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-n'-2\sigma)}{(n+\sigma)!\sigma!2^{2\sigma}} - \\
& - (q-2m') \sum_{r=0}^{q-2m'-1} (-1)^r \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-r)}{r!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-n'-2\sigma+2)}{(n+\sigma-1)!(\sigma-1)!2^{2\sigma-2}} + \\
& + \dots + \\
& + (-1)^\lambda \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-\lambda+1)}{\lambda!} \sum_{r=0}^{q-2m'-\lambda} (-1)^r \frac{(q-2m'-\lambda)(q-2m'-\lambda-1)\dots(q-2m'-\lambda-r+1)}{r!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-2\sigma+2\lambda-n')}{(n'+\sigma-\lambda)!(\sigma-\lambda)!2^{2\sigma-2\lambda}} + \\
& + (-1)^\sigma \sum_{r=0}^{q-2m'-\sigma} (-1)^r \frac{(q-2m'-\sigma)(q-2m'-\sigma-1)\dots(q-2m'-\sigma+1)}{r!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-n')}{n!} \Big] + \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Суммирование ведется до некоторой величины  $\bar{\sigma}$ , причем  $\bar{\sigma} = q - 2m'$ , если  $2q - 4m' \geq x$   
и  $\bar{\sigma} = \frac{x+q-2m'-n'-1}{2}$  или  $\bar{\sigma} = \frac{x+q-2m'-n'}{2}$ , если  $2q - 4m' < x$ .

Как легко показать

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{q-2m'-\lambda} (-1)^r \frac{(q-2m'-\lambda)(q-2m'-\lambda+1)\dots(q-2m'-\lambda-r+1)}{r!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'+r-1)(x-q+2m'+r-2)\dots(x-q+2m'+r-2\sigma+2\lambda-n')}{(n'+\sigma-\lambda)!(\sigma-\lambda)!2^{2\sigma-2\lambda}} = \\
& = (-1)^{q-2m'-\lambda} \frac{(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2)\dots(x-n'-2\sigma+\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda-1)\dots(n'+2\sigma-q+2m'-\lambda+1)}{(n'+\sigma-\lambda)!(\sigma-\lambda)!2^{2\sigma-2\lambda}}. \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Поэтому  $G_{n'}(q, m', x, e_j)$  можно записать в виде:

$$G_{n'} = \sum_{\sigma=0}^{\bar{\sigma}} e^{n'+2\sigma-q+2m'} K_{\sigma}^{(n')}(q, m', x), \quad (4.44)$$

где

$$\begin{aligned}
K_{\sigma}^{(n')}(q, m', x) = & \sum_{\lambda=0}^{\sigma} (-1)^{\lambda} \frac{(q-2m')(q-2m'-1)\dots(q-2m'-\lambda+1)}{\lambda!} \times \\
& \times \frac{(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2)\dots(x-n'-2\sigma+\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda)(n'+2\sigma-2\lambda-1)\dots(n'+2\sigma-q+2m'-\lambda+1)}{(n'+\sigma-\lambda)!(\sigma-\lambda)!2^{2\sigma-2\lambda}}. \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Положим теперь  $n' + 2\sigma - q + 2m' = s'$ . Очевидно, что  $s'$  не может принимать отрицательных значений. Обозначим через  $C_{s'}(n', q, -x + 1)$  величину:

$$C_{s'}(n', q, -x + 1) = \sum_{m'=0}^{x_1} (-1)^{m'} \frac{2^{q-2m'} q (q-2m') (q-2m'-1) \dots (q-2m'+1)}{m'!} \times$$

$$\times \sum_{\lambda=0}^{\bar{\lambda}} (-1)^{\lambda} \frac{(q-2m') (q-2m'-1) \dots (q-2m'-\lambda+1)}{\lambda!} \times$$

$$\times \frac{(x-q+2m'-1) (x-q+2m'-2) \dots (x-s'-q+2m'+\lambda)}{\left(\frac{n'+s'+q-2m'-2\lambda}{2}\right)! \left(\frac{s'-n'+q-2m'-2\lambda}{2}\right)!} \times$$

$$\times \frac{(s+q-2m'-2\lambda) (s+q-2m'-2\lambda-1) \dots (s-\lambda+1)}{2^{s+q-2m'-2\lambda+1}}. \quad (4.46)$$

Легко доказать, совершенно так же как и в части II, что все коэффициенты  $C_{s'}(n', q, -x + 1)$  обращаются в нуль, если  $n \neq q + s' - 2j$ , где  $j = 0, 1, 2 \dots s$ . Так, например:

$$C_0(q, q, -x + 1) = \frac{1}{2}, \quad C_0(\beta, q, -x + 1) = 0, \quad \beta \neq q,$$

$$C_1(q+1, q, -x + 1) = -\frac{1}{2}(x-q-1), \quad C_1(q-1, q, -x + 1) = -\frac{1}{2}(x+q-1),$$

$$C_1(\gamma, q, -x + 1) = 0, \quad \gamma \neq q+1, \gamma \neq q-1.$$

И вообще

$$C_{s'}(q+s'-2j, q, -x + 1) = \sum_{m'=0}^j (-1)^{m'} \frac{q (q-m'-1) (q-m'-2) \dots (q-2m'+1)}{m'!} \times$$

$$\times \sum_{\lambda=0}^{j-m'} (-1)^{\lambda} \frac{(q-2m') (q-2m'-1) \dots (q-2m'-\lambda+1) \cdot (x-q+2m'-1) (x-q+2m'-2) \dots (x-q+2m'-\lambda+s')}{\lambda! (q+s'-m'-\lambda-j)! (j-m'-\lambda)!} \times$$

$$\times \frac{(s'+q-2m'-2\lambda) (s'+q-2m'-2\lambda-1) \dots (s'-\lambda+1)}{2^{s'-2\lambda+1}}. \quad (4.47)$$

Таким образом, разложение величины  $\frac{\cos qvj}{(1-e_j \cos E_j)^{x+1}}$  будет иметь вид:

$$\frac{\cos qvj}{(1-e_j \cos E_j)^{-x+1}} = \sum_{s'=0}^{\bar{s}'} e_j^{s'} \sum_{n'=q+s'}^{q-s'} C_{s'} \cos n'E_j. \quad (4.48)$$

Поступая аналогично с величинами  $\frac{\sin qvj}{(1-e_j \cos E_j)^{-x+1}}$ , мы получим их разложения в виде:

$$\frac{\sin qvj}{(1-e_j \cos E_j)^{-x+1}} = \sqrt{1-e_j^2} \sum_{s'=0}^{\bar{s}'} e_j^{s'} \sum_{n'=q+s'}^{q-s'} C'_{s'} \sin n'E_j, \quad (4.49)$$

где коэффициенты  $C'_{s'}$  определяются формулой:

$$C'_{s'}(q+s'-2j, q, -x + 1) = \sum_{m'=0}^{j_2} (-1)^{m'} \frac{(q-m'-1) (q-m'-2) \dots (q-2m')}{m'!} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{\lambda=0}^{j-m'} (-1)^{m'} \frac{(q-2m'-1)(q-2m'-2)\dots(q-2m'-\lambda)}{m'!} \times \\ & \times \frac{(x-q+2m'-1)(x-q+2m'-2)\dots(x-q+2m'-s'+\lambda)}{2^{s'-2\lambda+1}} \times \\ & \times \frac{(s'+q-2m'-\lambda-1)(s'+q-2m'-\lambda-2)\dots(s'-\lambda+1)}{(q+s'-m'-\lambda-j)!(j-m'-\lambda)!}, \quad \bar{s}' = x-1. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Подставляя, наконец, разложения (4.48), (4.49) и (4.37) в формулу (4.35), получим разложение главной части пертурбационной функции  $\frac{1}{\Delta}$  в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = & \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{s'=0}^{\bar{s}'} e^s e^{s'} \sum_{n=p+s}^{p-s} \sum_{n'=q+s'}^{q-s'} [C_s(n, p, x) + C'_s(n, p, x) \sqrt{1-e^2}] \times \\ & \times [C_{s'}(n', q, -x+1) + \sqrt{1-e_j^2} C'_{s'}(n', q, -x+1)] \cos(nE + n'E_j + p\omega - q\Omega + ri). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Особенностью такого разложения пертурбационной функции является прежде всего то, что коэффициентами при соответствующих степенях эксцентриситетов и отношений полуосей будут тригонометрические полиномы. Этот результат мы уже получили при разложении пертурбационной функции в круговой задаче. Для эллиптической же задачи интересно отметить еще одну особенность, а именно то, что и по эксцентриситету возмущающей точки  $e_j$  тоже получается не бесконечный ряд, а многочлен, если оставить  $\frac{1}{\Delta}$  в формуле (4.51), т. е. не разлагать в ряд  $\sqrt{1-e_j^2}$ .

Как было указано в работе (Еленевская, 1952), данное разложение особенно удобно для спутниковых задач, когда отношение  $\frac{a}{a_j}$  мало. В эллиптической задаче такое разложение позволит учесть все неравенства, зависящие от эксцентриситета возмущающего тела, например эксцентриситета солнечной (или, что то же, земной) орбиты в теории Луны.

Именно поэтому нами и оставлен неразложенным  $\sqrt{1-e_j^2}$  в формуле (4.51), в то время как  $\sqrt{1-e^2}$  удобнее разложить, потому что по  $e$  мы получаем бесконечный ряд независимо от этого корня. Для случая внутреннего варианта будет как раз наоборот: мы будем иметь бесконечный ряд по  $e_j$  и многочлен по  $e$ , и коэффициенты  $c_s, \bar{c}_s, c_{s'}$  и  $\bar{c}_{s'}$  поменяются местами. Разложение  $\frac{1}{\Delta}$  в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = & \frac{2}{a_j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{s=0}^{x-1} \sum_{s'=0}^{\infty} e^s e^{s'} \sum_{n=p+s}^{p-s} \sum_{n'=q+s'}^{q-s'} [c_s(n, p, -x+1) + \\ & + \sqrt{1-e^2} c'_s(n, p, -x+1)] \cdot [c_{s'}(n', q, x) + \\ & + \sqrt{1-e_j^2} c'_{s'}(n', q, x)] \cos(nE + n'E_j + p\omega - q\Omega + ri). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Именно поэтому нам кажется, что разложение пертурбационной функции при помощи функций  $J_n^*(z, e)$  удобнее, чем при помощи метода Ньюкома. Кроме того, вычисление коэффициентов  $c_s$  значительно проще вычисления операторов Ньюкома, и, наконец, здесь мы имеем возможность писать общий член разложения.

#### § 4. Разложение дополнительной части пертурбационной функции

Разложение дополнительной части, как и всегда, производится достаточно элементарно. В самом деле, мы имеем формулу:

$$R_1 = \frac{r \cos \theta}{(r')^2} = \frac{a}{a_j^2} \frac{(1 - e \cos E)}{(1 - e_j \cos E_j)^2} \quad (4.53)$$

или:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r \cos \theta}{(r')^2} = \frac{a}{a_j^2} [\cos(v + \omega) \cos(v_j - \varnothing) + \sin(v + \omega) \sin(v_j - \varnothing) \cos i] \frac{(1 - e \cos E)}{(1 - e_j \cos E_j)^2} = \\ &= \frac{a}{a_j^2} \frac{(1 - e \cos E)}{(1 - e_j \cos E_j)^2} \sum_{pqr=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} \cos(pv + p\omega + qv_j - q\varnothing + ri). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Выделим сначала из общей суммы синус и косинус истинной аномалии. Мы получим:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a}{a_j^2} \frac{(1 - e \cos E)}{(1 - e_j \cos E_j)^2} \sum_{p, q, r=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} [\cos pv \cos(p\omega + qv_j - q\varnothing + ri) - \\ &\quad - \sin pv \sin(p\omega + qv_j - q\varnothing + ri)], \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a}{a_j^2} \frac{1}{(1 - e_j \cos E_j)^2} \sum_{p, q, r=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} [F_n(-1, p, e) + \Phi_n(-1, p, e)] \times \\ &\quad \times \cos(nE + p\omega + qv_j - q\varnothing + ri). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Поступая затем так же с величиной  $v_j$ , получим:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{a}{a_j^2} \frac{1}{(1 - e_j \cos E_j)^2} \sum_{pqr=-1}^1 A_{pqr}^{(1)} [F_n(-1, p, e) + \Phi_n(-1, p, e)] \times \\ &\quad \times [\cos qv_j \cos(nE + p\omega - q\varnothing + ri) - \sin qv_j \sin(nE + p\omega - q\varnothing + ri)] = \\ &= \frac{a}{a_j^2} \sum_{p, q, r=-k}^k A_{pqr}^{(1)} \sum_{n=-1}^1 \sum_{n'=-\infty}^{\infty} [F_n(-1, p, e) + \Phi_n(-1, p, e)] [F_{n'}(2, q, e_j) + \Phi_{n'}(2, q, e_j)] \times \\ &\quad \times \cos(nE + n'E_j + p\omega - q\varnothing + ri). \end{aligned} \quad (4.57)$$

$F_n(-1, p, e)$ ,  $\Phi_n(-1, p, e)$  имеют чрезвычайно простые выражения, именно:

$$\begin{aligned} F_{-1}(-1, -1, e) &= F_{-1}(-1, 1, e) = F_1(-1, -1, e) = F_1(-1, 1, e) = \frac{1}{2}, \\ F_0(-1, -1, e) &= F_0(-1, 1, e) = -e, \\ \Phi_{-1}(-1, -1, e) &= \Phi_1(-1, 1, e) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2}, \\ \Phi_{-1}(-1, 1, e) &= \Phi_1(-1, -1, e) = -\frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2}, \\ \Phi_0(-1, 1, e) &= \Phi_0(-1, -1, e) = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Что касается  $F_{n'}(2, q, e_j)$  и  $\Phi_{n'}(2, q, e_j)$ , то тут дело обстоит сложнее. Выразим  $F_{n'}(2, q, e_j)$  и  $\Phi_{n'}(2, q, e_j)$  через функции  $J_{n'}^*(x, e)$ . Мы имеем:

$$\frac{\cos \varphi_j}{(1 - e_j \cos E_j)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{n'}(2, 1, e_j) \cos n'E_j,$$

где

$$\begin{aligned} F_{n'}(2, 1, e_j) &= \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \frac{\cos E_j - e_j}{(1 - e_j \cos E_j)^3} \cos n'E_j dE_j = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n'-1)E_j + \cos(n'+1)E_j - 2e_j \cos n'E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^3} dE_j = \\ &= \frac{1}{2} [J_{n'-1}^*(3, e_j) + J_{n'+1}^*(3, e_j)] - e_j J_{n'}^*(3, e_j) \end{aligned}$$

или, по свойству функций  $J_n^*(x, e)$ ,

$$F_{n'}(2, 1, e_j) = \frac{1}{2} \frac{d}{de_j} J_{n'}^*(2, e_j) - e_j J_{n'}^*(3, e_j). \quad (4.59)$$

Далее

$$\frac{\sin \varphi_j}{(1 - e_j \cos E_j)^2} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \Phi_{n'}(2, 1, e_j) \sin n'E_j,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{n'}(2, 1, e_j) &= \frac{\sqrt{1-e_j^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin E_j \sin n'E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^3} dE_j = \\ &= \frac{\sqrt{1-e_j^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n'-1)E_j - \cos(n'+1)E_j}{(1 - e_j \cos E_j)^3} dE_j = \frac{\sqrt{1-e_j^2}}{2\pi} [J_{n'-1}^*(3, e_j) - J_{n'+1}^*(3, e_j)]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями между функциями  $J_n^*(x, e)$ , получим:

$$\Phi_{n'}(2, 1, e_j) = \frac{n'}{2e_j} \sqrt{1-e_j^2} J_{n'}^*(2, e_j). \quad (4.60)$$

Итак, для получения полного разложения пертурбационной функции необходимо заменить в формуле разложения ее главной части  $\frac{1}{\Delta}$  коэффициент

$$\begin{aligned} &2b_{1,0}^{(1)} [F_n(2, p, e) + \Phi_n(2, p, e)] [F_{n'}(-1, q, e_j) + \Phi_{n'}(-1, q, e_j)] \\ \text{через} &2b_{1,0}^{(1)} [F_n(2, p, e) + \Phi_n(2, p, e)] [F_{n'}(-1, q, e_j) + \Phi_{n'}(-1, q, e_j)] - \\ &-\frac{a}{a_j^2} [F_n(-1, p, e) + \Phi_n(-1, p, e)] [F_{n'}(2, q, e_j) + \Phi_{n'}(2, q, e_j)]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Выражения для функций  $F_n(-1, p, e)$  и  $\Phi_n(-1, p, e)$  даются формулами (4.58), а для функций  $F_{n'}(2, q, e_j)$  и  $\Phi_{n'}(2, q, e_j)$  — формулами (4.59) и (4.60).

Если же мы хотим получить разложение  $R_1$  по степеням эксцентриситета, то нужно просто подставить в формулу (4.61) выражения для  $F_n(-1, p, e)$ ,  $\Phi_n(-1, p, e)$ ,  $F_n(2, q, e_j)$ ,  $\Phi_n(2, q, e_j)$  из формул (4.58), (4.59) и (4.60), причем в формулах (4.59) и (4.60) надо заменить функции  $J_n^*(z, e_j)$  и производные от них их выражениями при помощи бесконечных рядов по  $e_j$ .

Мы видим, что в случае внешнего варианта ограниченной эллиптической задачи трех точек дополнительная часть  $R_1$  портит нам разложение пертурбационной функции  $R$  в том смысле, что разложение по  $e_j$  уже будет не многочленом, а бесконечным рядом. Зато для внутреннего варианта мы будем иметь многочлен по степеням  $e$  (если не считать  $\sqrt{1-e^2}$ ), причем члены, содержащие  $e$  в дополнительной части, будут очень просты. Они даются формулами (4.58). Как уже было указано, внутренний вариант (спутниковые задачи) является для нас наиболее интересным.

Тем не менее, мы и для внешнего варианта можем получить конечные выражения относительно  $e_j$ , если взять разложение дополнительной части в формуле (4.56). Оно, правда, сложнее обычного ряда с числовыми коэффициентами, но все же представляет собой (в сочетании с разложением  $\frac{1}{\Delta}$ ) явное выражение пертурбационной функции через элементы, что и требуется для интегрирования уравнения Лагранжа.

## § 5. Разложение пертурбационной функции в неограниченной задаче $n$ точек

Пертурбационная функция в неограниченной задаче  $n$  точек представляет собой сумму  $n-2$  членов совершенно одинаковой конструкции, именно:

$$R_g = k^2 \sum_{s=1}^{n-1} m_s \left( \frac{1}{\Delta_{gs}} - \frac{r_s \cos \theta_s}{r_g^2} \right), \quad g \neq s, \quad (4.62)$$

где

$$\Delta = \sqrt{r_s^2 + r_g^2 - 2r_s r_g \cos \theta_s},$$

$k^2$  — постоянная Гаусса,  $r_s$  и  $r_g$  — суть соответствующие радиусы-векторы точек  $s$  и  $g$ , а  $\theta_s$  — угол между этими радиусами-векторами.

Из формулы (4.62) видно, что получив разложение для одного из членов суммы, мы получаем разложение для всех остальных членов простой заменой индексов. Поэтому рассмотрим разложение только одного из таких членов.

Принципиальным отличием неограниченной схемы от всех ограниченных является то, что здесь мы не можем выбирать за основную плоскость плоскость движения какой-нибудь точки, потому что ни одно из движений в данном случае уже не будет плоским.

Рассмотрим положение оскулирующих орбит трех точек с индексами 0, 1, 2 в некоторый фиксированный момент времени (см. рисунок).

Здесь положено:  $\Omega_1, \Omega_2$  — восходящие узлы оскулирующих орбит,  $i_1, i_2$  — наклонность орбит к некоторой основной плоскости,  $\Pi_1, \Pi_2$  — перигелии орбит.  $P_1, P_2$  — положения движения точек,  $\theta_1$  — угол между радиусами-векторами точек.

$I$  — взаимная наклонность оскулирующих орбит.

Считая, что движение происходит относительно точки с индексом 0 (Солнце), получим член пертурбационной функции для точки с индексом 1, зависящий от притяжения точки с индексом 2, в виде:

$$R_1^{(2)} = k^2 m_2 \left( \frac{1}{\Delta_{1,2}} - \frac{r_1 \cos \theta_1}{r_2^2} \right). \quad (4.63)$$



Соответствующий член пертурбационной функции для точки с индексом 2 будет:

$$R_2^{(1)} = k^2 m_1 \left( \frac{1}{\Delta_{2,1}} - \frac{r_2 \cos \theta_1}{r_1^2} \right), \quad (4.64)$$

$$\Delta_{2,1} = \Delta_{1,2}.$$

Обозначим долготы планет в орбитах через  $w_1$  и  $w_2$ . Эти долготы можно представить в виде:

$$w_1 = \tau_1 + W_1, \quad w_2 = \tau_2 + W_2,$$

где  $\tau_1 = \Omega_1 + N_1$ ,  $\tau_2 = \Omega_2 + N_2$ , а  $W_1$  и  $W_2$  суть долготы планет, считаемые от точки пересечения орбит. Причем  $W_1 = \Pi_1 + v_1$ ,  $W_2 = \Pi_2 + v_2$ , если  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — расстояние перигелиев орбит от точки их пересечения, а  $v_1$  и  $v_2$  — истинные аномалии планет.

Из сферического треугольника  $\Omega_1 \Omega_2 K$  легко можно найти

$$\cos \theta_1 = \cos W_1 \cos W_2 + \sin W_1 \sin W_2 \cos I, \quad (4.65)$$

или

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 = & \cos(v_1 + \Pi_1) \cos(v_2 + \Pi_2) + \\ & + \sin(v_1 + \Pi_1) \sin(v_2 + \Pi_2) \cos J. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Из сопоставления формул (4.63), (5.64) и (5.66) с формулами (5.12) и (5.13) мы видим, что их структура совершенно аналогична. Поэтому мы сразу можем написать разложение для  $\frac{1}{\Delta_{1,2}}$  в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_{1,2}} = & \frac{2}{a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} [F_n(z, p, e) + \Phi_n(z, p, e)] \times \\ & \times [F_{n'}(-z+1, q, e_j) + \Phi_{n'}(-z+1, q, e_j)] \cdot \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p \Pi_1 + q \Pi_2 + r I). \end{aligned}$$

Или же в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_{1,2}} = & \frac{2}{a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} e_1^{s_1} e_2^{s_2} \sum_{n_1=p+s_1}^{p-s_1} \sum_{n_2=q+s_2}^{q-s_2} [C_{s_1}(n_1, p, z) + \\ & + \sqrt{1-e_1^2} C_{s_1}^1(n_1, p, z)] \times [C_{s_2}(n_2, q, -z+1) + \sqrt{1-e_2^2} C_{s_2}^1(n_2, q, -z+1)] \times \\ & \times \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p \Pi_1 + q \Pi_2 + r I). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Здесь  $z = k + 2l + 1$ ,  $\bar{s}_2 = z - 1 = k + 2l$ .

Здесь нам нет смысла разделять наружный и внутренний варианты задачи, так как мы всегда сможем переменить обозначения так, чтобы было  $r_1 > r_2$ .

В этой задаче также нет смысла оставлять неразложенными  $\sqrt{1-e^2}$ , так как мы не различаем здесь возмущающей и возмущаемой точек.

Поэтому формулу (4.67) удобнее переписать в виде:

$$\frac{1}{\Delta_{1,2}} = \frac{2}{a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k A_{pqr}^{(k)} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} e_1^{s_1} e_2^{s_2} \sum_{n_1=p+s_1}^{p-s_1} \sum_{n_2=q+s_2}^{q-s_2} [C_{s_1}(n_1, p, z) + \bar{C}_{s_1}(n_1, p, z)] \times$$

$$\times [C_{s_2}(n_2, q, -\kappa + 1) + \bar{C}_{s_2}(n_2, q, -\kappa + 1)] \cdot \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\Pi_1 + q\Pi_2 + rJ). \quad (4.68)$$

Причем здесь  $\bar{C}_{s_2}$  определяется по тем же формулам, что и  $\bar{C}_{s_1}$  после замены в последних  $\kappa$  на  $-\kappa + 1$  [см. часть I, § 9, формулы (2.96) и (2.98)].

Объединяя, наконец, все числовые коэффициенты при соответствующих членах в один и считая их исправленными за разложение дополнительной части, получим:

$$R_1^{(2)} = \frac{2}{a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=p+s_1}^{p-s_1} \sum_{n_2=q+s_2}^{q-s_2} D_{kpqr}^{s_1 s_2 n_1 n_2} \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\Pi_1 + q\Pi_2 + rJ). \quad (4.69)$$

Интересно отметить, что функция  $R_1^{(2)}$ , зависящая от двенадцати элементов, после ее разложения представилась девятикратным рядом. Это произошло потому, что, во-первых, разложение велось по отношению полуосей, во-вторых, по взаимной наклонности, и в-третьих, как будет показано дальше, элементы  $\delta\ell_1$  и  $\delta\ell_2$  входят в разложение только в комбинации  $\delta\ell_1 - \delta\ell_2$ .

## § 6. Преобразование уравнений Лагранжа

В предыдущем параграфе мы получили разложение пертурбационной функции в формуле (4.69), нам остается теперь выразить  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  через элементы орбит ( $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  суть расстояния перигелиев оскулирующих орбит от точки их пересечения). Из рисунка видно, что  $\Pi_1 = \pi_1 - \tau_1$ ,  $\Pi_2 = \pi_2 - \tau_2$ , где  $\pi_1$  и  $\pi_2$  — долготы перигелиев и  $\tau_1 = \delta\ell_1 + N_1$ ,  $\tau_2 = \delta\ell_1 + N_2$ . Мы можем выразить величины  $N_1$  и  $N_2$  через элементы орбит по формулам:

$$\begin{aligned} \sin \frac{J}{2} \sin \frac{(N_1 + N_2)}{2} &= \sin \frac{1}{2} (\delta\ell_2 - \delta\ell_1) \sin \frac{1}{2} (i_2 + i_1), \\ \sin \frac{J}{2} \cos \frac{(N_1 + N_2)}{2} &= \cos \frac{1}{2} (\delta\ell_2 - \delta\ell_1) \sin \frac{1}{2} (i_2 - i_1), \\ \cos \frac{J}{2} \sin \frac{(N_1 - N_2)}{2} &= \sin \frac{1}{2} (\delta\ell_2 - \delta\ell_1) \cos \frac{1}{2} (i_2 - i_1), \\ \cos \frac{J}{2} \cos \frac{(N_1 - N_2)}{2} &= \cos (\delta\ell_2 - \delta\ell_1) \cos \frac{1}{2} (i_2 + i_1). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Однако это приводит к чрезвычайно громоздким выражениям. Кроме того, в этом случае надо выражать через элементы орбиты и взаимную наклонность  $J$ , а это испортит нам простую зависимость от наклонности. Поэтому мы считаем более удобным применить преобразование, аналогичное преобразованию Леверье при разложении пертурбационной функции по степеням  $\sin^2 \frac{J}{2}$ . Именно, полагая

$$\omega_1 = \pi_1 + \tau_2 - \tau_1 = \Pi_1 + \tau_2,$$

получим:

$$\Pi_1 = \omega_1 - \tau_2, \quad \Pi_2 = \pi_2 - \tau_2. \quad (4.71)$$

Положим для сокращения

$$\cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\Pi_1 + q\Pi_2 + rJ) = \cos X. \quad (4.72)$$

Тогда  $\cos X$  можно записать в виде.

$$\begin{aligned} \cos X &= \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\omega_1 - p\tau_2 + q\pi_2 - q\tau_2 + rJ) = \\ &= \cos(n_1 E_1 + n_2 E_2 + p\pi_1 + p(\tau_2 - \tau_1) + q\pi_2 - (p + q)\tau_2 + rJ). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Так как разность  $\tau_2 - \tau_1$  зависит только от  $i_1, i_2, \delta_2 - \delta_1$  (Субботин, 1937), то очевидно, что  $\frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} = \frac{\partial R_s}{\omega_s}$ .

Напишем уравнения Лагранжа в форме:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right), \\ \frac{d\delta_2}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon}, \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{-2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \epsilon}.\end{aligned}\tag{4.74}$$

Для простоты мы здесь опустим индексы при элементах и пертурбационных функциях  $R_s$ . Так как  $\cos \gamma$  не зависит явно от  $i$  и  $\Omega$ , то производные от  $R$  по этим элементам надо заменять производными по  $\tau_2, \tau_2 - \tau_1$  и  $J$ . Учитывая соотношения (4.71), получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial i_1} &= \frac{\partial R}{\partial \tau_2} \cdot \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} + \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial i_1} + \frac{\partial R}{\partial J} \cdot \frac{\partial J}{\partial i_1}, \\ \frac{\partial R}{\partial \delta_1} &= \frac{\partial R}{\partial \tau_2} \cdot \frac{\partial \tau_2}{\partial \delta_1} + \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \cdot \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial \delta_1} + \frac{\partial R}{\partial J} \cdot \frac{\partial J}{\partial \delta_1}.\end{aligned}\tag{4.75}$$

Воспользовавшись дифференциальными формулами сферической тригонометрии применительно к сферическому треугольнику  $\delta_1$  к  $\delta_2$ , получим:

$$\begin{aligned}dJ &= -\cos(\tau_1 - \delta_1) di_1 + \cos(\tau_2 - \delta_2) di_2 + \sin i_2 \sin(\tau_2 - \delta_2) d(\delta_2 - \delta_1), \\ dJ &= -\cos(\tau_1 - \delta_1) di_1 + \cos(\tau_2 - \delta_2) di_2 + \sin i_1 \sin(\tau_1 - \delta_1) d(\delta_2 - \delta_1), \\ \sin J d(\tau_1 - \delta_1) &= \cos J \sin(\tau_1 - \delta_1) di_1 - \sin(\tau_2 - \delta_2) di_2 + \sin i_2 \cos(\tau_2 - \delta_2) d(\delta_2 - \delta_1), \\ \sin J d(\tau_2 - \delta_2) &= \sin(\tau_1 - \delta_1) di_1 - \cos J \sin(\tau_2 - \delta_2) di_2 + \sin i_1 \cos(\tau_1 - \delta_1) d(\delta_2 - \delta_1).\end{aligned}\tag{4.76}$$

Отсюда вычисляем нужные нам частные производные.

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial i_1} &= -\cos(\tau_1 - \delta_1), \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} &= \frac{\sin(\tau_1 - \delta_1)}{\sin J}, \\ \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial i_1} &= \operatorname{tg} \frac{J}{2} \sin(\tau_1 - \delta_1), \\ \frac{\partial J}{\partial \delta_1} &= -\sin i_1 \sin(\tau_1 - \delta_1), \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial \delta_1} &= -\frac{\sin i_1 \cos(\tau_1 - \delta_1)}{\sin J}, \\ \frac{\partial (\tau_2 - \tau_1)}{\partial \delta_1} &= -1 + \cos i_1 - \sin i_1 \cos(\tau_1 - \delta_1) \operatorname{tg} \frac{J}{2}.\end{aligned}\tag{4.77}$$

Подставляя полученные производные в формулу (4.76), получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1}{\partial i_1} &= \frac{\partial R_1}{\partial \tau_2} \frac{\sin(\tau_1 - \Omega_1)}{\sin J} + \frac{\partial R_1}{\partial \omega_1} \operatorname{tg} \frac{J}{2} \sin(\tau_1 - \Omega_1) - \frac{\partial R_1}{\partial J} \cos(\tau_1 - \Omega_1), \\ \frac{\partial R_1}{\partial \Omega_1} &= -\frac{\partial R_1}{\partial \tau_2} \frac{\sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1)}{\sin J} + \frac{\partial R_1}{\partial \omega_1} \left[ -1 + \cos i_1 - \sin i_1 \cos(\tau_1 - \Omega_1) \operatorname{tg} \frac{J}{2} \right] - \\ &\quad - \frac{\partial R_1}{\partial J} \sin i_1 \sin(\tau_1 - \Omega_1).\end{aligned}\quad (4.78)$$

Заменим теперь в уравнениях (4.74) производные по  $i$ ,  $\Omega$  их выражениями (4.78). Мы получим, снова опуская индексы:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\sec \varphi \operatorname{cosec} i}{na^2} \left\{ -\frac{\partial R}{\partial \tau'} \frac{\sin i \cos(\tau - \Omega)}{\sin J} + \frac{\partial R}{\partial \omega_1} \left[ \cos i - 1 - \sin i \cos(\tau - \Omega) \operatorname{tg} \frac{J}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial R}{\partial J} \sin i \sin(\tau - \Omega) \right\} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2} \sec \varphi \left( \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2} \sec \varphi \left[ \frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin J} \cdot \frac{\partial R}{\partial \tau'} + \operatorname{tg} \frac{J}{2} \sin(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial \omega_1} - \cos(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial J} \right], \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2} \sec \varphi \left[ \frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin J} \frac{\partial R}{\partial \tau'} + \operatorname{tg} \frac{J}{2} \sin(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial \omega} - \cos(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial J} \right] + \\ &\quad + \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{2}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sec \varphi \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2} \left[ \frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin J} \cdot \frac{\partial R}{\partial \tau'} + \operatorname{tg} \frac{J}{2} \sin(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial \omega_1} - \right. \\ &\quad \left. - \cos(\tau - \Omega) \frac{\partial R}{\partial J} \right] + \frac{\cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e}.\end{aligned}\quad (4.79)$$

Через  $\tau'$  обозначено  $\tau$  с индексом возмущающей точки. Полагая, согласно Леверье,

$$\begin{aligned}\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= \frac{dL}{dt}, & \frac{1}{na^2} \cos \varphi \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{dP_2}{dt}, \\ -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{dP_1}{dt}, & \frac{\sec \varphi}{na^2} \frac{\partial R}{\partial J} &= \frac{dP_4}{dt}, \\ -\frac{1}{na^2} \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial R}{\partial \omega} &= \frac{dP_3}{dt}, & \frac{\sec \varphi}{na^2 \sin J} \frac{\partial R}{\partial \tau'} &= \frac{dT}{dt}, \\ \frac{\sec \varphi}{na^2} \operatorname{tg} \frac{J}{2} \frac{\partial R}{\partial \omega_1} &= \frac{dV}{dt},\end{aligned}$$

приводим уравнения (4.79) к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{dL}{dt}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{dP_3}{dt} - \frac{1}{2a} \cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \frac{dL}{dt}, \\ \frac{di}{dt} &= \sin(\tau - \Omega) \frac{dP_4}{dt} + \cos(\tau - \Omega) \left( \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \right) - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2} \sec \varphi}{2a} \frac{dL}{dt}, \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= -\cos(\tau - \Omega) \frac{dP_4}{dt} + \sin(\tau - \Omega) \left( \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \right), \\ e \frac{d\pi}{dt} &= \frac{dP_2}{dt} + e \sin i \operatorname{tg} \frac{J}{2} \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= -\frac{dP_1}{dt} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \frac{dP_2}{dt} + \sin i \operatorname{tg} \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

Мы получили систему уравнений (порядок которой зависит от числа взаимно гравитирующих точек) такую, что производные, стоящие в правых частях зависят от величин:  $\tau' - \tau$ ,  $\tau'$  и  $I$ .

Разложение пертурбационной функции в пространственной неограниченной задаче  $n$  точек может быть теперь написано в виде:

$$R_g = k^2 \sum_{s=1}^{n-1} m_s R_s^{(g)}, \quad s \neq g, \quad (4.81)$$

где

$$\begin{aligned} R_s^{(g)} &= \frac{2}{a_s} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1,l}^{(k)} \sum_{p,q,r=-k}^k \sum_{\sigma_g=0}^{\infty} \sum_{n_g=p+\sigma_g}^{\infty} \sum_{n_g=q+\sigma_g}^{j-\sigma_g} D_{k p q r}^{\sigma_g, \sigma_g, n_g, n_g} \cos \chi, \\ \cos \chi &= \cos [n_s E_s + n_g E_g + p \pi_s + q \pi_g + p(\tau_s - \tau_g) - (p+q)\tau_s], \\ D_{k p q r}^{\sigma_g, \sigma_g, n_g, n_g} &= A_{p q r}^{(k)} \bar{C}_{n_g}(p, \chi, \sigma_g) \bar{C}_{n_s}(q, -\chi+1, \sigma_s), \\ \bar{C}_{n_g}(p, \chi, \sigma_g) &= C_{\sigma_g}(n_g, p, \chi) + \bar{C}_{\sigma_g}(n_g, p, \chi), \\ C_{n_s}(q, -\chi+1, \sigma_s) &= C_{\sigma_s}(n_s, q, -\chi+1) + \bar{C}_{\sigma_s}(n_s, q, -\chi+1). \end{aligned}$$

Коэффициенты  $C_s$  и  $\bar{C}_s$  определяются формулами (2.96), (2.98) части II этой работы<sup>1</sup> и формулами (4.47) и (4.50) этой части.

Все преимущества такого способа разложения, которые имели место для круговой и эллиптической задачи трех точек, остаются в силе и для неограниченной задачи  $n$  точек.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Еленевская Н. Б. 1949. О коэффициентах разложения координат невозмущенного движения в ряды Фурье по кратным эксцентрической аномалии. Уч. зап. Львовск. ун-в., **15**, 4.  
Еленевская Н. Б. 1952. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности, ч. I. Бюлл. ИТА, **5**, 2 (65).  
Еленевская Н. Б. 1953. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно наклонности, ч. II. Бюлл. ИТА, **5**, 5 (68).  
Орлов Б. А. 1936. Разложение пертурбационной функции по методу Ньюкома. Труды АО ЛГУ, **6**.  
Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, **2**, ОНТИ.  
Newcomb S. 1895. Development of the Perturbative Function in Cosines of Multiples of the Mean Anomalies and of Angles between the Perihelia and Common Node and in Powers of the Eccentricities and Mutual Inclination. Astr. Pap., **5**.

Поступило в Редакцию  
6 марта 1956 г.

<sup>1</sup> (Еленевская, 1953).

# Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 7 (80)

## Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны

Г. А. Чеботарев

Автором построена симметричная траектория для полета ракеты вокруг Луны с возвращением на Землю, без затраты горючего в пути.

A SYMMETRICAL ORBIT FOR A FLIGHT AROUND THE MOON, by G. Chebotarev. — In this article the orbit of a rocket for the flight around the moon is calculated. By means of numerical integration the effects of the earth's and moon's gravitational fields are taken into account. No fuel expense is required during the trip.

### § 1. Постановка задачи

В работе решена следующая задача: определить начальные условия движения, при которых ракета, находящаяся при  $t=0$  на поверхности Земли, совершит полет вокруг Луны и вернется на Землю без затраты горючего в пути.

Поместим начало координат в центр Земли; за плоскость  $xу$  примем плоскость орбиты Луны. Пренебрегая эксцентриситетом лунной орбиты, будем рассматривать движение Луны, как круговое.

Возмущения Солнца и планет лежат за пределами точности вычислений, принятой в настоящей работе. Сделанные упрощения не имеют принципиального характера и легко могут быть учтены в случае необходимости.

Пусть в начальный момент  $t_0$  Луна и ракета находятся на оси  $x$ , причем расстояние ракеты от Земли  $x^0$  больше, чем расстояние Луны от Земли  $x_1^0$ , а скорость ракеты равна нулю. При отсутствии возмущений со стороны Луны ракета, двигаясь по оси  $x$ , достигнет поверхности Земли со скоростью, которая равна скорости, необходимой для того, чтобы забросить ракету на исходную высоту  $x_0$ .

Возмущения Луны деформируют прямолинейную траекторию ракеты, и ракета при своем движении из точки  $x^0$ , вообще говоря, уже не коснется поверхности Земли, а пролетит на некотором расстоянии  $r_{\min}$  от центра Земли.

Очевидно, что увеличивая начальное значение  $x^0$ , мы увеличиваем расстояние ракеты от Луны  $\Delta^0 = x^0 - x_1^0$  и этим самым уменьшаем лунные возмущения. Путем последовательных приближений можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство

$$r_{\min} < R,$$

где  $R$  — радиус Земли.

Изменим теперь движение Луны на обратное. Тогда ракета, двигаясь из точки  $x^0$ , опишет новую траекторию, симметричную только что построенной. Положение и скорость ракеты в момент падения дают начальные условия, необходимые для того, чтобы забросить ракету в положение  $x^0$ . Обратное движение Луны при этом необходимо заменить на прямое.

Таким образом, построена траектория, состоящая из двух симметричных ветвей, для полета ракеты вокруг Луны с возвращением на поверхность Земли.

В работе приняты следующие численные значения для астрономических постоянных:

средний радиус Лунной орбиты . . . . .	$a_1 = 384400$ км
период обращения Луны . . . . .	$P_1 = 655.72$ часа
масса Луны . . . . .	$m_1 = 0.012277$
радиус Земли . . . . .	$R = 6378$ км
радиус Луны . . . . .	$R_1 = 1740$ км

Принятая система единиц: километр, час, масса Земли. В этой системе численное значение постоянной Гаусса будет равно:

$$k = 2.2699 \times 10^6.$$

Все вычисления ведутся с пятью десятичными знаками.

## § 2. Первое приближение

В первом приближении расстояние ракеты от Земли, при  $t=0$ , принято равным 400 000 км. Поэтому начальные условия интегрирования определяются следующими данными:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= 400\,000 \text{ км}, & \dot{x}_0 &= 0, \\ y^0 &= 0, & \dot{y}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Начальное расстояние ракеты от центра Луны  $\Delta^0 = 15600$  км. Численное интегрирование велось методом Коуэлла по хорошо известным формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= f^{-2} + 0.083333f, \\ y &= g^{-2} + 0.083333g, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f &= w^2 \ddot{x} = -w^2 k^2 \frac{x}{r^3} + X, \\ g &= w^2 \ddot{y} = -w^2 k^2 \frac{y}{r^3} + Y, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= w^2 k^2 m_1 \frac{x_1 - x}{\Delta^3}, \\ Y &= w^2 k^2 m_1 \frac{y_1 - y}{\Delta^3}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Члены  $X_1 = -w^2 k^2 m_1 \frac{x_1}{a_1^3}$  и  $Y_1 = -w^2 k^2 m_1 \frac{y_1}{a_1^3}$  лежат на пределе точности вычислений и потому отброшены. Интервал интегрирования  $w$  принят равным одному часу.

При  $t \geq 100$  часам возмущения становятся незначительными и дальнейшее движение ракеты может рассматриваться как невозмущенное.

Для  $t = 100$  часам численное интегрирование дает:

$$\left. \begin{aligned} x &= 40914 \text{ км}, & \dot{x} &= -9575, \\ y &= 72431 \text{ км}, & \dot{y} &= -3209, \\ r &= 83188 \text{ км}, & \Delta &= 301700 \text{ км}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$t$ (часы)	$x$ (в тыс. км)	$y$ (в тыс. км)	$r$ (в тыс. км)	$x_1$ (в тыс. км)	$y_1$ (в тыс. км)	$\Delta$ (в тыс. км)
18.07	169.4	-36.6	173.3	221.0	-314.5	282.7
28.07	221.9	-34.6	224.6	250.1	-291.9	258.8
38.07	264.1	-31.1	265.9	276.9	-266.6	235.3
48.07	299.0	-26.7	300.2	301.1	-238.9	212.1
58.07	328.1	-22.0	328.8	322.6	-209.0	187.1
68.07	352.4	-17.2	352.8	341.1	-177.2	160.3
78.07	372.6	-12.4	372.8	356.5	-143.8	132.0
88.07	389.0	-7.8	389.1	368.6	-109.0	103.0
98.07	401.9	-3.8	401.9	377.4	-73.2	73.6
108.07	411.1	-0.9	411.0	382.6	-36.8	45.7
118.07	414.9	0	414.9	384.4	0	30.5
128.07	410.3	+0.5	410.3	382.6	+36.8	45.6
138.07	400.4	+3.5	400.4	377.4	+73.2	73.4
148.07	386.8	+7.6	386.8	368.6	+109.0	103.0
158.07	369.6	+12.3	369.8	356.5	+143.8	132.0
168.07	348.6	+17.2	349.0	341.1	+177.2	160.2
178.07	323.3	+22.2	324.5	322.6	+209.0	186.8
188.07	293.2	+27.0	294.8	301.1	+238.9	212.0
198.07	257.0	+31.4	259.3	276.9	+266.6	236.0
208.07	213.2	+34.9	216.4	250.1	+291.9	259.5
218.07	158.2	+36.7	162.7	221.0	+314.5	284.7

Скорости выражены в единице времени, равной  $w$  суток, и их следует разделить на  $wk$  перед выводом элементов. Элементы вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y}, \quad e \sin E = \frac{r\dot{r}}{\sqrt{a}}, \\ V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad e \cos E = rV^2 - 1, \\ \frac{1}{a} &= \frac{2}{r} - V^2, \quad M = E - e \sin E, \\ \sin \pi &= \frac{y}{r} \cos E - \dot{y} \sqrt{a} \sin E, \\ \cos \pi &= \frac{x}{r} \cos E - \dot{x} \sqrt{a} \sin E. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Интересующие нас параметры оскулирующего эллипса равны:

$$\left. \begin{aligned} a &= 235200 \text{ км}, \\ e &= 0.85980, \\ r_{\min} &= 32975 \text{ км}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким образом, ракета пролетит на расстояние 26 597 км от поверхности Земли.

### § 3. Второе приближение

Во втором приближении увеличиваем начальное расстояние ракеты от Луны, полагая  $\Delta^0 = 31600$  км. Как показало интегрирование в первом приближении интервал  $w$  может быть значительно увеличен. Полагаем поэтому  $w = 2$  часа.

Начальные условия для второго приближения:

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= 416000 \text{ км}, \quad \dot{x}_0 = 0, \\ y^0 &= 0, \quad \dot{y}_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$



Для  $t = 100$  часов численное интегрирование дает следующие результаты:

$$\begin{aligned}x &= 169374 \text{ км}, & \dot{x} &= -11920, \\y &= 36585 \text{ км}, & \dot{y} &= +134, \\r &= 173280 \text{ км}, & \Delta &= 282670 \text{ км}.\end{aligned}\quad (9)$$

Вычисляем оскулирующую орбиту для  $t = 100$  часов.

$$\begin{aligned}a &= 215200 \text{ км}, & M &= -23^\circ 70, \\e &= 0.97598, & \pi &= 176^\circ 82, \\n &= 1^\circ 303 \text{ (в час)}.\end{aligned}\quad (10)$$

Пренебрегая, как и в первом приближении, возмущениями при  $t > 100$  часов, вычислим перигельное расстояние кометы:

$$r_{\min} = 5169 \text{ км}.$$

Таким образом, ракета при своем движении обязательно коснется поверхности Земли.

Условия падения находим из равенства  $r = R = 6378 \text{ км}$ .

$$\left. \begin{aligned}M &= -0^\circ 16, \\V &= 11080 \text{ м/сек}.\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Зная среднюю угловую скорость ракеты  $n$ , легко вычислить, что расстояние  $\Delta M = 23^\circ 54$  по невозмущенной траектории, от момента  $t_{100}$  до момента падения, ракета пройдет за время  $\Delta t = 18.07$  часов. Таким образом, общее время движения от точки  $x^0$  до момента падения на поверхность Земли составляет 118.07 часов, или 4.92 суток. В силу симметричности второй ветви траектории, относительно оси  $x$ , начальные условия движения для полета вокруг Луны определяются следующими параметрами:

$$\left. \begin{aligned}a &= 215200 \text{ км}, & M &= +0^\circ 16, \\e &= 0.97598, & \pi &= 183^\circ 18.\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Начальная скорость  $V_0 = 11080 \text{ м/сек}$ . Общая продолжительность полета ракеты 236.14 часа или 9.84 суток. Наибольшее расстояние ракеты от Земли 416 000 км. Наименьшее расстояние ракеты от поверхности Луны 29 860 км.

В работе дано только схематическое решение поставленной задачи.

Дальнейшее исследование должно идти в трех направлениях:

1. Изучение устойчивости построенной траектории относительно начальных условий движения.
2. Изучение влияния ошибок принятых астрономических постоянных на движение ракеты.
3. Переход к реальной задаче в результате отказа от сделанных в настоящей работе упрощений.

#### § 4. Контрольные вычисления

В заключение работы было проведено контрольное вычисление всего пути ракеты от старта на поверхности Земли до обратного возвращения на Землю. Исходными данными послужили эллиптические элементы (12). В течение первых 18.07 часов полета движение рассматривалось как невозмущенное. Основные величины, характеризующие возмущенное движение, приведены в таблице. По числовым данным этой таблицы легко

виден эффект накопления ошибок в процессе численного интегрирования. Необходимо отметить также неточности исходных данных (12), которые получены в результате численного интегрирования. Оскулирующая эллиптическая орбита вычислена для момента  $t_{100}$ :

$$\left. \begin{aligned} a &= 214247 \text{ км,} \\ e &= 0.97524, \\ r_{\min} &= 5313 \text{ км.} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Таким образом, ракета при своем движении по невозмущенной орбите коснется поверхности Земли

Контрольные вычисления выполнены научным сотрудником Института М. С. Волковым.

## § 5. Основные этапы завоевания межпланетного пространства

Какое практическое значение имеет задача, рассмотренная в настоящей работе?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо сказать несколько слов об основных этапах завоевания межпланетного пространства. Можно наметить три основных этапа в организации межпланетных перелетов:

- I этап — полеты неуправляемых ракет;
- II этап — полеты управляемых ракет-автоматов;
- III этап — полеты пассажирских управляемых ракет.

Для того чтобы забросить в межпланетное пространство ракету, лишенную собственных запасов горючего (и, следовательно, неуправляемую), весом в несколько килограммов, необходимо построить трехступенчатую ракету, стартовый вес которой будет равен 16.8 т. Но уже при полезном весе третьей ступени в 100 кг стартовый вес ракеты увеличивается до 62.4 т (по другому варианту — 90.9 т). Для создания искусственного спутника с полезным грузом 36 т общий вес трехступенчатой ракеты должен равняться 7000 т, из которых 90% составляет горючее (проект Брауна). Для сравнения укажем, что стартовый вес  $V-2$  составляет всего 12.9 т.

Таким образом, возможности современной техники не выходят пока за пределы реализации I этапа межпланетных сообщений (неуправляемые ракеты). Осуществление II и III этапов потребует, повидимому, принципиально нового решения вопроса о топливе ракеты. Кроме того, осуществление III этапа связано с рядом трудных и далеко еще не ясных вопросов биологического и медицинского характера (особую сложность представляет защита от биологического действия космического излучения).

Какие же задачи могут быть решены на I этапе с помощью неуправляемых ракет?

Укажем три такие задачи.

1-я задача. Создание искусственных спутников Земли. Орбиты спутников могут быть весьма разнообразны.

2-я задача. Полет на Луну. Хотя ракета не несет с собой никакого полезного груза и не может затормозить свое падение на поверхность Луны, научное значение такого перелета чрезвычайно велико.

3-я задача. Полет вокруг Луны с возвращением на Землю. Для торможения ракеты в атмосфере Земли используются парашютные и планерные устройства. Осуществление этого проекта даст возможность сфотографировать невидимое с Земли полушарие Луны.

Все три задачи, приблизительно одинаковой технической трудности, будут, вероятно, решены одна за другой в течение ближайших пяти-десяти лет.

Однако с точки зрения небесной механики вторая, и особенно третья, задача много сложнее, чем первая. На разработку этих двух задач и должно быть обращено внимание астрономов, интересующихся вопросами космонавтики.

В списке литературы указаны основные работы, изданные на русском языке.

ЛИТЕРАТУРА

- Кондратьев Ю. В. 1947. Завоевание межпланетных пространств. Оборонгиз, 84 стр.  
Кооп И. и И. Ютенбогарт. 1950. Динамика ракет. Оборонгиз, 328 стр.  
Оберт Г. 1948. Пути осуществления космических полетов. Оборонгиз, 232 стр.  
Рынин Н. А. 1928—1932. Межпланетные сообщения, вып. 1—9.  
Цандер Ф. А. 1947. Проблема полета при помощи ракетных аппаратов. Оборонгиз, 240 стр.  
Циолковский К. Э. 1951. Аэродинамика. Собр. соч., 1, АН СССР, 268 стр.  
Циолковский К. Э. 1954. Реактивные летательные аппараты. Собр. соч., 2, АН СССР, 455 стр.  
Штернфельд А. 1937. Введение в космонавтику. ОНТИ, 320 стр.  
Эно-Пельтри Р. 1950. Космические полеты. Оборонгиз, 148 стр.

Поступило в Редакцию  
3 апреля 1956 г.

# Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№7 (80)

## Новые элементы восьми малых планет

О. Н. Бартенева

Приводятся новые элементы малых планет 247, 344, 536, 680, 747, 794, 1339 и 1415, полученные в результате улучшения их орбит.

NEW ELEMENTS OF EIGHT MINOR PLANETS, by O. N. Barteneva. — New elements of minor planets 247, 344, 536, 680, 747, 794, 1339 and 1415 are given, improved by differential correction from some oppositions. Special perturbations from Jupiter or Jupiter and Saturn have been included.

В настоящей статье приводятся результаты улучшения орбит 8 планет: 247 Eukrate, 344 Desiderata, 536 Merapi, 680 Genoveva, 747 Winchester, 794 Irenaea, 1339 Désagnaux и 1415 Malautra, — для которых в Институте теоретической астрономии было выполнено численное интегрирование уравнений движения в прямоугольных координатах. Интегрирование велось с учетом возмущений от Юпитера и Сатурна (для планет 536, 747 и 1339) или только от Юпитера (для остальных пяти планет). Шаг интегрирования был различен: 40 дней для планет 536 и 1339 и 20 дней для остальных. Улучшение элементов производилось по методу Эккерта—Брауера (Самойлова-Яхонтова, 1944). При улучшении моменты оскуляции для всех планет перенесены на более поздние моменты. С исправленными элементами численное интегрирование в прямоугольных координатах было повторено. Шаг интегрирования для всех планет сохранен первоначальный. После интегрирования вновь произведены сравнения с наблюдениями. Результаты представлены в табл. 1—9. В этих таблицах звездочками отмечены наблюдения, участвовавшие в исправлении.

### 247 Eukrate

Планета 247 Eukrate открыта в 1885 г. в Дюссельдорфе.

За исходные элементы при интегрировании взяты элементы Лютера (Luther. Эфемериды малых планет на 1948 год, ч. 2). Улучшение элементов выполнено дважды по 4 оппозициям 1950—1954 гг.

### Э л е м е н т ы

Эпоха и оскуляция 1951 декабрь 20.0 вс. вр.

$M = 351^{\circ}65353$

$\omega = 53.68907$	} 1950.0	$P_x = 0.5878291$
$\Omega = 0.33970$		$P_y = 0.5369784$
$i = 25.07132$		$P_z = 0.6050712$

$\varphi = 14.01702$   $Q_x = -0.8089812$

$\mu = 781^{\circ}81120$   $Q_y = 0.3878575$

$a = 2.7411733$   $Q_z = 0.4417193$

Таблица 1

Сравнения с наблюдениями планеты 247 Eukrate

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После 2-го улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
	1950							
*1	май 22.92905	18 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> 31 <sup>s</sup> .74	—57°04'29".2	+1 <sup>m</sup> 00 <sup>s</sup> .49	— 1'49".2	— 0 <sup>s</sup> .27	— 6".9	Иоганнесбург
2	июль 31.72961	17 00 55.79	—55 36 51.4	+ 44 <sup>s</sup> .91	— 4 00.4	— 0.54	— 8.1	"
3	сентябрь 13.74659	17 16 49.26	—49 28 40.6	—	—	—22.78	—34.6	"
	1951							
4	август 31.06568	1 11 05.17	+ 8 49 04.0	—	—	— 0.10	+ 2.9	Уэль
5	сентябрь 29.825	0 40 11.0	+13 49 49	+4 <sup>m</sup> 50 <sup>s</sup> .8	+85 13	+ 0.1	+ 6	Тарту
*6	октябрь 10.02508	0 25 24.04	+15 09 42.3	+4 44.91	+89 02.0	+ 0.61	+ 6.1	Уэль
7	октябрь 23.87658	0 06 39.75	+16 34 17.9	—	—	— 0.12	+11.7	"
	1953							
8	март 7.90420	11 41 07.02	+ 9 53 12.5	+2 04.11	—44 46.8	—15.77	— 8.2	Мадрид
9	март 9.91700	11 39 02.3	+ 9 52 28	—	—	+ 0.3	— 9	Тарту
*10	март 10.85250	11 37 56.35	+ 9 52 01.4	—	—	— 0.28	—11.2	Мадрид
11	март 11.95700	11 36 39.3	+ 9 51 23	—	—	+ 0.3	—15	Тарту
	1954							
*12	апрель 8.97466	15 20 06.54	—44 07 10.8	+1 06.75	— 8 49.2	+ 0.60	— 5.6	Иоганнесбург

Наблюдения 3 и 8 (Иоганнесбург и Мадрид), повидимому, ошибочны.

## 344 Desiderata

Планета 344 Desiderata открыта в 1892 г. Шарлуа (Charlois) в Ницце.

Карштедт (Kahrstedt) получил систему оскулирующих элементов планеты на основании наблюдений в 6 оппозициях за годы 1922—1938 с учетом возмущений от Юпитера. Однако в дальнейшем возмущения не вычислялись, и с 1941 г. публиковались невозмущенные эфемериды планеты. Вследствие этого разности наблюдений с вычислениями, постепенно увеличиваясь, дошли в 1950 г. до  $\Delta\alpha = -11^m.6$ . Поэтому решено было сделать улучшение орбиты планеты с учетом возмущений, приняв за исходные элементы Карштедта с оскуляцией 1941 (Kahrstedt. Kleine Planeten, 1941). Оказалось, что одного только учета возмущений было достаточно, чтобы уменьшить разности в 1950 г. до  $\Delta\alpha = +1^m.5$ . В результате улучшения получена приведенная ниже система оскулирующих элементов.

## Элементы

Эпоха и оскуляция 1946 июнь 29.0 вс. вр.

$$\begin{array}{lcl}
 M = 24^{\circ}32'60'' & & \\
 \omega = 235.20508 & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1950.0 & \begin{array}{l} P_x = +0.2065543 \\ P_y = -0.7614637 \\ P_z = -0.6144172 \end{array} \\
 \Omega = 48.58807 & & \\
 i = 18.51077 & & \\
 \varphi = 18.10810 & & Q_x = 0.9490215 \\
 \mu = 847^{\circ}40'86'' & & Q_y = 0.3087325 \\
 a = 2.5978200 & & Q_z = -0.0635792
 \end{array}$$

Т а б л и ц а 2

Сравнения с наблюдениями планеты 344 Desiderata

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1	1938 ноябрь 7.94	2 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup> 2	+14°55'	+ 0 <sup>m</sup> 2	0'	0 <sup>m</sup> 0	—3'	Турку
2	ноябрь 16.89	2 44.9	+15 02	0.0	—1	0.0	—3	"
*3	1941 апрель 19.89	12 03.9	+20 47	+ 0.4	—3	0.0	0	"
4	апрель 21.95	12 02.0	+20 35	—	—	—0.1	—1	"
*5	1942 ноябрь 8.71	1 42.6	+ 1 34	+ 0.1	+4	0.0	0	Китаб
*6	1946 октябрь 28.90882	0 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup> 01 <sup>s</sup> 09	—16°59'53".4	+24 <sup>s</sup> 93	+5'57".5	0.0	0	Сан-Фер- нандо
*7	1950 сентябрь 5.83908	22 16 22.94	—48 04 44.9	+ 1 <sup>m</sup> 29 <sup>s</sup> 28	+8 12.9	0.2	+1	Иоганнесбург
8	сентябрь 7.83916	22 14 30.03	—47 44 06.1	+ 1 26.94	+7 59.5	0.2	1	"

## 536 Merapi

Планета 536 Merapi открыта в 1904 г. Петерсом (Peters) в Вашингтоне.

Позднее Я. П. Цукерваник улучшил ее орбиту по 4 оппозициям 1922—1928 гг. с учетом возмущений от Юпитера. Он же вычислял возмущения планеты и давал ее эфемериды до 1942 г. Численное интегрирование в прямоугольных координатах перед улучшением произведено по элементам Я. П. Цукерваника (Цукерваник. Kleine Planeten, 1942). Улучшение элементов выполнено дважды по 4 оппозициям 1939—1951 гг.

## Э л е м е н т ы

1. Эпоха и оскуляция 1949 март 25.0 вс. вр.

$$\begin{array}{lcl}
 M = 195^{\circ}92619 \\
 \omega = 297.83480 \\
 \Omega = 60.28860 \\
 i = 19.38659 \\
 \varphi = 4.68394 \\
 \mu = 541''.37537 \\
 a = 3.5021816
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1950.0
 \begin{array}{l}
 P_x = 0.9559158 \\
 P_y = 0.1095472 \\
 P_z = -0.2724408 \\
 Q_x = 0.0557411 \\
 Q_y = 0.8432388 \\
 Q_z = 0.5346413
 \end{array}$$

2. Эпоха и оскуляция 1957 июнь 11.0 вс. вр.

$$\begin{array}{lcl}
 M = 291^{\circ}70279 \\
 \omega = 294.02932 \\
 \Omega = 60.10121 \\
 i = 19.39180 \\
 \varphi = 5.14884 \\
 \mu = 542''.25709 \\
 a = 3.4983847
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1950.0
 \begin{array}{l}
 P_x = 0.9498399 \\
 P_y = 0.0505336 \\
 P_z = -0.3086266 \\
 Q_x = 0.1222887 \\
 Q_y = 0.8482685 \\
 Q_z = 0.5152533
 \end{array}$$

Т а б л и ц а 3  
Сравнения с наблюдениями планеты 536 Merapi

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После 2-го улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
*1	1939 ноябрь 6.93	3 <sup>h</sup> 13 <sup>m</sup> 4	+11°19'	— 4 <sup>m</sup> 9	—53'	— 0 <sup>m</sup> 2	— 2'	Укль
2	1940 декабрь 28.83	8 08.4	+41 01	— 7.4	+ 3	— 0.2	+ 1	Турку
3	1941 январь 1.88	8 05.0	+41 26	— 7.5	+ 2	— 0.3	0	"
*4	январь 27.90111	7 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup> 90	+43°13'50".2	— 7 <sup>m</sup> 37 <sup>s</sup> 05	— 3'55".0	—16 <sup>s</sup> 00	+31".2	Алжир
5	январь 29.80946	7 38 23.38	+43 18 03.9	— 8 13.54	— 3 12.5	—54.07	— 1'47".6	Вюрцбург
*6	1949 март 23.56708	13 <sup>h</sup> 36 <sup>m</sup> 6	+10°28'	— 7 <sup>m</sup> 8	+91'	+0 <sup>m</sup> 1	—1'	Симеиз
7	март 28.04	13 33.4	+10 44	— 8. 1	+93	—0. 1	+1	Турку
8	апрель 25.91	13 12.3	+11 24	— 8. 1	+90	0. 0	+1	"
9	1951 август 23.87176	22 <sup>h</sup> 06 <sup>m</sup> 26 <sup>s</sup> 68	—40°57'25".0	—21 <sup>m</sup> 30 <sup>s</sup> 57	—1°26'50".4	+24 <sup>s</sup> 12	+ 2".2	Иоганнесбург
*10	сентябрь 5.89549	21 55 39.79	—41 14 09.1	—21 18.14	—1 16 15.0	+24.01	+ 7.0	"

Наблюдение 5 (Вюрцбург) ошибочно.

### 680 Genoveva

Планета 680 Genoveva открыта Копфом (Korff) в Гейдельберге в 1909 г.

Благодаря своему большому эксцентриситету ( $\varphi = 17^\circ$ ) планета может в афелии сближаться с Юпитером, а потому ее возмущения довольно велики. Карштедт (Kahrstedt) вычислил возмущения планеты за 1909—1932 гг. и улучшил ее орбиту по 6 оппозициям за те же годы. В дальнейшем возмущения не вычислялись, и с 1937 г. планета больше не наблюдалась. Лишь в 1950 г. в Ницце удалось найти планету, причем поправка эфемериды составляла  $\Delta\alpha = +12^m$ . В 1954 г. Брувер (Bruwer) в Иоганнесбурге открыл новую планету 1954 НС. П. Музен (Musen) вычислил для нее орбиту по трем наблюдениям. На основании сходства элементов Киппес (Kippes) установил тождество планеты 1954 НС и 680 Genoveva. Таким образом, из новых наблюдений планеты нам известны только пять точных наблюдений, полученных в Ницце в 1950 г., два приближенных наблюдения 1953 г. (Ницца и Турку) и семь точных наблюдений в Иоганнесбурге 1954 г. (одно приближенное Киото-Квасан).

В основу численного интегрирования положены элементы планеты 1954 НС, определенные Музеном (MPC 1098). Произведено улучшение только элементов  $\mu$  и  $M$  по точным наблюдениям в двух оппозициях 1950 и 1954 гг.

### Э л е м е н т ы

Эпоха и оскуляция 1954 апрель 29.0 вс. вр.

$$\left. \begin{array}{l} M = 328^{\circ}06'182 \\ \omega = 240.57768 \\ \Omega = 40.14965 \\ i = 17.83107 \end{array} \right\} 1950.0 \quad \left. \begin{array}{l} P_x = 0.1591571 \\ P_y = -0.7659410 \\ P_z = -0.6228992 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 17.24537 \\ \mu = 640^{\circ}28'429 \\ \alpha = 3.1315242 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} Q_x = 0.9673087 \\ Q_y = 0.2471665 \\ Q_z = -0.0567683 \end{array} \right\}$$

Таблица 4

Сравнения с наблюдениями планеты 680 Gepheva

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После улучшения		Место наблюдения	
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$		
1950									
1	ноябрь	12.99259	3 <sup>h</sup> 18 <sup>m</sup> 41 <sup>s</sup> .51	+23°58'04".8	—	—	+1 <sup>s</sup> .70	+36".7	Ницца
*2	ноябрь	15.91791	3 15 52.10	+23 57 17.7	+1 <sup>m</sup> 18 <sup>s</sup> .81	+11'41".9	+1.41	+35.8	
3	ноябрь	30.90052	3 02 13.55	+23 46 56.9	—	—	+0.83	+38.2	
4	декабрь	1.85806	3 01 26.19	+23 46 02.9	+1 16.94	+11 50.4	+0.82	+38.2	
5	декабрь	11.83263	2 54 04.53	+23 36 24.8	—	—	+0.41	+36.9	
1953									
6	март	10.90	9 <sup>h</sup> 58 <sup>m</sup> .9	+36°25'	+0 <sup>m</sup> .7	— 2'	+0 <sup>m</sup> .2	+ 1'	" Турку
7	март	14.80	9 55. 6	+36 21	+0.5	— 2	0.0	+ 1	
1954									
8	апрель	8.95104	15 <sup>h</sup> 13 <sup>m</sup> 26 <sup>s</sup> .16	—17°00'05".8	—	—	+0 <sup>s</sup> .27	+25".9	Иоганнесбург
*9	апрель	28.88507	14 56 52.76	—18 41 19.5	+0 <sup>s</sup> .64	+3".4	—0.28	+ 5.8	
10	апрель	28.60413	14 57 09	—18°40'1	—	—	—1 <sup>s</sup>	— 0.9	Киото-Квасан
11	апрель	30.88031	14 54 46.80	—18°50'42".0	—	—	—0 <sup>s</sup> .61	+ 1".2	
12	май	23.83021	14 29 56.64	—20 28 14.3	—	—	—1.69	—17.4	Иоганнесбург
13	май	28.78194	14 25 18.59	—20 47 30.1	—	—	—2.01	—21.7	
14	июнь	2.78056	14 21 11.97	—21 06 57.9	—	—	—2.37	—27.0	"
15	июнь	6.88507	14 18 19.78	—21 23 11.2	—0.10	—25.0	—2.52	—30.1	

## 747 Winchester

Планета 747 Winchester открыта в 1913 г. Меткофом (Metcalf) в Винчестере.

За исходные элементы при интегрировании взяты элементы Чимино (Cimino. Эфемериды малых планет на 1948 г., ч. 2). Улучшение элементов сделано по 4 оппозициям 1949—1954 гг.

## Элементы

Эпоха и оскуляция 1951 декабрь 20.0 вс. вр.

$$\begin{array}{lcl}
 M = 254^{\circ}24288 & & \\
 \omega = 274.64018 & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1950.0 & P_x = +0.6645606 \\
 \Omega = 130.76176 & & P_y = +0.7470948 \\
 i = 18.15130 & & P_z = -0.0144439 \\
 \\ 
 \varphi = 20.20214 & & Q_x = -0.7090006 \\
 \mu = 685^{\circ}56874 & & Q_y = +0.6355431 \\
 a = 2.9920602 & & Q_z = +0.3035309
 \end{array}$$



Таблица 5

Сравнения с наблюдениями планеты 747 Winchester

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
	1949							
1	январь 24.95266	9 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup> 05 <sup>s</sup> .51	+16°29'59".6	+42 <sup>s</sup> 90	+50 <sup>s</sup> 0	— 0 <sup>s</sup> 40	+28 <sup>s</sup> 8	Ницца
2	январь 31.89072	9 42 29.40	+17 47 46.8	+43.51	+20.0	— 0.61	+ 2.9	"
*3	февраль 17.89488	9 27 50.37	+20 46 13.5	—	—	— 9.51	+11.4	Уэль
	1951							
4	апрель 29.98292	16 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 5	— 0°18'	+ 0 <sup>m</sup> 2	— 1'	0 <sup>m</sup> 0	0'	Симеиз
*5	июнь 4.66185	16 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup> .73	+ 0°55'11".3	+14 <sup>s</sup> 62	— 1'09".6	+ 4 <sup>s</sup> 72	—22 <sup>s</sup> 8	Нанкин
	1952							
6	июль 21.61603	20 12 36	—14°53'3	—	—	+ 1 <sup>s</sup>	— 0.8	Киото-Квасан
7	август 17.01743	19 50 24.04	—18°33'29".7	+47.19	— 1 56.9	— 0 <sup>s</sup> 33	— 2.8	Ла-Плата
*8	август 17.03890	19 50 23.09	—18 33 40.7	+43.53	— 2 06.1	— 0.33	+ 2.6	"
	1954							
*9	январь 20.98929	8 06 35.64	+14 32 11.2	+ 1 <sup>m</sup> 30 <sup>s</sup> .17	+ 3 07.9	+ 0.06	+ 0.5	Барселона
10	февраль 3.82153	7 54 44.27	+17 12 20.6	+ 1 27.17	+ 2 59.7	— 0.04	+ 1.8	Мадрид
11	февраль 9.000	7 51 05.2	+18 07 47	—	—	0.0	+ 6"	Тарту
	1955							
12	апрель 18.94483	13 11 59.19	+16 12 14.4	—	—	+13.17	—55".3	Уэль
13	апрель 19.90227	13 11 18.36	+16 15 31.3	—	—	+13.48	—46.7	"
14	май 1.350	13 <sup>h</sup> 03 <sup>m</sup> 7	+16°41'	—	—	0.0	— 1'	Линк

## 794 Irenaea

Планета 794 Irenaea открыта в 1914 г. Пализа (Palisa) в Вене.

За исходные элементы при улучшении орбиты приняты элементы Штеттлера (Stettler. Эфемериды малых планет на 1948 г., ч. 2). Было сделано предварительное улучшение орбиты по двум оппозициям 1952—1953 гг., которые дали возможность составить четыре условных уравнения для определения четырех неизвестных поправок элементов ( $\delta M$ ,  $\delta\omega$ ,  $\delta^a/a$  и  $\delta e$ ). Второе исправление орбиты производилось по трем оппозициям 1948—1953 гг., исправлялись все шесть элементов.

## Элементы

Эпоха и оскуляция 1951 декабрь 20.0 вс. вр.

$$\begin{array}{lcl}
 M = 300^{\circ}44156 & & \\
 \omega = 123.62942 & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1950.0 & \begin{array}{l} P_x = 0.3135308 \\ P_y = -0.8983723 \\ P_z = -0.3076134 \end{array} \\
 \Omega = 164.58812 & & \\
 i = 5.18379 & & \\
 \varphi = 16.52988 & & Q_x = 0.9492745 \\
 \mu = 638^{\circ}35691 & & Q_y = 0.3047203 \\
 a = 3.1378246 & & Q_z = 0.0776123
 \end{array}$$

Т а б л и ц а 6

Сравнения с наблюдениями планеты 794 Irenaea

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
*1	1948 ноябрь 27.94801	3 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup> 07 <sup>s</sup> .09	+12°39'39".3	—	—	+1°92'	+10'9"	Укль
2	1952 апрель 19.94320	15 <sup>h</sup> 26 <sup>m</sup> 8 <sup>s</sup>	—11°29'	+7 <sup>m</sup> 6 <sup>s</sup>	—31'	+0 <sup>m</sup> 8 <sup>s</sup>	— 2'	Симеиз
*3	апрель 25.08170	15 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup> 04 <sup>s</sup> .13	—11°01'44".4	+6 <sup>m</sup> 59 <sup>s</sup> .64	—29°53'7"	+1°86'	0'0"	Укль
*4	1953 октябрь 14.20068	1 11 18.1	+ 2 46 42.6	—4 51.62	—23 39.5	+2.85	+13.8	Линк
5	октябрь 14.24859	1 11 15.72	+ 2 46 25.4	—4 51.71	—23 30.4	+2.74	+13.6	"
6	октябрь 31.14721	0 59 33.34	+ 1 21 20.4	—	—	+2.46	+31.6	"
7	октябрь 31.19235	0 59 31.68	+ 1 21 08.8	—	—	+2.45	+30.9	"
8	ноябрь 5.09656	0 56 50.81	+ 1 03 11.9	—	—	+1.86	+28.5	"
9	ноябрь 5.15004	0 56 49.14	+ 1 03 01.8	—	—	+1.81	+29.0	"

## 1339 Desagneauxa

В 1951 г. Н. Ф. Боева произвела улучшение орбиты планеты 1339 Desagneauxa по 4 оппозициям 1946—1951 гг. (Боева. Эфемериды малых планет на 1953 г.).

После улучшения представление наблюдений за эти годы оказалось удовлетворительным. Однако планета перестала наблюдаться. Это обстоятельство заставило произвести сравнение с наблюдениями за более ранние годы, продолжив численное интегрирование уравнений движения с элементами Н. Ф. Боевой до 1934 г. Невязки оказались очень большими. Впоследствии было обнаружено, что в улучшении Боевой участвовало одно не принадлежащее планете наблюдение (1951 г. январь 9.96233, Укль). Для улучшения орбиты было решено вновь провести численное интегрирование уравнений движения с учетом возмущений от Юпитера и Сатурна, начиная с 1934 г. по 1938 г., взяв за исходные элементы Бойе (Boyer. Эфемериды малых планет на 1948 г., ч. 2). Улучшение элементов проделано по 4 оппозициям 1934—1938 гг. С новыми элементами вновь проведено интегрирование до 1951 г. и обнаружено, что два наблюдения новой планеты, открытой в Укле и получившей предварительное обозначение 1951 AF, в действительности принадлежат планете 1339. Эти наблюдения были использованы при вторичном улучшении, которое было произведено по 5 оппозициям 1942—1951 гг. Наблюдения 1938 и 1941 гг. во втором улучшении не участвовали и являются контрольными.

## Э л е м е н т ы

Эпоха и оскуляция 1946 июнь 29.0 вс. вр.

$$\begin{array}{lcl}
 M = 61^{\circ}32576 & & \\
 \omega = 160.70631 & & \\
 \Omega = 291.81210 & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 1950.0 & \begin{array}{l} P_x = -0.0474516 \\ P_y = 0.8954276 \\ P_z = 0.4426714 \end{array} \\
 i = 8.67738 & & \\
 \varphi = 2.83300 & & Q_x = -0.9890041 \\
 \mu = 675^{\circ}49012 & & Q_y = 0.0200276 \\
 \alpha = 3.0217482 & & Q_z = -0.1465264
 \end{array}$$

Таблица 7

Сравнения с наблюдениями планеты 1339 Desagneaux

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После 1-го улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
*1	1934 декабрь 16.94470	5 <sup>h</sup> 29 <sup>m</sup> 56 <sup>s</sup> .17	+29°35'28".4	+1 <sup>m</sup> 41 <sup>s</sup> .99	— 7'57".3	—23 <sup>s</sup> .10	+1'07.2	Алжир
	2 декабрь 26.00634	5 21 14.20	+29 02 24.6	+1 41.74	— 7 58.3	—22.83	+1 00.3	"
*3	1936 март 14.99985	11 25 13.89	— 8 52 20.4	— 46 <sup>s</sup> .66	+ 6 11.2	—13.43	— 53 <sup>s</sup> .5	"
	4 март 22.02369	11 19 39.33	— 8 23 03.5	— 46.12	+ 6 11.8	—13.39	— 54.7	"
*5	1937 июнь 3.93465	16 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup> .3	—30°23'	+4 <sup>m</sup> .8	+ 4'	+ 0 <sup>m</sup> .4	—1'	Иоганнесбург
	*6 июнь 11.96530	16 <sup>h</sup> 46 <sup>m</sup> 00 <sup>s</sup> .80	—29°56'20".6	+4 <sup>m</sup> 46 <sup>s</sup> .76	+ 2'49".3	+20 <sup>s</sup> .80	—1'05".3	Алжир
*7	1938 июль 28.00938	22 19 50.02	— 3 00 47.2	+5 02.75	+40 25.3	—	—	Гейдельберг
	8 август 4.01361	22 15 27.58	— 3 02 38.6	+5 11.13	+41 04.7	— 2.05	+1 18.9	"
*9	август 24.92178	21 59 24.94	— 3 38 14.0	+5 23.45	+41 35.0	— 2.28	+1 18.7	Укль
10	1941 февраль 22.83000	10 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup> .0	+ 2°59'	—5'.0	+37'	— 1 <sup>m</sup> .0	+6'	Симеиз

Таблица 8

Сравнения с наблюдениями планеты 1339 Desagneaux

№ по пор.	Дата	Наблюдения		После 1-го улучшения		После 2-го улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
8	1938 август 4.01361	22 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 27 <sup>s</sup> .58	— 3°02'38".6	— 2 <sup>s</sup> .05	+ 1'18".9	+ 1 <sup>s</sup> .21	+5".2	Гейдельберг
	9 август 24.92178	21 59 24.94	— 3 38 14.0	— 2.28	+ 1 18.7	+ 1.30	+2.3	Укль
10	1941 февраль 22.83000	10 <sup>h</sup> 02 <sup>m</sup> .0	+ 2°59'	— 1 <sup>m</sup> .0	+ 6'	+ 0 <sup>m</sup> .1	0'	Симеиз
*11	1942 май 23.95068	15 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 17 <sup>s</sup> .19	—28°55'33".2	—36 <sup>s</sup> .21	—7".3	+ 0 <sup>s</sup> .70	— 5".1	Алжир
	12 июнь 22.89523	14 57 32.37	—26 19 01.8	—32.27	+6.9	+ 0.66	— 5.2	"
*13	1946 январь 31.95026	8 37 15.89	+14 28 20.6	— 2 <sup>m</sup> 03 <sup>s</sup> .13	+11'24".5	— 0.33	+ 8.2	"
	14 февраль 5.87565	8 32 51.13	+14 32 25.7	— 2 02.77	+11 10.1	— 0.33	+ 8.6	"
*15	1947 апрель 21.99148	13 58 00.95	—25 21 59.8	— 1 29.13	+ 4 12.9	— 0.35	— 2.5	"
	16 апрель 24.94967	13 55 33.77	—25 08 42.0	— 1 29.02	+ 4 21.8	— 0.38	— 0.9	"
*17	1949 октябрь 16.89692	0 13 09.21	+15 20 50.7	— 1 54.99	—11 34.2	— 0.88	— 3.6	"
	18 октябрь 19.88352	0 11 07.72	+15 04 07.1	— 1 53.73	—11 34.9	— 0.76	— 4.8	"
*19	1951 январь 9.88722	6 59 04.75	+24 13 52.8	— 3 13.03	+11 12.7	— 2.01	+11.2	Укль
	20 январь 12.95778	6 56 08.36	+24 08 50.0	— 3 12.98	+10 46.7	— 2.49	+ 2.2	"
	21 январь 9.96233	7 22 33.87	+22 45 42.4	+20 18.93	— 1°16'46".9	+23 <sup>m</sup> 31 <sup>s</sup> .54	— 1°27'52".1	"

Наблюдение 21 (Укль) не принадлежит планете 1339.

## 1415 Malautra

В 1954 г. опубликованы новые элементы планеты 1415 Malautra, вычисленные по трем наблюдениям, 1949 декабрь—1950 январь (М. Р. Pretre. Annales de l'Observatoire Astronomique de Toulouse, 1954).

В Институте теоретической астрономии проведено численное интегрирование в прямоугольных координатах по элементам Претера с учетом возмущений от Юпитера за период времени 1947—1954 гг.

Улучшение элементов планеты произведено по наблюдениям в 4 оппозициях за этот же период времени.

Ниже приводятся две системы оскулирующих элементов:

Эпоха и оскуляция 1949 декабрь 23.0 вс. вр.

$$\begin{aligned} M &= 266^{\circ}29445 \\ \omega &= 238.60076 \\ \Omega &= 329.39904 \\ i &= 3.43175 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} M \\ \omega \\ \Omega \\ i \end{aligned}} \right\} 1950.0 \quad \begin{aligned} P_x &= -0.8821701 \\ P_y &= -0.4091698 \\ P_z &= -0.2331438 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 4.98633 \\ \mu &= 1069.90346 \\ a &= 2.2238629 \end{aligned} \quad \begin{aligned} Q_x &= 0.4699441 \\ Q_y &= -0.7969038 \\ Q_z &= -0.3976008 \end{aligned}$$

Эпоха и оскуляция 1957 июнь 11.0 вс. вр.

$$\begin{aligned} M &= 356^{\circ}04205 \\ \omega &= 239.35616 \\ \Omega &= 329.25669 \\ i &= 3.42741 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} M \\ \omega \\ \Omega \\ i \end{aligned}} \right\} 1950.0 \quad \begin{aligned} P_x &= -0.8770888 \\ P_y &= -0.4176717 \\ P_z &= -0.2372032 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 4.98027 \\ \mu &= 1069.78637 \\ a &= 2.2240256 \end{aligned} \quad \begin{aligned} Q_x &= 0.4793548 \\ Q_y &= -0.7925524 \\ Q_z &= -0.3769344 \end{aligned}$$

Т а б л и ц а 9

Сравнения с наблюдениями планеты 1415 Malautra

№ по пор.	Дата	Наблюдения		До улучшения		После улучшения		Место наблюдения
		$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1	1947 март 20.91657	10 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup> 11 <sup>s</sup> .08	+ 6°20'51".8	-43".26	+ 6'13".9	-0".77	- 8".3	Алжир
*2	март 21.91042	10 37 20.65	+ 6 24 01.7	-43.45	+ 6 15.6	-0.73	- 8.0	"
	1948							
*3	сентябрь 7.27984	22 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup> 02	- 6 52.0	- 1 <sup>m</sup> 18	- 9.9	+ 0 <sup>m</sup> 02	0.0	Флагстафф
4	сентябрь 8.29984	22 41.01	- 6 56.8	- 1.14	-10.1	+0.04	- 0.4	"
5	октябрь 3.81986	22 21.3	- 8°21'			+0.2	+ 2'	Симеиз
	1949							
6	декабрь 23.08205	7 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 42 <sup>s</sup> .53	+25°15'56".3	- 0".07	+ 0".2	-0".53	+ 9".6	Уэль
	1950							
*7	январь 13.92565	7 25 09.09	+25 51 40.0	- 0.01	+ 0.1	-0.68	+ 5.1	Алжир
8	январь 27.88979	7 08 59.42	+25 53 54.9	- 0.04	+ 0.1	-0.55	+ 4.1	"
	1954							
*9	май 4.88889	15 40 01.74	-26 19 36.3	+ 5 <sup>m</sup> 18 <sup>s</sup> .19	-14'49".6	+0.71	-20".7	Йоганнесбург
10	май 31.55664	15 12 48.45	-24 46 28.0	+ 5 04.30	-18 41.1	+1.02	-19.9	Сидней

ЛИТЕРАТУРА

С а м о й л о в а - Я х о н т о в а Н. С. 1944. Исправление эллиптических орбит. Бюлл. ИТА, 3 (53).

Х а н и н а Ф. Б. 1955. Формулы и таблицы для интерполирования особых координат и вычисления компонентов скоростей. Бюлл. ИТА, 6, 2 (75).

Поступило в Редакцию  
6 марта 1956 г.

---

# СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Н. С. Самойлова-Яхонтова. Малые планеты 1955 г. . . . .	429
Н. Б. Еленевская. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно на- клонности. Часть III. Разложение пертурбационной функции в ряд по степеням приращения эксцентриситета. . . . .	434
Н. Б. Еленевская. Разложение пертурбационной функции в ряд Фурье относительно на- клонности. Часть IV. Разложение пертурбационной функции в пространственной ограничен- ной эллиптической задаче трех точек и в неограниченной задаче $n$ точек . . . . .	466
Г. А. Чеботарев. Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны . . . . .	487
О. Н. Бартенева. Новые элементы восьми малых планет . . . . .	493

*Утверждено к печати*  
Институтом теоретической астрономии  
Академии Наук СССР

\*

Технический редактор *М. Е. Зендель*  
Корректоры *А. А. Гельфанд* и *М. П. Казарновский*

\*

РИСО АН СССР № 29—4В. Подп. к печ. 23/1  
1957 г. М-12060. Бумага  $84 \times 108^{1/16}$ .  
Бум. л.  $2^{3/8}$ . Печ. л. 7.79. Уч.-изд. л. 8.43.  
Тираж 1000. Заказ 832. Цена 5 р. 90 к.

---

1-я тип. Изд. АН СССР.  
Ленинград. В-34, 9 линия, 12.

О П Е Ч А Т К И

<i>Страница</i>	<i>Столбец, строка</i>	<i>Напечатано</i>	<i>Должно быть</i>
498	Табл. 5, столбец 1, строка 2 сверху	2	*2
"	Табл. 5, столбец 1, строка 3 сверху	*3	3
"	Табл. 5, столбец 8, строка 7 сверху	—2.8	+2.8



**5p. 90 к.**

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ  
РЕСПУБЛИК

БЮЛЛЕТЕНЬ ИНСТИТУТА  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

Том VI, № 8 (81)



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР  
МОСКВА 1957 ЛЕНИНГРАД

Директор Института Теоретической Астрономии чл.-корр. АН СССР *М. Ф. Субботин*  
Ответственный редактор проф. *Г. А. Чеботарев*

1-я ТИПОГРАФИЯ  
ИЗДАТЕЛЬСТВА АКАДЕМИИ НАУК СССР  
Ленинград, 34, В. О., 9-я линия, 12

**КОНТРОЛЕР № 1**

При обнаружении недостатков в книге  
просим возвратить книгу вместе с этим  
ярлыком для обмена

# Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 8 (81)

## Потенциал земного притяжения

И. Д. Жонголович

Дается разложение потенциала земного притяжения с точностью до величин порядка квадрата сжатия. Делается попытка определить числовые коэффициенты этого разложения, используя ранее найденные автором (Жонголович, 1952) результаты для внешнего гравитационного поля Земли. Полученное разложение может быть использовано при исследовании движения тел, близких к Земле.

POTENTIEL DE L'ATTRACTION TERRESTRE, par I. Jongolovich. On donne le développement du potentiel de l'attraction de la Terre aux termes du deuxième ordre de l'aplatissement près. On cherche à déterminer les valeurs numériques des coefficients de ce développement en utilisant les résultats obtenus auparavant par l'auteur (Jongolovich, 1952) pour le champ extérieur de la gravitation terrestre. Le développement obtenu peut être utilisé dans l'étude du mouvement des corps dans le voisinage de la Terre.

### § 1. Предварительные замечания

Потенциал земного притяжения во внешнем пространстве необходимо знать при решении различных задач небесной механики, когда учитывается влияние Земли на движение небесного тела. При больших расстояниях от Земли, когда движение тела определяется в основном воздействием Солнца или одной из больших планет, а Земля производит лишь небольшие возмущения в этом движении, можно рассматривать лишь материальную точку, находящуюся в центре инерции Земли и обладающую массой, равной массе всей Земли. Однако для более близких объектов, движение которых в основном определяется притяжением самой Земли, необходимо иметь более подробное выражение для потенциала земного притяжения, учитывающее в той или иной степени расположение земных масс. В теории движения Луны принимается во внимание так называемое возмущение от фигуры Земли, т. е. Земля представляется не материальной точкой, а в виде некоторого материального тела, ограниченного поверхностью уровня силы тяжести, обычно в форме точного эллипсоида вращения. Однако при той точности наблюдения Луны, которую стремится обеспечить современная астрономия, могут иметь значение и возможные отклонения реальной Земли от указанного идеального тела. Тем более необходимо иметь достаточно детальное выражение для потенциала земного притяжения, когда переходим к рассмотрению более близких объектов, как, например, возможных искусственных спутников Земли.

В настоящей работе выводится выражение потенциала земного притяжения, необходимое при решении задач подобного рода, и делается попытка определения численных значений коэффициентов этого выражения.<sup>1</sup> Для последней цели используются найденные ранее (Жонголович, 1952) численные значения коэффициентов в разложении силы тяжести на поверхности Земли по сферическим функциям широты и долготы. Поэтому в работе, прежде всего, находится выражение для потенциала силы тяжести. Полагая в окончательном выражении угловую скорость равной нулю, мы тем самым уничтожаем

<sup>1</sup> При этом применяется метод, аналогичный использованному в работе Б. В. Нумерова и Д. Н. Храмова (1936) для определения фигуры геоида по наблюдениям силы тяжести. Приняты также некоторые обозначения из указанной работы.

влияние центробежной силы и получаем искомое выражение для потенциала земного притяжения.

Окончательный результат работы представлен в § 7 формулой (81), числовые значения коэффициентов этой формулы даны в § 8.

## § 2. Выражение для потенциала силы тяжести

Начало координат берем в центре инерции регуляризированной Земли, ось  $z$  направляем по оси ее вращения к северу, ось  $x$  — параллельно плоскости астрономического меридиана в Гринвиче, ось  $y$  — на  $90^\circ$  к востоку. Сферические геоцентрические координаты элемента массы Земли  $dm$  обозначаем через  $r_1$ ,  $\psi_1$ ,  $l_1$ , а произвольной внешней точки  $M$  — через  $r$ ,  $\psi$ ,  $l$ . Потенциальная функция  $V$  для точки  $M$  напишется в виде

$$V = \int \frac{dm}{\Delta}, \quad (1)$$

а потенциал силы тяжести  $W$  в этой же точке в виде

$$W = fV + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos \gamma}, \quad (3)$$

а

$$\cos \gamma = \sin \psi_1 \sin \psi + \cos \psi_1 \cos \psi \cos (l_1 - l), \quad (4)$$

$f$  — постоянная притяжения,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли и интеграл распространен на все массы Земли.

Разложим потенциал силы тяжести  $W$  в ряд по сферическим функциям. Величину  $\Delta^{-1}$  можно представить бесконечным рядом вида

$$\Delta^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma), \quad (5)$$

где  $P_n(\cos \gamma)$  — сферическая (зональная) функция  $n$ -го порядка от  $\cos \gamma$  и ряд сходится при всяком  $r > r_1$ . Мы примем также, что указанным рядом можно пользоваться для всех точек, лежащих и на самом геоиде, хотя для некоторого числа элементов массы  $dm$  в этом случае будем иметь  $r \leq r_1$ .<sup>1</sup> Подставляя (5) в (2) получаем

$$W = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int r_1^n P_n(\cos \gamma) dm + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi. \quad (6)$$

Введем теперь в рассмотрение значение потенциала силы тяжести  $W_0$  на самом геоиде и следующие вспомогательные величины, являющиеся функциями  $W_0$  и массы Земли  $M$ :

$$r_0 = \frac{fM}{W_0}, \quad g_0 = \frac{fM}{r_0^2}, \quad \sigma = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{r_0}{g_0}; \quad (7)$$

очевидно, что  $r_0$  имеет размерность длины,  $g_0$  — размерность ускорения, а  $\sigma$  является некоторой небольшой безразмерной величиной.

Обозначим, кроме того, через  $\rho$  отношение

$$\rho = \frac{r_0}{r}; \quad (8)$$

очевидно,  $\rho$  для всех точек геоида будет лишь незначительно отличаться от единицы.

<sup>1</sup> О возможности такого допущения см., например: Слудский, 1888, § 14.

При указанных обозначениях легко представить выражение (6) в виде

$$W = W_0 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{Mr_0^n} \int r_1^n P_n(\cos \gamma) dm + \sigma \rho^{-2} \cos^2 \psi \right\}. \quad (9)$$

Если введем еще в рассмотрение безразмерные величины

$$A_n = \frac{1}{Mr_0^n} \int r_1^n P_n(\cos \gamma) dm, \quad (10)$$

$$B_2 = \sigma \cos^2 \psi,$$

то искомое разложение потенциала силы тяжести напишется в следующем виде:

$$W = W_0 \{ \rho A_0 + \rho^2 A_1 + \rho^3 A_2 + \rho^4 A_3 + \rho^5 A_4 + \dots + B_2 \rho^{-2} \}. \quad (11)$$

Чтобы представить входящие сюда величины  $A_n$  в явном виде, воспользуемся так называемой теоремой сложения сферических функций (Идельсон, 1936, стр. 230), которая для  $P_n(\cos \gamma)$  дает выражение

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{k=0}^n \gamma_{nk} P_{nk}(\sin \psi_1) P_{nk}(\sin \psi) \cos k(l_1 - l), \quad (12)$$

где

$$\gamma_{n0} = 1, \quad \gamma_{nk} = 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \quad (k = 1, 2, 3 \dots n). \quad (13)$$

Подставляя (12) в (10), получим следующее, играющее в дальнейшем важную роль, выражение для  $A_n$  в виде сферической функции  $n$ -го порядка:

$$A_n = \sum_{k=0}^n (c_{nk} \cos kl + d_{nk} \sin kl) P_{nk}(\sin \psi), \quad (14)$$

где коэффициенты  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  определяются формулами

$$c_{nk} = \frac{\gamma_{nk}}{Mr_0^n} \int r_1^n P_{nk}(\sin \psi_1) \cos kl_1 dm, \quad (15)$$

$$d_{nk} = \frac{\gamma_{nk}}{Mr_0^n} \int r_1^n P_{nk}(\sin \psi_1) \sin kl_1 dm.$$

### § 3. Исследование коэффициентов $c_{nk}$ и $d_{nk}$

Изменяя в формулах (15)  $k$  от 0 до  $n$ , мы получим все значения коэффициентов  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$ , входящие в выражение  $A_n$ . Число этих коэффициентов равно  $2n+1$ ; под интегралами в этих величинах стоят следующие  $2n+1$  выражений:

$$\begin{aligned} & r_1^n P_{nk}(\sin \psi_1) \quad \text{при } k=0, \\ & r_1^n P_{nk}(\sin \psi_1) \cos kl_1, \quad | \\ & r_1^n P_{nk}(\sin \psi_1) \sin kl_1 \quad | \quad \text{при } k=1, 2 \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Как известно, это есть полный комплект  $2n+1$  объемных сферических функций  $n$ -го порядка, которые представляют собой также  $2n+1$  независимых, однородных гармонических полиномов  $n$ -й степени от трех переменных  $x, y, z$ . Выражение этих полиномов легко получить из (16), пользуясь известными выражениями сферических функций

$P_{nk}(\sin \psi_1)$ , формулами для синусов и косинусов кратных дуг и формулами преобразования сферических координат в прямоугольные. В табл. на стр. 509, в столбце 4 приведен список этих полиномов для  $n=0, 1, 2, 3, 4$ .

Введем в рассмотрение величины  $I_{\alpha\beta\gamma}$ , пропорциональные моментам масс Земли различного порядка, определяемые формулой

$$I_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{Mr_0^3} \int x^\alpha y^\beta z^\gamma dm, \quad (17)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — всевозможные целые числа от 0 до  $n$ , так что всегда  $\alpha + \beta + \gamma = n$ ,  $dm$  — элемент массы Земли с координатами  $x, y, z$ , а интегрирование распространяется на все массы Земли.

Мы можем теперь все величины  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$ , определенные формулами (15), представить линейным образом через указанные величины (17). В таблице, в 5-м столбце, приведен полный список этих величин для  $n=0, 1, 2, 3, 4$ . В 3-м столбце этой таблицы даны значения величин  $I_{\alpha\beta\gamma}$  соответственно формуле (13).

Кроме того, коэффициенты  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  для  $n=1$  и  $n=2$  можно представить иначе, введя в рассмотрение координаты центра инерции Земли  $x_c, y_c, z_c$ , моменты инерции Земли  $A, B, C$  и центробежные моменты инерции Земли  $D, E, F$ , выражения которых хорошо известны. Сравнивая их с выражениями коэффициентов  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  через  $I_{\alpha\beta\gamma}$ , находим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z_c &= r_0 c_{10}, & A+B-2C &= r_0^2 M 2c_{20}, & D &= r_0^2 M d_{21}, \\ x_c &= r_0 c_{11}, & B-A &= r_0^2 M 4c_{22}, & E &= r_0^2 M c_{21}, \\ y_c &= r_0 d_{11}, & & & F &= r_0^2 M 2d_{22}. \end{aligned} \quad (18)$$

Покажем также, что направления главных осей инерции Земли вполне определяются значениями коэффициентов  $c_{20}, c_{21}, d_{21}, c_{22}, d_{22}$ . Пусть по этим направлениям идут оси  $\xi, \eta, \zeta$ . Положение их относительно ранее избранных осей  $x, y, z$  определим эйлеровыми углами  $\psi, \varphi, \theta$ . Известно, что угол  $\theta$  между осью вращения и ближайшей главной осью инерции Земли очень мал (меньше  $1''$ ), поэтому положим  $\sin \theta = \theta$  и  $\cos \theta = 1$ . В таком случае формулы преобразования координат примут вид

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos(\psi + \varphi) + y \sin(\psi + \varphi) + z \theta \sin \varphi, \\ \eta &= -x \sin(\psi + \varphi) + y \cos(\psi + \varphi) + z \theta \cos \varphi, \\ \zeta &= x \theta \sin \psi - y \theta \cos \psi + z. \end{aligned} \quad (19)$$

Составим выражения центробежных моментов инерции  $\int \eta \zeta dm, \int \xi \zeta dm, \int \xi \eta dm$  и приравняем их нулю, так как оси  $\xi, \eta, \zeta$  главные. Из полученных равенств, пользуясь известными выражениями для  $A, B, C, D, E, F$ , получим

$$\begin{aligned} \theta \cos \psi (A+B-2C) + \theta \cos \psi (B-A) + 2\theta \sin \psi F + 2D &= 0, \\ \theta \sin \psi (A+B-2C) - \theta \cos \psi (B-A) - 2\theta \sin \psi F + 2E &= 0, \\ -(B-A) \sin 2(\psi + \varphi) + 2F \cos 2(\psi + \varphi) + 2\theta [D \sin(\psi + 2\varphi) + \\ &+ E \cos(\psi + 2\varphi)] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

На основании соотношений (18) видно, что полученные равенства дают выражения углов Эйлера  $\psi, \varphi, \theta$  через коэффициенты  $c_{20}, c_{21}, d_{21}, c_{22}, d_{22}$ . Пренебрегая произведениями малых величин  $\theta(B-A), \theta D, \theta E, \theta F$ , с достаточной точностью находим из (20)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{c_{21}}{d_{21}}, \quad \operatorname{tg} 2(\psi + \varphi) = \frac{d_{22}}{c_{22}}, \quad \theta = \frac{\sqrt{c_{21}^2 + d_{21}^2}}{-c_{20}}. \quad (21)$$



Список однородных гармонических полиномов от переменных  $x, y, z$  до 4-й степени и выражение соответствующих коэффициентов  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  через моменты инерции масс Земли различного порядка.

$n$	$k$	$l: \nu_{nk}$	Однородные гармонические полиномы	Выражения коэффициентов $c_{nk}$ и $d_{nk}$
0	0	1	1	$c_{00} = 1$
1	0	1	$z$	$c_{10} = I_{001}$
	1	1	$x$	$c_{11} = I_{100}$
	1	1	$y$	$d_{11} = I_{010}$
2	0	1	$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z^2$	$c_{20} = -\frac{1}{2}I_{200} - \frac{1}{2}I_{020} + I_{002}$
	1	3	$3xz$	$c_{21} = I_{101}$
	1	3	$3yz$	$d_{21} = I_{011}$
	2	12	$3x^2 - 3y^2$	$c_{22} = -\frac{1}{4}I_{200} - \frac{1}{4}I_{020}$
	2	12	$6xy$	$d_{22} = \frac{1}{2}I_{110}$
3	0	1	$-\frac{3}{2}x^2z - \frac{3}{2}y^2z + z^3$	$c_{30} = -\frac{3}{2}I_{201} - \frac{3}{2}I_{021} + I_{003}$
	1	6	$-\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}xy^2 + 6xz^2$	$c_{31} = -\frac{1}{4}I_{300} - \frac{1}{4}I_{120} + I_{102}$
	1	6	$-\frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{2}y^3 + 6yz^2$	$d_{31} = -\frac{1}{4}I_{210} - \frac{1}{4}I_{030} + I_{012}$
	2	60	$15x^2z - 15y^2z$	$c_{32} = \frac{1}{4}I_{201} - \frac{1}{4}I_{021}$
	2	60	$30xyz$	$d_{32} = \frac{1}{2}I_{111}$
	3	360	$15x^3 - 45xy^2$	$c_{33} = \frac{1}{24}I_{300} - \frac{1}{8}I_{120}$
	3	360	$45x^2y - 15y^3$	$d_{33} = \frac{1}{8}I_{210} - \frac{1}{24}I_{030}$
4	0	1	$\frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^2y^2 - 3x^2z^2 + \frac{3}{8}y^4 - 3y^2z^2 + z^4$	$c_{40} = \frac{3}{8}I_{400} + \frac{3}{4}I_{220} - 3I_{202} + \frac{3}{8}I_{040} - 3I_{022} + I_{004}$
	1	10	$-\frac{15}{2}xy^2z - \frac{15}{2}x^3z + 10xz^3$	$c_{41} = -\frac{3}{4}I_{121} - \frac{3}{4}I_{301} + I_{103}$
	1	10	$-\frac{15}{2}x^2yz - \frac{15}{2}y^3z + 10yz^3$	$d_{41} = -\frac{3}{4}I_{211} - \frac{3}{4}I_{031} + I_{013}$
	2	180	$-\frac{15}{2}x^4 + 45x^2y^2 + \frac{15}{4}y^4 - 45y^2z^2$	$c_{42} = -\frac{1}{24}I_{400} + \frac{1}{4}I_{202} + \frac{1}{48}I_{040} - \frac{1}{4}I_{022}$
	2	180	$-15x^3y - 15xy^3 + 90xyz^2$	$d_{42} = -\frac{1}{12}I_{310} - \frac{1}{12}I_{130} + \frac{1}{2}I_{112}$
	3	2520	$105x^3z - 415xy^2z$	$c_{43} = \frac{1}{24}I_{301} - \frac{1}{8}I_{121}$
	3	2520	$415x^2yz - 105y^3z$	$d_{43} = \frac{1}{8}I_{211} - \frac{1}{24}I_{031}$
	4	20160	$105x^4 - 630x^2y^2 + 105y^4$	$c_{44} = \frac{1}{192}I_{400} - \frac{1}{32}I_{220} + \frac{1}{192}I_{040}$
	4	20160	$420x^3y - 420xy^3$	$d_{44} = \frac{1}{48}I_{310} - \frac{1}{48}I_{130}$

Так как все величины  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  [формулы (15)] имеют вид  $\int U dm$ , где интеграл распространен на все массы, заключенные внутри геоида регуляризированной Земли (вне геоида масс нет), а  $U$  есть функция гармоническая внутри геоида, то (Идельсон, 1936, стр. 159) все эти величины и величины непосредственно от них зависящие будут стоксовыми постоянными, т. е. они вполне определяются общим количеством массы, поверхностью геоида и угловой скоростью его вращения. Следует также заметить, что различные моменты масс Земли, пропорциональные величинам  $I_{\alpha\beta\gamma}$ , вообще говоря, не являются стоксовыми постоянными и только их комбинации, помещенные в табл. на стр. 509 являются таковыми.

#### § 4. Порядок величин $A_n$ и $B_2$ и точность дальнейших выкладок

Порядок величин  $A_n$  определяется значениями коэффициентов  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$ , а порядок  $B_2$  — значением величины  $\sigma$ . Назовем величиной первого порядка малости величину, близкую к величине второго эксцентриситета  $i = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  обычно употребляемых в геодезии референц эллипсоидов, связанного с сжатием  $\alpha = \frac{a-b}{a}$  формулой  $i^2 = 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \dots$ . Условимся в дальнейшем пренебрегать лишь величинами, порядок которых заведомо равен пяти и выше. Следовательно, будем производить расчеты с точностью до малых величин четвертого порядка. Можно также сказать, что в таком случае будет сохранена точность порядка квадрата сжатия.

Что касается величины  $B_2$ , то ее можно считать величиной второго порядка малости, так как  $\sigma$ , как это видно из формул (7), содержит отношение величин, близких к центробежной силе на экваторе и к силе тяжести на экваторе, что, как известно, имеет порядок сжатия.

Займемся оценкой порядка величин  $A_n$ . Во-первых,  $A_0 = 1$ , как это следует из значения  $c_{00}$ , указанного в табл. на стр. 509. Кроме того, очевидно,  $A_1 = 0$ , ибо начало координатных осей взято нами в центре масс Земли, и поэтому  $c_{10} = c_{11} = d_{11} = 0$ , как это видно из формул (18). Остается оценить лишь порядок величин  $A_2, A_3, A_4$  и т. д.

Так как коэффициенты  $c_{nk}, d_{nk}$ , входящие в эти выражения, зависят от моментов масс Земли различных порядков, то по существу для определения их порядка следовало бы принять какую-либо гипотезу о расположении масс внутри Земли. Однако это можно сделать с большей уверенностью и проще, используя известное выражение для потенциальной функции сжатого уровня эллипсоида вращения. По Стоксу, внешняя потенциальная функция такого эллипсоида вполне определяется его геометрическими параметрами  $a$  и  $b$ , угловой скоростью его вращения  $\omega$  и величиной заключенной в нем массы  $M$  и не требует для своего определения данных о расположении этих масс внутри эллипсоида. Потенциал силы тяжести  $W = fV + \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \psi$  такого эллипсоида находим, если для  $V$  принять следующее точное выражение (Пицетти, 1938, стр. 42),

$$V = \left( M + \frac{2Q}{3} \right) \frac{\arctg E}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{Q}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}} \left( \arctg E - \frac{E}{1 + E^2} \right) (x^2 + y^2) - \frac{2Q}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}} (E - \arctg E) z^2, \quad (22)$$

где  $Q$  определяется уравнением

$$\frac{Q}{a^2 b i^3} [(3 + i^2) \arctg i - 3i] = \frac{\omega^2}{2f}, \quad (23)$$

а величина  $E$  находится из равенства

$$E = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + i}}, \quad (24)$$

где  $\lambda$  есть больший корень уравнения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} + \frac{z^2}{b^2 + \lambda} = 1. \quad (25)$$

Как известно, геоид Земли лишь незначительно отличается от так называемого общего земного эллипсоида, отклоняясь от его поверхности в пределах около 150 м. Этот эллипсоид есть уровенный эллипсоид, центр его совпадает с центром масс Земли, вращается он с той же угловой скоростью, что и Земля, и внутри его заключена масса, равная массе всей Земли (Жонголович, 1952, стр. 62). Можно считать, что его внешнее потенциальное поле лишь незначительно отличается от потенциального поля Земли и параметры, их определяющие, не отличаются значительно друг от друга.

Следует, очевидно, выражение для потенциала силы тяжести  $W$  такого эллипсоида получить в виде разложения подобного (11) и сравнить соответствующие коэффициенты. Используем для этого приведенные выше формулы, пригодные для любого уровенного эллипсоида, и произведем указанное разложение.

Приняв во внимание известные соотношения

$$a^2 - b^2 = b^2 i^2, \quad x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \psi, \quad z^2 = r^2 \sin^2 \psi \quad (26)$$

и вводя временно обозначение

$$k = \frac{bi}{r}, \quad (27)$$

вместо формулы (22) можем написать

$$V = \left( \frac{M}{r} + \frac{2Q}{3r} \right) \left[ \frac{\arctg E}{k} \right] - \frac{Q}{r} \cos^2 \psi \left[ \frac{\arctg E - \frac{E}{1+E^2}}{k^3} \right] - \frac{2Q}{r} \sin^2 \psi \left[ \frac{E - \arctg E}{k^3} \right], \quad (28)$$

а исключая из формул (24) и (25) величину  $\lambda$ , найдем

$$E^2 + E^4 \sin^2 \psi = k^2 (1 + E^2). \quad (29)$$

Разлагая в соответствии с последним соотношением величину  $E$  по нечетным степеням  $k$  до члена с  $k^7$ , получим

$$E = k + \frac{k^3}{2} \cos^2 \psi + \frac{k^5}{8} \cos^2 \psi (7 \cos^2 \psi - 4) + \frac{k^7}{16} \cos^2 \psi (33 \cos^4 \psi - 36 \cos^2 \psi + 8) + \dots \quad (30)$$

Пользуясь этим, найдем для величин, заключенных в квадратные скобки в формуле (28), следующие выражения с точностью до  $k^6$ :

$$\begin{aligned} \frac{\arctg E}{k} &= 1 + k^2 \left( \frac{1}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{3} \right) + k^4 \left( \frac{7}{8} \cos^4 \psi - \cos^2 \psi + \frac{1}{5} \right) + \\ &+ k^6 \left( \frac{33}{16} \cos^6 \psi - \frac{27}{8} \cos^4 \psi + \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{7} \right), \\ \frac{\arctg E - \frac{E}{1+E^2}}{k^3} &= \frac{2}{3} + k^2 \left( \cos^2 \psi - \frac{4}{5} \right) + k^4 \left( \frac{9}{4} \cos^4 \psi - 3 \cos^2 \psi + \frac{6}{7} \right) + \\ &+ k^6 \left( \frac{143}{24} \cos^6 \psi - 11 \cos^4 \psi + 6 \cos^2 \psi - \frac{8}{9} \right), \\ \frac{E - \arctg E}{k^3} &= \frac{1}{3} + k^2 \left( \frac{1}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{5} \right) + k^4 \left( \frac{9}{8} \cos^4 \psi - \cos^2 \psi + \frac{1}{7} \right) + \\ &+ k^6 \left( \frac{143}{48} \cos^6 \psi - \frac{33}{8} \cos^4 \psi + \frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{9} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя эти выражения в формулу (28), группируя члены одного порядка и восстанавливая значение  $k$  по формуле (27), найдем

$$V = \frac{M}{r} - \frac{b^2 i^2}{3r^3} \left( M - \frac{8}{15} Q \right) P_{20} + \frac{b^4 i^4}{5r^5} \left( M - \frac{16}{21} Q \right) P_{40} - \frac{b^6 i^6}{7r^7} \left( M - \frac{8}{9} Q \right) P_{60} + \dots, \quad (32)$$

где  $P_{n0} = P_{n0}(\sin \psi)$  — зональные сферические функции от  $\sin \psi$  для  $n = 2, 4, 6, \dots$

Напишем теперь выражение для потенциала  $W$  силы тяжести рассматриваемого уровня эллипсоида. Вводя в рассмотрение значение потенциала на поверхности этого эллипсоида  $W_0$  и вспомогательные величины  $r_0, g_0, \sigma, \rho$ , аналогичные указанным формулам (7) и (8), получим

$$W = W_0 \{ \rho + \rho^3 A_2 + \rho^5 A_4 + \rho^7 A_6 + \dots + B_2 \rho^{-2} \}, \quad (33)$$

где  $B_2$  естественно определяется той же формулой (11), как и в случае произвольной Земли, а выражения  $A_2, A_4, A_6, \dots$  вместо формул (15) имеют следующий простой вид:

$$A_2 = c_{20} P_{20}, \quad A_4 = c_{40} P_{40}, \quad A_6 = c_{60} P_{60}, \quad (34)$$

причем коэффициенты  $c_{20}, c_{40}, c_{60}$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} c_{20} &= -\frac{b^2 i^2}{3r_0^2} \left( 1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{Q}{M} \right), \\ c_{40} &= +\frac{b^4 i^4}{5r_0^4} \left( 1 - \frac{16}{21} \cdot \frac{Q}{M} \right), \\ c_{60} &= -\frac{b^6 i^6}{7r_0^6} \left( 1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{Q}{M} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

показывающим, что порядки величин  $A_2, A_4, A_6$  будут в основном соответствовать степеням  $i^2, i^4, i^6$ .<sup>1</sup> Кроме того, сравнивая полученные результаты с общими для Земли выражениями (11) и (14), мы видим, что из общей формулы для  $W$  исчезли все  $A_n$  с нечетными индексами  $n$ , а в оставшихся  $A_n$  с четными индексами  $n$  из всех  $2n+1$  коэффициентов  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  сохраняется лишь один  $c_{n0}$ .

Можно, очевидно, предполагать, что все величины, исчезнувшие в выражении  $W$  для общего земного эллипсоида, будут иметь лишь сравнительно небольшие значения для Земли вообще.

На основании сказанного, откинем в общей формуле (11) выражения  $A_5, A_6$  и т. д. как выходящие из пределов принятой точности. Из оставшихся выражений  $A_2$  и  $B_2$  будем считать величинами второго порядка, а  $A_4$  — четвертого порядка. Оставим также выражение  $A_3$  и для удобства и однообразия последующих выкладок будем считать ее величиной третьего порядка малости; возможно, что она окажется еще меньше. Сохраним также для общности все  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$ , хотя многие из них могут оказаться и меньше четвертого порядка. Заранее исключим лишь коэффициенты  $c_{21}$  и  $d_{21}$  как величины для Земли заведомо очень малые, что показывает последняя из формул (21).

Таким образом, в дальнейшем мы будем иметь дело со следующим выражением для  $W$ :

$$W = W_0 \{ \rho + \rho^3 A_2 + \rho^4 A_3 + \rho^5 A_4 + B_2 \rho^{-2} \}, \quad (36)$$

где индексы у выражений, стоящих при различных степенях  $\rho$ , указывают порядок их малости. Все выкладки будем производить, сохраняя формально лишь величины до четвертого порядка малости.

<sup>1</sup> Если для примера определим общий земной эллипсоид следующими параметрами (Жонголович, 1952, стр. 66 и 67):  $a = 6378250$  м,  $\alpha = 1:296.6$ ,  $fM = 39862 \cdot 10^{16}$  см<sup>3</sup> сек.<sup>2</sup>, откуда получается также  $W_0 = 62639 \cdot 10^7$  см<sup>2</sup> сек.<sup>-2</sup>, то по указанным выше формулам получим  $i^2 = 677734 \cdot 10^{-8}$ ,  $b = 6356731$  м,  $r_0 = 6373766$  м,  $fQ = 38243 \cdot 10^{16}$  см<sup>3</sup> сек.<sup>-2</sup>,  $c_{20} = -110076 \cdot 10^{-8}$ ,  $c_{40} = +246 \cdot 10^{-8}$ ,  $c_{60} = -0.6 \cdot 10^{-8}$ .

## § 5. Земной сфероид, его уравнение и величина, характеризующая его размеры

Представляя потенциал силы тяжести в виде (36), т. е. ограничиваясь в разложении (11) лишь определенным количеством членов, мы тем самым заменяем сложную поверхность геоида Земли некоторой более простой фигурой, совпадающей с геоидом лишь с точностью до величин порядка квадрата сжатия. Назовем эту поверхность земным сфероидом четвертого порядка. Для получения уравнения этой поверхности в сферических координатах применим выражение (36) к точке, находящейся на поверхности этого сфероида, т. е. положим  $W = W_0$ , что даст

$$\rho + A_2 \rho^2 + A_3 \rho^3 + A_4 \rho^4 + B_2 \rho^{-2} = 1. \quad (37)$$

Отсюда видно, что  $\rho$  отличается от единицы на величины второго порядка и выше. Положив  $\rho = 1 + s$  и пренебрегая величинами выше четвертого порядка малости, имеем

$$1 + s + A_2(1 + 3s) + A_3 + A_4 + B_2(1 - 2s) = 1. \quad (38)$$

Определив отсюда  $s$  и учитывая (8), находим следующее общее выражение для радиуса вектора  $r$  нашего сфероида:

$$r = r_0(1 + A_2 + B_2 + A_3 + A_4 - 2A_2^2 + 3B_2^2 + A_2B_2). \quad (39)$$

Подставляя сюда выражения для  $B_2$  и  $A_n$  по формулам (11) и (15) и делая некоторые преобразования, получаем выражение для  $r$  в виде суммы сферических функций

$$r = r_0 \left\{ p_{00} + \sum_{n=2}^4 \sum_{k=0}^n (p_{nk} \cos kl + q_{nk} \sin kl) P_{nk}(\sin \psi) \right\}, \quad (40)$$

где коэффициенты  $p_{nk}$  и  $q_{nk}$  следующим образом выражаются через ранее введенные величины:

$$\begin{aligned} p_{00} &= 1 + \frac{2}{3} \sigma + \frac{8}{5} \sigma^2 - \frac{2}{15} \sigma c_{20} - \frac{2}{5} c_{20}^2 - \frac{24}{5} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ p_{20} &= c_{20} - \frac{2}{3} \sigma - \frac{16}{17} \sigma^2 + \frac{10}{21} \sigma c_{20} - \frac{4}{7} c_{20}^2 + \frac{48}{7} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ p_{40} &= c_{40} + \frac{24}{35} \sigma^2 - \frac{12}{35} \sigma c_{20} - \frac{36}{35} c_{20}^2 - \frac{72}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ p_{21} = q_{21} &= 0; \quad p_{22} = c_{22} + \frac{6}{7} \sigma c_{22} + \frac{8}{7} c_{20} c_{22}; \quad q_{22} = d_{22} + \frac{6}{7} \sigma d_{22} + \frac{8}{7} c_{20} d_{22}; \\ p_{30} &= c_{30}; \quad p_{31} = c_{31}; \quad q_{31} = d_{31}; \quad p_{32} = c_{32}; \quad q_{32} = d_{32}; \quad p_{33} = c_{33}; \quad q_{33} = d_{33}; \\ p_{41} &= c_{41}; \quad q_{41} = d_{41}; \quad p_{42} = c_{42} - \frac{2}{35} \sigma c_{22} - \frac{12}{35} c_{20} c_{22}; \quad q_{42} = d_{42} - \frac{2}{35} \sigma d_{22} - \frac{12}{35} c_{20} d_{22}; \\ p_{43} &= c_{43}; \quad q_{43} = d_{43}; \quad p_{44} = c_{44} - \frac{3}{35} (c_{22}^2 - d_{22}^2); \quad q_{44} = d_{44} - \frac{6}{35} c_{22} d_{22}. \end{aligned} \quad (41)$$

Уравнение (40) и представляет собой уравнение в сферических координатах рассматриваемого нами земного сфероида. Для характеристики его формы должны быть известны значения входящих в выражения (41) величин  $c_{nk}$ ,  $d_{nk}$  и  $\sigma$ . В дальнейшем будет показано, как можно определить эти величины из наблюдений силы тяжести на земной поверхности. Что касается величины  $r_0$ , то она характеризует размеры нашего сфероида и значение ее не может быть получено только из данных о гравитационном поле Земли. Для ее определения необходимо иметь также данные о результатах астрономо-геодезических работ на земной поверхности. Наиболее удобно с этой целью использовать

известное понятие об общем земном эллипсоиде, методы получения формы и размеров которого из результатов гравитационных и астрономо-геодезических работ достаточно хорошо разработаны.<sup>1</sup>

Мы предположим, что нам уже известны форма и размеры общего земного эллипсоида, т. е. его сжатие  $\bar{\alpha}$  и полуоси  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Напомним, что центр этого эллипсоида совпадает с центром масс Земли, малая ось — с осью вращения Земли, а поверхность его максимально совпадает с поверхностью геоида Земли. В нашем приближении последнее условие, очевидно, должно относиться к поверхности упомянутого земного сфероида.

Уравнение общего земного эллипсоида

$$\frac{x^2 + y^2}{\bar{a}^2} + \frac{z^2}{\bar{b}^2} = 1 \quad (42)$$

в сферических координатах, с точностью до величин квадрата сжатия, можно представить в виде

$$\bar{r} = \bar{b} [\bar{p}_{00} + \bar{p}_{20} P_{20}(\sin \psi) + \bar{p}_{40} P_{40}(\sin \psi)], \quad (43)$$

где

$$\bar{p}_{00} = 1 + \frac{2}{3} \bar{\alpha} + \frac{7}{15} \bar{\alpha}^2, \quad \bar{p}_{20} = -\frac{2}{3} \bar{\alpha} - \frac{17}{21} \bar{\alpha}^2, \quad \bar{p}_{40} = \frac{12}{35} \bar{\alpha}^2. \quad (44)$$

Составим теперь выражение для расстояния  $N$  вдоль радиуса вектора между поверхностью земного сфероида (40) и поверхностью общего земного эллипсоида (43)

$$N = r - \bar{r} = (r_0 p_{00} - \bar{b} \bar{p}_{00}) + (r_0 p_{20} - \bar{b} \bar{p}_{20}) P_{20}(\sin \psi) + (r_0 p_{40} - \bar{b} \bar{p}_{40}) P_{40}(\sin \psi) + \\ + r_0 \left\{ (p_{22} \cos 2l + q_{22} \sin 2l) P_{22}(\sin \psi) + \sum_{n=3}^4 \sum_{k=0}^n (p_{nk} \cos kl + q_{nk} \sin kl) P_{nk}(\sin \psi) \right\}. \quad (45)$$

Максимальное совпадение указанных двух поверхностей требует минимума для суммы квадратов этих расстояний, т. е. для величины

$$\Omega = \int N^2 ds = 4\pi \left\{ (r_0 p_{00} - \bar{b} \bar{p}_{00})^2 + \frac{1}{5} (r_0 p_{20} - \bar{b} \bar{p}_{20})^2 + (\text{величины высшего порядка}) + \right. \\ \left. + (\text{величины, не содержащие параметров эллипсоида}) \right\}, \quad (46)$$

при подсчете которой интеграл взят по поверхности единичной сферы и использованы известные свойства сферических функций. В соответствии с двумя параметрами  $\bar{b}$  и  $\bar{\alpha}$ , определяющими общий земной эллипсоид, условия минимума функции  $\Omega$  будут

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{b}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\alpha}} = 0, \quad (47)$$

что после соответствующих выкладок приводит к следующим двум уравнениям:

$$r_0 \left( 1 + \frac{2}{3} \sigma + \frac{8}{5} \sigma^2 - \frac{2}{15} \sigma c_{20} - \frac{2}{5} c_{20}^2 - \frac{24}{5} (c_{22}^2 + d_{22}^2) + \frac{2}{3} \bar{\alpha} + \frac{8}{15} \bar{\alpha} \sigma + \frac{7}{15} \bar{\alpha}^2 - \frac{2}{15} \bar{\alpha} c_{20} \right) = \\ = \bar{b} \left( 1 + \frac{4}{3} \bar{\alpha} + \frac{22}{15} \bar{\alpha}^2 \right), \\ r_0 \left( 1 + \frac{4}{5} \sigma - \frac{1}{5} c_{20} + \frac{72}{35} \sigma^2 - \frac{8}{5} \sigma c_{20} - \frac{2}{7} c_{20}^2 - \frac{216}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2) + \frac{7}{5} \bar{\alpha} + \frac{44}{35} \bar{\alpha} \sigma - \frac{17}{35} \bar{\alpha} c_{20} \right) = \\ = \bar{b} \left( 1 + \frac{11}{5} \bar{\alpha} + \frac{66}{35} \bar{\alpha}^2 \right). \quad (48)$$

<sup>1</sup> См., например, предыдущие работы автора (Жонголович, 1952, 1956).

Деля одно уравнение на другое, исключаем сначала величины  $r_0$  и  $\bar{b}$  и из получившегося равенства методом последовательных приближений находим следующее соотношение для  $\bar{\alpha}$ :

$$\bar{\alpha} = \sigma - \frac{3}{2} c_{20} + \frac{31}{14} \sigma^2 - \frac{27}{14} c_{20} \sigma - \frac{3}{8} c_{20}^2 - \frac{72}{7} (c_{22}^2 + d_{22}^2), \quad (49)$$

после чего любое из уравнений (48) дает

$$\bar{b} = r_0 \left[ 1 + c_{20} - \frac{12}{35} \sigma^2 - \frac{24}{35} \sigma c_{20} - \frac{1}{5} c_{20}^2 + \frac{72}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2) \right]. \quad (50)$$

Равенство (49) не дает для определения фигуры земного сфероиды каких-либо новых данных, так как сжатие общего земного эллипсоида  $\bar{\alpha}$  так же определяется по данным о внешнем гравитационном поле Земли, как и величины, стоящие в правой части равенства. Если для одной и другой задачи использован тот же гравитационный материал, то равенство (49) может дать лишь дополнительный контроль сделанных расчетов.

Равенство (50) играет важную роль в разбираемом вопросе, так как дает простое средство для определения величины  $r_0$ , характеризующей размеры земного сфероиды, связывая его определенным образом с малой полуосью общего земного эллипсоида  $\bar{b}$ , определение которой по результатам гравиметрических и астрономо-геодезических работ не представляет принципиальных затруднений. Практическое использование равенства (50) будет выяснено дальше в § 7.

## § 6. Выражение для силы тяжести на земном сфероиде

Пользуясь выражением для потенциала силы тяжести  $W$  в функции сферических координат (36), получаем значение силы тяжести  $g$  по формуле

$$g = \sqrt{g_r^2 + g_\psi^2 + g_l^2}, \quad (51)$$

где

$$g_r = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad g_\psi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad g_l = \frac{1}{r \cos \psi} \cdot \frac{\partial W}{\partial l} \quad (52)$$

суть проекции вектора силы тяжести на оси сферических координат  $\bar{r}$ ,  $\psi$ ,  $\bar{l}$ .

Проделав указанные выкладки, приняв во внимание, что из формулы (8) следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = -r_0^{-1} \rho^2, \quad (53)$$

и учитывая обозначение  $g_0$ , введенное формулой (7), получим для любой точки вне или на сфероиде следующие выражения:

$$\begin{aligned} g_r &= -g_0 (\rho^2 + 3A_2 \rho^4 + 4A_3 \rho^5 + 5A_4 \rho^6 - 2B_2 \rho^{-1}), \\ g_\psi &= g_0 \left( \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \rho^4 + \frac{\partial A_3}{\partial \psi} \rho^5 + \frac{\partial A_4}{\partial \psi} \rho^6 + \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \rho^{-1} \right), \\ g_l &= g_0 \left( \frac{\partial A_2}{\partial l} \rho^4 + \frac{\partial A_3}{\partial l} \rho^5 + \frac{\partial A_4}{\partial l} \rho^6 \right) \sec \psi. \end{aligned} \quad (54)$$

Подставляя сюда значение  $\rho$  для поверхности сфероиды по формуле (39), получим для точки, лежащей на поверхности сфероиды,

$$\begin{aligned} g_r &= -g_0 [1 + A_2 - 4B_2 + 2A_3 + 3A_4 - 5A_2^2 - 5B_2^2 - 10A_2 B_2], \\ g_\psi &= g_0 \left[ \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{\partial A_3}{\partial \psi} + \frac{\partial A_4}{\partial \psi} - 4(A_2 + B_2) \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + (A_2 + B_2) \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right], \\ g_l &= g_0 \left[ \frac{\partial A_2}{\partial l} + \frac{\partial A_3}{\partial l} + \frac{\partial A_4}{\partial l} - 4(A_2 + B_2) \frac{\partial A_2}{\partial l} \right] \sec \psi. \end{aligned} \quad (55)$$

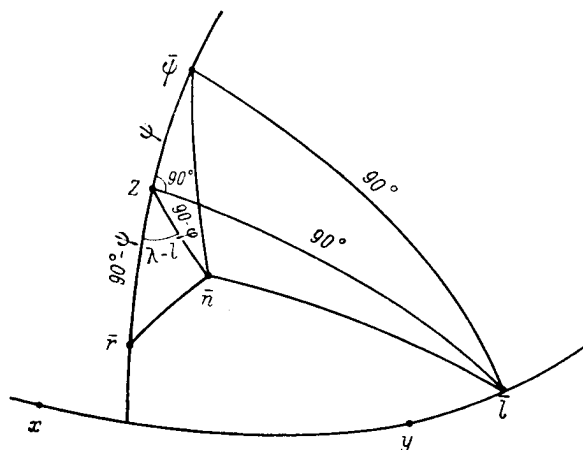
Подставляя эти выражения в формулу (51), получим с принятой точностью для силы тяжести  $g$  на сфероиде следующее выражение:

$$g = g_0 \left[ 1 + A_2 - 4B_2 + 2A_3 + 3A_4 - 5A_2^2 - 5B_2^2 - 10A_2B_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial l} \right)^2 \sec^2 \psi \right]. \quad (56)$$

Величины, стоящие в правой части формулы (56), являются функциями геоцентрических координат  $\psi$  и  $l$ , указывающих направление радиуса вектора, проведенного из центра масс Земли в данную точку на геоиде. Для возможности практического использования выражения (56) необходимо преобразовать его от сферических координат к астрономическим координатам  $\varphi$  и  $\lambda$ , определяющих направление нормали к геоиду, ибо из непосредственных наблюдений мы определяем именно эти координаты в пунктах

определения силы тяжести  $g$ .

Для указанного преобразования необходимо сначала найти выражение для разностей  $\varphi - \psi$  и  $\lambda - l$ . Легко понять, что эти разности будут зависеть от тех же параметров  $c_{nk}$ ,  $d_{nk}$ ,  $\tau$ , которыми определяется форма земного сфероида, и не будут зависеть от величины  $r_0$ , определяющей линейные размеры сфероида. Для получения искомых соотношений найдем сначала выражения косинусов углов, которые внешняя нормаль  $\bar{n}$  к сфероиду составляет с направлением осей сферических координат  $\bar{r}$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{l}$  — касательных к соответствующим координатным линиям сферических координат. Пусть на вспомогательной сфере (см. рисунок) точка  $Z$  соответствует оси  $OZ$ , направленной по оси вращения Земли к северу, точка



$\bar{r}$  — радиусу вектору, или направлению первой оси сферических координат, точка  $\bar{\psi}$  — второй оси, точка  $\bar{l}$  — третьей оси и, наконец, точка  $\bar{n}$  — направлению внешней нормали к сфероиду в данном пункте.

Из сферических треугольников  $\bar{n}Z\bar{r}$ ,  $\bar{n}Z\bar{\psi}$ ,  $\bar{n}Z\bar{l}$ , известные величины сторон и углов которых помечены на рисунке, получаем искомые косинусы углов  $\cos(\bar{n}, \bar{r})$ ,  $\cos(\bar{n}, \bar{\psi})$ ,  $\cos(\bar{n}, \bar{l})$  и соответствующие проекции вектора силы тяжести на оси  $\bar{r}$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{l}$

$$g_r = -g \cos(\bar{n}, \bar{r}) = -g [\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos(l - \lambda)], \\ g_{\psi} = -g \cos(\bar{n}, \bar{\psi}) = -g [\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos(l - \lambda)], \\ g_l = -g \cos(\bar{n}, \bar{l}) = -g [-\cos \varphi \sin(l - \lambda)]. \quad (57)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями (55) и принимая во внимание зависимость между  $g$  и  $g_0$ , данную формулой (56), получаем с принятой точностью

$$\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos(l - \lambda) = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \psi} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial l} \right)^2 \sec^2 \psi, \\ -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos(l - \lambda) = \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{\partial A_3}{\partial \psi} + \frac{\partial A_4}{\partial \psi} - 5A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + 5B_2 \frac{\partial B_2}{\partial \psi}, \quad (58) \\ \cos \varphi \cos \psi \sin(l - \lambda) = \frac{\partial A_2}{\partial l} + \frac{\partial A_3}{\partial l} + \frac{\partial A_4}{\partial l} - 5A_2 \frac{\partial A_2}{\partial l}.$$



Из этих выражений следующим образом можно получить искомые разности  $\varphi - \psi$  и  $\lambda - l$ , которые называются также абсолютными отклонениями отвесных линий на сфероиде. Умножим первое уравнение (58) на  $\sin \psi$ , второе уравнение на  $-\cos \psi$  и, сложив их, получим

$$\sin \varphi - \sin \psi = - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right)^2 + \frac{\partial A_2}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial l} \right)^2 \sec^2 \psi \right] \sin \psi - \\ - \left[ \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + \frac{\partial A_3}{\partial \psi} + \frac{\partial A_4}{\partial \psi} - 5A_2 \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + 5B_2 \frac{\partial B_2}{\partial \psi} \right] \cos \psi. \quad (59)$$

Так как при малой разности углов  $\varphi - \psi$  можно написать

$$\varphi - \psi = (\sin \varphi - \sin \psi) \sec \psi + \frac{1}{2} (\sin \varphi - \sin \psi)^2 \operatorname{tg} \psi \sec^2 \psi \dots, \quad (60)$$

то, учитывая выражение (59), получаем

$$\varphi - \psi = - \frac{\partial \left( A_2 + B_2 + A_3 + B_4 - \frac{5}{2} A_2^2 + \frac{5}{2} B_2^2 \right)}{\partial \psi} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial l} \right)^2 \sec^2 \psi \operatorname{tg} \psi. \quad (61)$$

Из третьего уравнения (58) найдем  $\lambda - l$ . Так как эта величина, очевидно, второго порядка, то с принятой точностью достаточно заменить синус ее самим углом, а множитель  $\cos \varphi \cos \psi$ , сохраняя в нем лишь величины второго порядка, представить в виде

$$\cos \varphi \cos \psi = \cos^2 \psi \left[ \cos(\varphi - \psi) - \sin(\varphi - \psi) \operatorname{tg} \psi \right] = \cos^2 \psi \left[ 1 - \frac{\partial (A_2 + B_2)}{\partial \psi} \operatorname{tg} \psi \right]. \quad (62)$$

Приняв это во внимание, легко получаем

$$(\lambda - l) \cos^2 \psi = - \frac{\partial \left( A_2 + A_3 + A_4 - \frac{5}{2} A_2^2 \right)}{\partial l} + \frac{\partial A_2}{\partial l} \cdot \frac{\partial (A_2 + B_2)}{\partial \psi} \operatorname{tg} \psi. \quad (63)$$

Формулы (61) и (63) показывают, что разности  $\varphi - \psi$  и  $\lambda - l$  содержат величины второго порядка малости и выше. Поэтому при преобразовании различных выражений от сферических координат к астрономическим можно во всех членах третьего и четвертого порядка малости просто заменить  $\psi$  на  $\varphi$  и  $l$  на  $\lambda$ , а соответствующие преобразования необходимо сделать лишь в членах второго порядка малости, причем эти изменения будут величинами четвертого порядка. Обозначим в общем виде такой член второго порядка в виде  $F_2(\psi, l)$ . По строке Тейлора получаем

$$F_2(\psi, l) = F_2(\varphi, \lambda) + (\psi - \varphi) \frac{\partial F_2(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi} + (l - \lambda) \frac{\partial F_2(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda}. \quad (64)$$

Во входящих сюда разностях  $(\psi - \varphi)$  и  $(l - \lambda)$ , очевидно, достаточно сохранить лишь члены второго порядка, т. е. согласно формулам (61) и (63) принять

$$\psi - \varphi = \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_2}{\partial \varphi}, \\ l - \lambda = \frac{\partial A_2}{\partial \lambda} \sec^2 \varphi. \quad (65)$$

Применяя теперь указанное преобразование к членам  $A_2$  и  $4B_2$ , стоящим в квадратных скобках, равенства (56), получаем для выражения силы тяжести на сфероиде  $g$

следующее окончательное выражение, все члены которого содержат лишь астрономические координаты  $\varphi$  и  $\lambda$ :

$$g = g_0 \left[ 1 + A_2 - 4B_2 + 2A_3 + 3A_4 - 5A_2^2 - 5B_2^2 - 10A_2B_2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{7}{2} \left( \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} \right)^2 - 2 \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} + \frac{3}{2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial \lambda} \right)^2 \sec^2 \varphi \right]. \quad (66)$$

Подставляя сюда выражения для  $B_2$  и  $A_{nk}$  по формулам (10) и (14) и делая некоторые преобразования, получаем выражение для  $g$  в виде суммы сферических функций

$$g = g_0 \left\{ a_{00} + \sum_{n=2}^4 \sum_{k=0}^n (a_{nk} \cos k\lambda + b_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi) \right\}, \quad (67)$$

где коэффициенты  $a_{nk}$  и  $b_{nk}$  следующим образом выражаются через ранее введенные величины:

$$a_{00} = 1 - \frac{8}{3} \sigma - \frac{68}{15} \sigma^2 + \frac{44}{15} \sigma c_{20} + \frac{4}{5} c_{20}^2 + \frac{48}{5} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ a_{20} = c_{20} + \frac{8}{3} \sigma + \frac{52}{21} \sigma^2 - \frac{76}{21} \sigma c_{20} - \frac{1}{7} c_{20}^2 + \frac{12}{7} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ a_{40} = 3c_{40} + \frac{72}{35} \sigma^2 + \frac{24}{35} \sigma c_{20} - \frac{198}{35} c_{20}^2 - \frac{396}{35} (c_{22}^2 + d_{22}^2); \\ a_{21} = b_{21} = 0; \quad a_{22} = c_{22} - \frac{68}{7} \sigma c_{22} + \frac{2}{7} c_{20} c_{22}; \quad b_{22} = d_{22} - \frac{68}{7} \sigma d_{22} + \frac{2}{7} c_{20} d_{22}; \quad (68) \\ a_{30} = 2c_{30}; \quad a_{31} = 2c_{31}; \quad b_{31} = 2d_{31}; \quad a_{32} = 2c_{32}; \quad b_{32} = 2d_{32}; \quad a_{33} = 2c_{33}; \quad b_{33} = 2d_{33}; \\ a_{41} = 3c_{41}; \quad b_{41} = 3d_{41}; \quad a_{42} = 3c_{42} + \frac{4}{35} \sigma c_{22} - \frac{66}{35} c_{20} c_{22}; \quad b_{42} = 3d_{42} + \frac{4}{35} \sigma d_{22} - \frac{66}{35} c_{20} d_{22}; \\ a_{43} = 3c_{43}; \quad b_{43} = 3d_{43}; \quad a_{44} = 3c_{44} - \frac{33}{70} (c_{22}^2 - d_{22}^2); \quad b_{44} = 3d_{44} - \frac{66}{77} c_{22} d_{22}.$$

## § 7. Определение параметров потенциала земного притяжения из результатов наблюдений и окончательное выражение этого потенциала

Как уже было упомянуто раньше, в настоящей работе имеется в виду определение параметров, характеризующих потенциал земного притяжения из результатов определения силы тяжести на земной поверхности. При этом будем предполагать, что предварительно на основании материала о мировой гравиметрической съемке получено разложение силы тяжести в ряд по сферическим функциям вида

$$g = A_{00} + \sum_{n=2}^4 \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\lambda + B_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi), \quad (69)$$

где  $\varphi$  и  $\lambda$  астрономические координаты.

Если бы вся поверхность Земли была сплошь покрыта гравиметрическими наблюдениями, то получение значений любых коэффициентов ряда (69) производилось бы просто и независимо друг от друга. Это разложение можно было бы сделать практически до любой желаемой гармоник  $n$ . Для наших целей можно было бы использовать лишь начальные члены такого разложения до  $n=4$ , в соответствии с введенным выше понятием о земном сфероиде четвертого порядка, и откинуть в разложении (69) остальные члены как выходящие за пределы принятой точности вычислений.

Однако в данное время мировая гравиметрическая съемка еще очень далека от сплошной сети, хотя бы и редко расположенных пунктов. Огромные пространства земной поверхности, особенно поверхности мирового океана, еще совершенно гравиметрически не обследованы. Поэтому в данное время определение даже небольшого числа коэффициентов ряда (69) представляет значительные трудности. Включение в разложение гармоник высшего порядка не оправдывается наличием имеющегося материала и может даже внести дополнительные искажения в коэффициенты первых гармоник. Вероятно, наиболее рационально при таких обстоятельствах в разложении (69) ограничиться лишь членами до  $n=4$  в соответствии с произведенной заменой точной фигуры геоида земным сфероидом четвертого порядка. Оставшиеся коэффициенты в таком разложении и будут единообразным образом соответствовать имеющемуся наличию данных о гравиметрическом поле Земли.

Как бы то ни было, для дальнейших приложений следует принять известным разложение (69) до значения  $n=4$ . Такое разложение не должно содержать гармоники первого порядка, т. е. коэффициентов  $A_{10}$ ,  $A_{11}$ ,  $B_{11}$ , для чего делается необходимое уравнивание исходного гравиметрического материала (Жонголович, 1952, стр. 78); кроме того, в этом разложении можно с принятой точностью заранее положить  $A_{21} = B_{21} = 0$ , как это следует из результатов наблюдений над изменением широт.

Таким образом, будем предполагать, что мы имеем разложение (69), для которого известны численные значения всех 20 оставшихся коэффициентов начальных гармоник до  $n=4$ . Это именно и является тем основным материалом, который служит для определения искомых параметров, характеризующих потенциал земного притяжения. Сравнивая между собой коэффициенты разложений (67) и (69), получаем первые 20 из 22 уравнений системы (70).<sup>1</sup> Два последних уравнения этой системы соответствуют ранее приведенным соотношениям (7) для величины  $\sigma$  и (50) для связи между  $r_0$  и малой полуосью общего земного эллипсоида  $\bar{b}$ , получаемой из результатов астрономо-геодезических работ на материках. Система 22 уравнений (70) содержит, таким образом, 22 неизвестных, а именно: 19 коэффициентов  $c_{nk}$  и  $d_{nk}$  и три величины  $\sigma$ ,  $g_0$ ,  $r_0$ .

Система уравнений для определения параметров потенциала земного притяжения

$$\begin{aligned}
 1) \quad A_{00} &= g_0 \left( 1 - \frac{8}{3} \sigma - \frac{68}{15} \sigma^2 + \frac{44}{15} \sigma c_{20} + \frac{4}{5} c_{20}^2 + \frac{48}{5} c_{22}^2 + \frac{48}{5} d_{22}^2 \right), \\
 2) \quad A_{20} &= g_0 \left( c_{20} + \frac{8}{3} \sigma + \frac{52}{21} \sigma^2 - \frac{76}{21} \sigma c_{20} - \frac{1}{7} c_{20}^2 + \frac{12}{7} c_{22}^2 + \frac{12}{7} d_{22}^2 \right), \\
 3) \quad A_{40} &= g_0 \left( 3c_{40} + \frac{72}{35} \sigma^2 + \frac{24}{35} \sigma c_{20} - \frac{198}{35} c_{20}^2 - \frac{396}{35} c_{22}^2 - \frac{396}{35} d_{22}^2 \right), \\
 4) \quad A_{22} &= g_0 \left( c_{22} - \frac{68}{7} \sigma c_{22} + \frac{2}{7} c_{20} c_{32} \right), \\
 5) \quad B_{22} &= g_0 \left( d_{22} - \frac{68}{7} \sigma d_{22} + \frac{2}{7} c_{20} d_{22} \right), \\
 6) \quad A_{30} &= g_0 2c_{30}, \\
 7) \quad A_{31} &= g_0 2c_{31}, \\
 8) \quad B_{31} &= g_0 2d_{31}, \\
 9) \quad A_{32} &= p_0 2c_{32}, \\
 10) \quad B_{32} &= g_0 2d_{32}, \\
 11) \quad A_{33} &= g_0 2c_{33},
 \end{aligned} \tag{70}$$

<sup>1</sup> Эти 20 уравнений совпадают с уравнениями (59), полученными в упомянутой уже работе (Нумеров и Храмов, 1936), если в последних положить  $c_{21} = d_{21} = 0$ .

$$\begin{aligned}
12) \quad & B_{33} = g_0 2d_{33}, \\
13) \quad & A_{41} = g_0 3c_{41}, \\
14) \quad & B_{41} = g_0 3d_{41}, \\
15) \quad & A_{42} = g_0 \left( 3c_{42} + \frac{4}{35} \sigma c_{22} - \frac{66}{35} c_{20} c_{22} \right), \\
16) \quad & B_{42} = g_0 \left( 3d_{42} + \frac{4}{35} \sigma d_{22} - \frac{66}{35} c_{20} d_{22} \right), \\
17) \quad & A_{43} = g_0 3c_{43}, \\
18) \quad & B_{43} = g_0 3d_{43}, \\
19) \quad & A_{44} = g_0 \left( 3c_{44} - \frac{33}{70} c_{22}^2 + \frac{33}{70} d_{22}^2 \right), \\
20) \quad & B_{44} = g_0 \left( 3d_{44} - \frac{33}{35} c_{22} d_{22} \right), \\
21) \quad & \sigma = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{r_0}{g_0}, \\
22) \quad & \bar{b} = r_0 \left( 1 + c_{20} - \frac{12}{35} \sigma^2 - \frac{24}{35} \sigma c_{20} - \frac{1}{5} c_{20}^2 + \frac{72}{35} c_{22}^2 + \frac{72}{35} d_{22}^2 \right).
\end{aligned} \tag{70}$$

Решение этой системы уравнений необходимо производить методом последовательных приближений. Можно этот процесс выполнить следующим образом.

Прежде всего составим 19 величин

$$\tau_{nk} = \frac{A_{nk}}{A_{00}}, \quad \pi_{nk} = \frac{B_{nk}}{A_{00}}. \tag{71}$$

Разделив четвертое и пятое из уравнений (70) на первое из них, имеем с точностью до величин второго порядка  $c_{22} = \tau_{22}$  и  $d_{22} = \pi_{22}$ , а следовательно, с точностью до величин 4-го порядка

$$c_{22}^2 + d_{22}^2 = \tau_{22}^2 + \pi_{22}^2 \quad \text{и} \quad c_{22}^2 - d_{22}^2 = \tau_{22}^2 - \pi_{22}^2.$$

Разделив затем второе из уравнений (70) на первое, найдем, применяя метод последовательных приближений, следующее выражение  $c_{20}$  с полной принятой точностью:

$$c_{20} = \tau_{20} - \frac{8}{3} \sigma - \frac{100}{9} \sigma^2 + \frac{4}{21} \sigma \tau_{20} + \frac{1}{7} \tau_{20}^2 - \frac{12}{7} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2). \tag{72}$$

Точно так же, разделив третье уравнение (70) на первое из них и приняв во внимание найденное выражение (72) для  $c_{20}$ , найдем аналогичное выражение для

$$c_{40} = \frac{1}{3} \tau_{40} + \frac{40}{3} \sigma^2 - \frac{72}{7} \sigma \tau_{20} + \frac{66}{35} \tau_{20}^2 + \frac{132}{35} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2). \tag{73}$$

Определяя непосредственно из первого и последнего из уравнений (70)  $g_0$  и  $r_0$  и приняв во внимание выражение (72) для  $c_{20}$ , находим

$$g_0 = A_{00} \left[ 1 + \frac{8}{3} \sigma + \frac{124}{9} \sigma^2 + \frac{4}{3} \sigma \tau_{20} - \frac{4}{5} \tau_{20}^2 - \frac{48}{5} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2) \right] \tag{74}$$

и

$$r_0 = \bar{b} \left[ 1 - \tau_{20} + \frac{8}{3} \sigma + \frac{1144}{63} \sigma^2 - \frac{124}{21} \sigma \tau_{20} + \frac{37}{35} \tau_{20}^2 - \frac{72}{35} (\tau_{22}^2 + \pi_{22}^2) \right]. \tag{75}$$

Подставляя эти значения для  $g_0$  и  $r_0$  в выражение для  $\sigma$  в предпоследнем из уравнений (70), находим

$$\sigma = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{b}{A_{00}} (1 - \tau_{20}). \quad (76)$$

Величина  $\sigma$  и должна быть рассчитана в первую очередь по этой формуле, так как она входит во все предыдущие формулы.

Подставив теперь в четвертую и пятую из формул (70) величину  $g_0$  по формуле (74) и  $c_{20}$  по формуле (72), находим

$$c_{22} = \tau_{22} \left( 1 - \frac{2}{7} \tau_{20} + \frac{164}{21} \sigma \right), \quad (77)$$

$$d_{22} = \pi_{22} \left( 1 - \frac{2}{7} \tau_{20} + \frac{164}{21} \sigma \right). \quad (78)$$

Для остальных параметров аналогичным образом получаем с той же точностью

$$\begin{aligned} c_{30} &= \frac{1}{2} \tau_{30}; \quad c_{31} = \frac{1}{2} \tau_{31}; \quad d_{31} = \frac{1}{2} \tau_{31}; \quad c_{32} = \frac{1}{2} \tau_{32}; \\ d_{32} &= \frac{1}{2} \pi_{32}; \quad c_{33} = \frac{1}{2} \tau_{33}; \quad d_{33} = \frac{1}{2} \pi_{33}; \quad c_{41} = \frac{1}{3} \tau_{41}; \\ d_{41} &= \frac{1}{3} \pi_{41}; \quad c_{42} = \frac{1}{3} \tau_{42} - \frac{12}{7} \sigma \tau_{22} + \frac{22}{35} \tau_{20} \tau_{22}; \\ d_{42} &= \frac{1}{3} \pi_{42} - \frac{12}{7} \sigma \pi_{22} + \frac{22}{35} \tau_{20} \pi_{22}; \quad c_{43} = \frac{1}{3} \tau_{43}; \\ d_{43} &= \frac{1}{3} \pi_{43}; \quad c_{44} = \frac{1}{3} \tau_{44} + \frac{11}{70} (\tau_{22}^2 - \pi_{22}^2); \quad d_{44} = \frac{1}{3} \pi_{44} + \frac{11}{35} \tau_{22} \pi_{22}. \end{aligned} \quad (79)$$

Заметим попутно, что определение указанных неизвестных из системы (70) дает также возможность получить просто величину массы Земли и значение потенциала силы тяжести на поверхности геоида Земли по формулам

$$\begin{aligned} fM &= g_0 r_0^2, \\ W_0 &= g_0 r_0 \end{aligned} \quad (80)$$

соответственно с формулами (7).

Когда получены значения указанных выше параметров, окончательное выражение потенциала земного притяжения удобно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} fV &= \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 [c_{20} P_{20}(\sin \delta) + (c_{22} \cos 2t_{rp.} - d_{22} \sin 2t_{rp.}) P_{22}(\sin \delta)] + \right. \\ &+ \left( \frac{r_0}{r} \right)^3 [c_{30} P_{30}(\sin \delta) + (c_{31} \cos t_{rp.} - d_{31} \sin t_{rp.}) P_{31}(\sin \delta) + \\ &+ (c_{32} \cos 2t_{rp.} - d_{32} \sin 2t_{rp.}) P_{32}(\sin \delta) + \\ &+ (c_{33} \cos 3t_{rp.} - d_{33} \sin 3t_{rp.}) P_{33}(\sin \delta)] + \\ &+ \left( \frac{r_0}{r} \right)^4 [c_{40} P_{40}(\sin \delta) + (c_{41} \cos t_{rp.} - d_{41} \sin t_{rp.}) P_{41}(\sin \delta) + \\ &+ (c_{42} \cos 2t_{rp.} - d_{42} \sin 2t_{rp.}) P_{42}(\sin \delta) + (c_{43} \cos 3t_{rp.} - d_{43} \sin 3t_{rp.}) P_{43}(\sin \delta) + \\ &+ (c_{44} \cos 4t_{rp.} - d_{44} \sin 4t_{rp.}) P_{44}(\sin \delta)] \Big\}. \end{aligned} \quad (81)$$

Это выражение легко получается из (36), если положить в нем  $B_2=0$ , подставить  $W_0 = \frac{fM}{r_0}$  и принять во внимание выражения  $A_2, A_3, A_4$  по формуле (14). Кроме того, вместо сферических координат, широты  $\psi$  и долготы  $l$  (счет от меридиана Гринвича к востоку), подставлены соответствующие им значения астрономических экваториальных координат, склонения  $\varphi$  и гринвичского угла  $t_{гр.}$  (счет к западу), по формулам

$$\begin{aligned}\psi &= \delta, \\ l &= 360^\circ - t_{гр.}\end{aligned}\quad (82)$$

### § 8. Опыт определения численных значений коэффициентов формулы (81)

Для этой цели используем разложение силы тяжести, которое было получено в одной из предыдущих работ автора (Жонголович, 1952). Способ получения этого разложения, а также сведения о материалах мировой гравиметрической съемки, на основании которых оно получено, подробно изложены в упомянутой работе. Ниже приводятся числовые значения коэффициентов  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$  в разложении силы тяжести по сферическим функциям до четвертого порядка на основании результатов указанной работы. При этом взяты результаты второго варианта под № 14 из табл. 7, помещенной на стр. 50—51 этой работы. Этот именно результат выбран как наиболее вероятный из тех решений, в которых разложение производилось по сферическим функциям только до четвертого порядка.

Кроме того, в значение  $A_{00}$ , полученное в указанном решении 1952 г., вводим теперь поправку, равную — 12 мгл, с целью возможного исправления употребляющейся до сих пор Потсдамской системы в соответствии с результатами современных абсолютных измерений силы тяжести.<sup>1</sup>

Числовые значения (в мгл) коэффициентов  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$  формулы (69)

$A_{00} = 979\,764.83$	$A_{40} = 8.90$
$A_{20} = 3\,444.40$	$A_{41} = -1.96$
$A_{22} = 5.56$	$B_{41} = -1.18$
$B_{22} = -1.53$	$A_{42} = 0.01$
$A_{30} = 8.67$	$B_{42} = 0.24$
$A_{31} = 3.90$	$A_{43} = 0.14$
$B_{31} = -1.87$	$B_{43} = -0.03$
$A_{32} = 0.70$	$A_{44} = 0.04$
$B_{32} = -0.98$	$B_{44} = 0.05$
$A_{33} = 0.83$	
$B_{33} = 0.68$	

Приняв, кроме того, для общего земного эллипсоида значения

$$\bar{a} = 6\,378\,070 \text{ м}, \quad \bar{\alpha} = 1:296.6,$$

а для угловой скорости вращения Земли в 1 сек. среднего времени значение

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164.1}$$

и, произведя все расчеты по формулам (71)—(80), получим следующие окончательные результаты.

<sup>1</sup> В данное время еще нет возможности получить окончательное значение этой поправки, так как еще не сделан общий анализ всех произведенных для этого измерений, а некоторые абсолютные определения и гравиметрические связи в разных странах еще не вполне закончены или не опубликованы. Возможно, что на предстоящем в 1957 г. съезде Международного геодезического и геофизического союза будет уже принято некоторое решение об этой поправке. Указанная в тексте предварительная величина — 12 мгл представляет округленное среднее значение из известных в данное время отдельных выводов.

Числовые значения величин, входящих в формулу (81)

$c_{20} = -109\,808 \times 10^{-8}$	$c_{40} = 358 \times 10^{-8}$	
$c_{22} = 574$	$c_{42} = -67$	
$d_{20} = -158$	$d_{40} = -40$	
$c_{30} = 442$	$c_{42} = 0$	$r_0 = 6\,363\,553 \text{ м}$
$c_{31} = 199$	$d_{42} = 8$	$fM = 39\,859 \times 10^{18} \frac{\text{см}^3}{\text{сек.}^2}$
$d_{31} = -96$	$c_{43} = 5$	
$c_{32} = 36$	$d_{43} = -1$	
$d_{32} = -50$	$c_{44} = 1$	
$c_{33} = 42$	$d_{44} = 2$	
$d_{33} = 34$		

В процессе вычислений получены также следующие величины:

$$\sigma = 171\,889 \times 10^{-8}, \quad g_0 = 984\,293.9 \text{ мгл}, \quad W_0 = 62\,636 \times 10^7 \frac{\text{см}^2}{\text{сек.}^2}.$$

Полученные результаты не могут претендовать на большую точность. Основной причиной этого являются огромные пробелы в мировой гравиметрической съемке, на которой основано использованное здесь разложение силы тяжести. Большие пространства мирового океана, а также материки в южном полушарии гравиметрически исследованы еще совершенно недостаточно. Это обстоятельство может быть причиной значительных систематических, не поддающихся точному учету ошибок в полученных результатах. Поэтому полученный результат следует рассматривать как предварительный, дающий лишь ориентировочное представление о порядке различных членов в разложении потенциала земного притяжения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Жонголович И. Д. 1952. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Труды ИТА, 3, Л.—М.  
 Жонголович И. Д. 1956. Об определении размеров общего земного эллипсоида. Труды ИТА, 6, Л.—М.  
 Идельсон Н. И. 1936. Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике. 2-е изд., Л.—М.  
 Нумеров Б. В. и Д. Н. Храмов, 1936. Об определении фигуры геоида на основании наблюдений силы тяжести. Бюлл. Астр. инст., 40, Л.  
 Пицетти П. 1933. Основы механической теории фигуры планет. М.—Л.  
 Слудский Ф. А. 1888. Общая теория фигуры Земли. М.

Поступило в Редакцию  
 11 июля 1956 г.

# Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 8 (81)

## Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида

Ю. В. Батраков

Рассматривается движение частицы с массой, равной нулю, под действием притяжения однородного трехосного эллипсоида, мало отличающегося от сферы того же объема. Эллипсоид равномерно вращается вокруг одной из осей симметрии.

Показано существование периодических решений третьего, второго и первого сортов в рассматриваемой задаче.

THE PERIODICAL MOTIONS OF A PARTICLE UNDER GRAVITATION OF A ROTATING THREE-AXIAL ELLIPSOID, by J. W. Batrakov. — The article discusses the motion of a particle of zero mass under the action of gravity of a homogeneous three-axial ellipsoid, the latter differing but little from a sphere of the same volume and rotating uniformly about one of the axes of symmetry.

The possibility of periodical solutions of the third, second and first sort in this problem has been established.

Периодические движения в окрестности гравитирующего трехосного эллипсоида, насколько нам известно, еще никем не изучались. Известны лишь результаты, относящиеся к частному случаю, когда гравитирующий эллипсоид является эллипсоидом вращения. Наиболее полно они изложены в классической монографии (Moulton, 1920). Упомянем еще работу Г. Н. Дубошина (1945), где рассмотрены пространственные периодические движения под действием притяжения эллипсоида вращения и нескольких концентрических круговых колец, расположенных в экваториальной плоскости.

Между тем, изучение свойств движения в окрестности трехосного эллипсоида было бы весьма полезным, так как, помимо получения новых результатов, позволило бы с более общей точки зрения осветить уже известные особенности движения в различных частных случаях.

Настоящая работа преследует цель изучить условия существования некоторых простейших семейств периодических решений в окрестности гравитирующего трехосного эллипсоида. Первые два параграфа имеют вводный характер и содержат главным образом общие вопросы. В остальных параграфах мы занимаемся непосредственно периодическими решениями. В целях удобства изложения в первую очередь рассматриваются решения третьего сорта и лишь в последнюю очередь — решения первого сорта. При этом мы старались по возможности делать упор на вопросы существования, не увлекаясь фактическим вычислением решений.

### § 1. Постановка задачи. Разложение пертурбационной функции

Рассмотрим однородный гравитирующий эллипсоид и обозначим его массу через  $M$ . Если уравнение эллипсоида записано в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1.1)$$



то потенциал эллипсоида на внешнюю точку с координатами  $x, y, z$  выражается известной формулой

$$V = \frac{3}{4} k^2 M \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s} \right) \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}, \quad (1.2)$$

где  $k^2$  — постоянная тяготения, а  $u$  — решение уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1. \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что эллипсоид (1.1) мало отличается от сферы радиуса  $R$  и что объем его равен объему сферы. Пользуясь этим, можно написать

$$a^2 = R^2 + \alpha, \quad b^2 = R^2 + \beta, \quad c^2 = R^2 + \gamma, \quad (1.4)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — малые величины, с точностью до малых более высоких порядков, связанные соотношением

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

в силу равенства объемов эллипсоида и сферы. Если ввести эксцентриситеты главных меридианных сечений

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}, \quad \varepsilon' = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{b^2}}, \quad (1.5)$$

то с точностью до малых второго порядка будем иметь

$$\varepsilon^2 = \frac{2\alpha + \beta}{R^2}, \quad \varepsilon'^2 = \frac{\alpha + 2\beta}{R^2}. \quad (1.6)$$

Разложим потенциал (1.2) по степеням  $\alpha, \beta, \gamma$ , тогда получим

$$V = \frac{k^2 M}{r} + \frac{3}{10} k^2 M \frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{r^5} + \dots \quad (1.7)$$

Пусть эллипсоид (1.1) равномерно вращается вокруг оси  $OZ$  с угловой скоростью  $n$  и пусть система координат  $OX, OY, OZ$  связана с эллипсоидом и вращается вместе с ним. Тогда уравнения движения частицы под влиянием притяжения эллипсоида во вращающихся осях можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} - n^2 x &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} - n^2 y &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $V$  определяется формулой (1.7).

Введем в эти уравнения и в выражение (1.7) безразмерный малый параметр  $\eta$ . Для этого положим

$$\frac{3}{10} k^2 M \alpha = \eta x, \quad \frac{3}{10} k^2 M \beta = \eta y, \quad \frac{3}{10} k^2 M \gamma = \eta z, \quad (1.9)$$

где  $\lambda, \mu, \nu$  — некоторые величины такой же размерности как и  $k^2 M \alpha$ , связанные условием  $\lambda + \mu + \nu = 0$ . Тогда  $V$  представится рядом по степеням малого параметра

$$V = V_0 + \theta V_1 + \theta^2 V_2 + \dots,$$

где

$$V_0 = \frac{k^2 M}{r}, \quad V_1 = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5} = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 - (\lambda + \mu) z^2}{r^5}, \dots \quad (1.10)$$

При  $\theta = 0$  эллипсоид обращается в сферу и движение частицы происходит по невозмущенному кеплеровскому эллипсу. Член  $\theta V_1$  можно рассматривать как наиболее существенную часть пертурбационной функции.

Выразим  $V_1$  через эллиптические элементы. Координаты частицы выражаются через эллиптические элементы следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $r$  есть радиус-вектор частицы ( $OP$  на рис. 1),  $u$  — аргумент широты,  $i$  — наклонность орбиты к экваториальной плоскости эллипсоида,  $\Omega = \angle NO\Omega = n't$  — расстояние узла от направления оси  $OX$ . Через  $ON$  на рис. 1 обозначено начальное положение большой оси эллипсоида, через  $P$  — частица, через  $\Pi$  — перигелий орбиты. Возводя (1.11) в квадраты и подставляя в (1.10), получим

$$\begin{aligned} V_1 = \frac{\lambda + \mu}{2r^3} \left\{ 1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4 + z(1 - \sigma^2)^2 \cos(2u + 2\Omega) + z\sigma^4 \cos(2u - 2\Omega) + \right. \\ \left. + 2z\sigma^2(1 - \sigma^2) \cos 2\Omega + 6\sigma^2(1 - \sigma^2) \cos 2u \right\}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где обозначено

$$\sigma = \sin \frac{i}{2}, \quad z = \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}. \quad (1.13)$$

При помощи известных таблиц (Cayley, 1859),<sup>1</sup> ограничиваясь четвертыми степенями эксцентриситета  $e$ , получаем разложения

$$\begin{aligned} r^{-3} &= a^{-3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos l + \right. \\ &+ \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2l + \frac{53}{8} e^3 \cos 3l + \frac{77}{8} e^4 \cos 4l \left. \right\}, \\ r^{-4} \cos 2v &= a^{-3} \left\{ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{12} e^3 \right) \cos l + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{41}{48} e^4 \right) \cos 2l + \right. \\ &+ \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos 3l + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos 4l + \\ &+ \frac{845}{48} e^3 \cos 5l + \frac{533}{16} e^4 \cos 6l \left. \right\}, \\ r^{-3} \sin 2v &= a^{-3} \left\{ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{24} e^3 \right) \sin l + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{37}{48} e^4 \right) \sin 2l + \right. \\ &+ \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \sin 3l + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{16} e^4 \right) \sin 4l + \\ &+ \frac{845}{48} e^3 \sin 5l + \frac{533}{16} e^4 \sin 6l \left. \right\}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

<sup>1</sup> Или аналогичных таблиц в курсе М. Ф. Субботина (1937).

где  $v$  — истинная, а  $l$  — средняя аномалии. Через  $a$  обозначена большая полуось орбиты частицы (не путать с большой полуосью эллипсоида). Учитывая, что  $u = v + \omega$ , где  $\omega$  — расстояние перигелия от узла, окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 V_1 = & \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left\{ (1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4) \left[ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos l + \right. \right. \\
 & \left. + \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2l + \frac{53}{8} e^3 \cos 3l + \frac{77}{8} e^4 \cos 4l \right] + \\
 & + 2(1 - \sigma^2)^2 \left[ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{16} e^3 \right) \cos(l + 2\omega + 2\Omega) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2\omega - 2\Omega) + \right. \\
 & + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2\omega + 2\Omega) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2\omega - 2\Omega) + \\
 & + \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2\omega + 2\Omega) + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2\omega + 2\Omega) + \\
 & + \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2\omega + 2\Omega) + \frac{533}{16} e^4 \cos(6l + 2\omega + 2\Omega) \left. \right] + \\
 & + 2\sigma^4 \left[ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{16} e^3 \right) \cos(l + 2\omega - 2\Omega) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2\omega + 2\Omega) + \right. \\
 & + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2\omega - 2\Omega) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2\omega + 2\Omega) + \\
 & + \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2\omega - 2\Omega) + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2\omega - 2\Omega) + \\
 & + \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2\omega - 2\Omega) + \frac{533}{16} e^4 \cos(6l + 2\omega - 2\Omega) \left. \right] + \\
 & + 2\sigma^2(1 - \sigma^2) \left[ \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) \cos 2\Omega + \left( \frac{3}{2} e + \frac{27}{16} e^3 \right) \{ \cos(l - 2\Omega) + \right. \\
 & + \cos(l + 2\Omega) \} + \left( \frac{9}{4} e^2 + \frac{7}{4} e^4 \right) \{ \cos(2l - 2\Omega) + \cos(2l + 2\Omega) \} + \\
 & + \frac{53}{16} e^3 \{ \cos(3l + 2\Omega) + \cos(3l - 2\Omega) \} + \\
 & + \frac{77}{16} e^4 \{ \cos(4l + 2\Omega) + \cos(4l - 2\Omega) \} \left. \right] + \\
 & + 6\sigma^2(1 - \sigma^2) \left[ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{16} e^3 \right) \cos(l + 2\omega) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2\omega) + \right. \\
 & + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2\omega) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2\omega) + \\
 & + \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2\omega) + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2\omega) + \\
 & + \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2\omega) + \frac{533}{16} e^4 \cos(6l - 2\omega) \left. \right] \}. \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

Разложение (1.15) понадобится нам в дальнейшем.

## § 2. Поверхность нулевых скоростей и точки либрации

Уравнения движения точки в окрестности гравитирующего эллипсоида (1.8) допускают интеграл Якоби

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = n^2(x^2 + y^2) + \frac{2k^2M}{r} + 2\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5} + \dots = C. \quad (2.1)$$

Полагая  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , получаем уравнение поверхности нулевых скоростей, ограничивающей области возможных движений. Это уравнение с точностью до членов первого порядка относительно  $\theta$  имеет вид

$$2\Omega = n^2(x^2 + y^2) + \frac{2k^2M}{r} + 2\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5} = C. \quad (2.2)$$

Так как  $x, y, z$  входят в  $\Omega$  только посредством квадратов, то поверхность нулевых скоростей обладает тремя плоскостями симметрии, совпадающими с координатными плос-

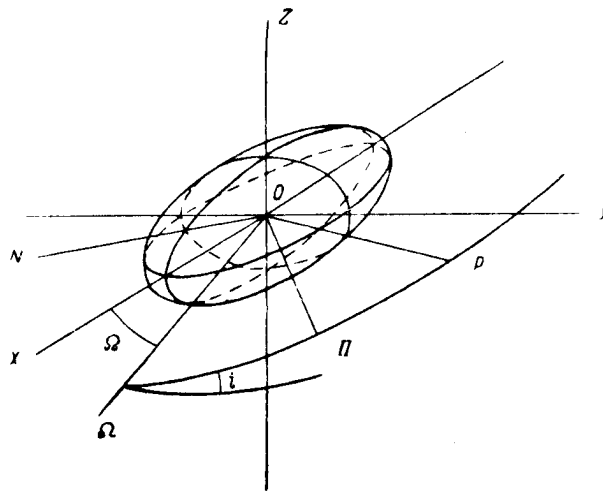


Рис. 1.

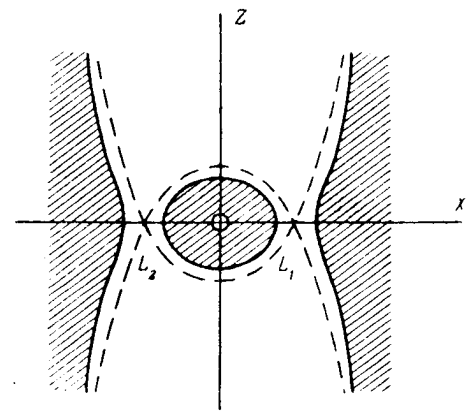


Рис. 2.

костями. Если постоянная  $C$  достаточно велика, то поверхность  $2\Omega = C$  имеет вид, представленный на рис. 2, где заштрихованы области возможного движения. По мере уменьшения  $C$  внешняя и внутренняя области возможного движения сближаются и при некотором  $C$  соприкасаются в двойных точках. Двойные точки поверхности нулевых скоростей обычно называются точками либрации.

Чтобы определить координаты точек либрации, необходимо положить  $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$  и определить  $x, y, z$ , удовлетворяющие этим уравнениям. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= x \left( n^2 - \frac{k^2 M}{r^3} + \frac{2\theta \lambda}{r^5} - 5\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^7} + \dots \right) = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= y \left( n^2 - \frac{k^2 M}{r^3} + \frac{2\theta \mu}{r^5} - 5\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^7} + \dots \right) = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= z \left( -\frac{k^2 M}{r^3} + \frac{2\theta \nu}{r^5} - 5\theta \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^7} + \dots \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из уравнений (2.3) видно, что единственные возможные решения будут при  $z=0$ , если только  $\theta$  достаточно мало. Полагая  $z=0$ , имеем два случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad y=0, \quad z=0, \quad n'^2 - \frac{k^2 M}{|x|^3} - \frac{3\theta\lambda}{|x|^5} + \dots = 0, \\ 2) \quad x=0, \quad z=0, \quad n'^2 - \frac{k^2 M}{|y|^3} - \frac{3\theta\mu}{|y|^5} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отсюда окончательно получаем:

$$\begin{aligned} 1) \quad y=0, \quad z=0, \quad x = \pm \left( a_0 + \frac{\theta\lambda}{n'^2 a_0^4} + \dots \right), \\ 2) \quad x=0, \quad z=0, \quad y = \pm \left( a_0 + \frac{\theta\mu}{n'^2 a_0^4} + \dots \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где для краткости обозначено

$$a_0 = \sqrt[3]{\frac{k^2 M}{n'^2}}. \quad (2.6)$$

Таким образом, имеются четыре точки либрации, расположенные на продолжении осей эллипсоида в экваториальной плоскости симметрично относительно начала координат. Частица, помещенная в любую из этих точек будет находиться в состоянии покоя относительно вращающейся системы координат.

Вычислим еще значения постоянной  $C$  для каждой из этих точек. С точностью до малых выше первого порядка будем иметь:

$$\begin{aligned} 1) \quad C = \frac{3k^2 M}{a_0} + \frac{20\lambda}{a_0^3}, \\ 2) \quad C = \frac{3k^2 M}{a_0} + \frac{20\mu}{a_0^3}. \end{aligned}$$

Исследование устойчивости движения в найденных точках либрации проведено в работе В. К. Абалакина (1957), опубликованной в этом же номере „Бюллетеня“. Там же получены периодические решения в окрестности этих точек.

### § 3. Периодические решения третьего сорта

Приведем уравнения движения частицы к форме, удобной для исследования, взяв в качестве переменных канонические элементы Делоне:

$$\begin{aligned} L &= k \sqrt{M \sqrt{a}}, & l &= n(t - t_0), \\ G &= k \sqrt{M \sqrt{a(1-e^2)}}, & g &= \omega, \\ H &= k \sqrt{M \sqrt{a(1-e^2)} \cos i}, & h &= \Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $a$  — большая полуось орбиты частицы,  $e$  — эксцентриситет,  $i$  — наклонность орбиты к экваториальной плоскости,  $n$  — среднее движение,  $\omega$  — расстояние перигелия от узла,  $\Omega$  — расстояние от узла до направления оси  $OX$  вращающейся системы координат (долгота узла). Тогда, как легко показать, уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$F = F_0 + \theta F_1 + \theta^2 F_2 + \dots, \\ F_0 = \frac{k^4 M^2}{2L^2} + n'H, \quad F_1 = \frac{\lambda x^2 + \mu g^2 + \nu z^2}{r^5}, \dots \quad (3.3)$$

Здесь  $F_1, F_2 \dots$  являются периодическими функциями переменных  $l, g, h$  вида

$$\sum_{i,j,k} K(L, G, H) \cos(il + jg + 2kh), \quad (3.4)$$

где  $K(L, G, H)$  — коэффициенты, аналитическим образом зависящие от  $L, G, H$ .

Правые части уравнений (3.2) не зависят явно от времени, и сами эти уравнения аналогичны уравнениям движения в ограниченной задаче трех тел. Но периодические решения третьего сорта ограниченной задачи изучались в нашей более ранней работе (Батраков, 1955). Поэтому некоторыми результатами, полученными в этой работе, можно воспользоваться для получения периодических решений третьего сорта в поле тяготения трехосного эллипсоида.

Напомним, в чем состоит метод Пуанкаре (Poincaré, 1892) для нахождения периодических решений.

При  $\theta = 0$  система (3.2) имеет решение:

$$L = L_0, \quad \dot{l} = nt + l_0, \\ G = G_0, \quad g = g_0, \\ H = H_0, \quad h = -n't + h_0, \quad (3.5)$$

где  $L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, h_0$  — произвольные постоянные, а  $n = -\frac{\partial F_0}{\partial L_0}$ . Если  $n$  и  $n'$  соизмеримы, т. е. отношение  $\frac{n}{n'}$  равно отношению двух целых взаимно простых чисел, то (3.5) является периодическим решением и носит название порождающего решения. Обозначим период этого решения через  $T_0$ .

Для того чтобы найти периодические решения системы (3.2) при  $\theta \neq 0$ , близкие к (3.5) и обращающиеся в них при  $\theta = 0$ , полагаем

$$L = L_0 + \beta_1 + \varphi_1, \quad l = nt + l_0 + \gamma_1 + \tau_1, \\ G = G_0 + \beta_2 + \varphi_2, \quad g = g_0 + \gamma_2 + \tau_2, \\ H = H_0 + \beta_3 + \varphi_3, \quad h = -n't + h_0 + \gamma_3 + \tau_3, \quad (3.6)$$

где  $\beta, \gamma$  — начальные отклонения решения (3.5) от порождающего решения, а  $\varphi_i, \tau_i$  — функции времени, обращающиеся в нуль при  $t = 0$ , и составляем уравнения

$$\varphi_1(T) = 0, \quad \psi_1(T) = n\Delta T + \tau_1(T) = 0, \\ \varphi_2(T) = 0, \quad \psi_2(T) = \tau_2(T) = 0, \\ \varphi_3(T) = 0, \quad \psi_3(T) = -n'\Delta T + \tau_3(T) = 0, \quad (3.7)$$

где  $T$  — период искомого решения, вообще говоря отличный от  $T_0$  на величину  $\Delta T$  порядка малого параметра  $\theta$ .

Разлагая левые части уравнений (3.7) по степеням  $\beta, \gamma, \Delta T, \theta$ , получаем уравнения для определения  $\beta, \gamma, \Delta T$ , соответствующих периодическому решению в виде функций  $\theta$ . В этих уравнениях члены нулевой степени относительно  $\beta, \gamma, \Delta T$  зависят от начальных значений порождающего решения (3.5) и, вообще говоря, отличны от нуля. Между тем определение  $\beta, \gamma, \Delta T$  в виде голоморфных функций  $\theta$ , обращающихся в нуль при  $\theta = 0$ , возможно только в том случае, когда эти свободные члены отсутствуют. Приравнявая нулю свободные члены разложений  $\varphi_i, \psi_i$  по степеням

$\beta, \gamma, \Delta T$ , получаем условия, которым должны удовлетворять величины  $L_0, G_0, H_0, l_0, g_0, h_0$  для того, чтобы в окрестности (3.5) существовали искомые периодические решения. В нашем случае эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial [F_1]}{\partial L_0} = \frac{\partial [F_1]}{\partial g_0} = \frac{\partial [F_1]}{\partial h_0} = 0, \\ \frac{\partial [F_1]}{\partial G_0} = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где обозначено

$$[F_1] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} F_1 dt, \quad (3.9)$$

причем при вычислении (3.9) вместо  $L, G, H, l, g, h$  нужно подставить их значения из порождающего решения (3.5).

Если  $\beta, \gamma, \Delta T$  известны, то тем самым известно и искомое периодическое решение, так как его легко получить со сколь угодно большой точностью фактическим разложением в ряд или численным интегрированием. Таким образом, все дело сводится к определению  $\beta, \gamma, \Delta T$  из уравнений (3.7).

В силу того, что правые части уравнений движения (3.2) не зависят явно от времени, начало отсчета времени всегда можно выбрать так, что будет

$$l_0 = \gamma_1 = 0. \quad (3.10)$$

Кроме того, в силу существования интеграла Якоби  $F = \text{const}$  одно из уравнений (3.7) должно быть следствием остальных, и шесть величин  $\gamma_2, \gamma_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \Delta T$  связаны лишь пятью независимыми соотношениями (3.7). Так как производная  $\frac{\partial F_0}{\partial L_0}$  отлична от нуля, то зависимым можно считать уравнение  $\varphi_1(T) = 0$ . Что же касается вопроса о том, какое из начальных отклонений считать произвольным, то он решается рассмотрением всевозможных якобианов пятого порядка от функций  $\varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$  по величинам  $\gamma, \beta, \Delta T$ . Если, например, якобиан

$$\frac{\partial (\varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial (\gamma_2, \gamma_3, \beta_1, \beta_2, \Delta T)} \quad (3.11)$$

при  $\beta = \gamma = \Delta T = 0 = 0$  отличен от нуля, то из уравнений (3.7) при условиях (3.8) возможно определить  $\beta_1, \beta_2, \gamma_2, \gamma_3, \Delta T$  в виде голоморфных функций  $\beta_3$  и  $\theta$  и, следовательно,  $\beta_3$  можно считать произвольным.

В нашем случае якобиан (3.11) имеет вид (Батраков, 1955, стр. 115)

$$\frac{\partial F_0}{\partial H_0} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial L_0^2} \cdot \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial L_0^2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0 \partial h_0} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial g_0} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0^2} \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Таким образом, определение  $\beta, \gamma, \Delta T$  как функций  $\theta$  возможно, и периодические решения системы (3.7) в окрестности порождающих решений существуют, если начальные значения порождающих решений удовлетворяют уравнениям (3.8) и если для этих начальных значений один из якобианов типа (3.11), в нашем случае (3.12), отличен от нуля. Вопрос о существовании периодических решений сводится к исследованию уравнений (3.8) и якобиана (3.12).

Рассмотрим сначала первые три уравнения (3.8). Как видно из (1.15), разложение  $F_1$  имеет вид

$$\sum K(L, G, H) \cos(il + 2jg + 2kh) (j, k = -1, 0, +1). \quad (3.13)$$

Если вместо  $l, g, h$  подставить их значения в порождающем решении, то аргументы в (3.13) примут вид

$$(in + 2kn')t + il_0 + 2jg_0 + 2kh_0 \quad (j, k = -1, 0, 1). \quad (3.14)$$

Отсюда видно, что критические члены могут быть только при условии

$$in + 2n' = 0$$

или

$$\frac{n}{n'} = \pm \frac{2}{i}. \quad (3.15)$$

Придавая последовательно значения  $i = 1, 2, \dots$ , получим для критических аргументов следующие возможные случаи:

$$1) \frac{n}{n'} = \pm \frac{2}{1}, \quad 2) \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{1}, \quad 3) \frac{n}{n'} = \pm \frac{2}{3}, \quad 4) \frac{n}{n'} = \pm \frac{1}{2}, \dots \quad (3.16)$$

Следовательно, периодические решения третьего сорта, для существования которых требуется, чтобы  $n$  и  $n'$  были соизмеримы, возможны<sup>1</sup> только в случаях (3.16), где верхний знак соответствует прямому движению частицы, т. е. в том же направлении, в каком происходит движение эллипсоида, а нижний — обратному движению. Но обратное движение можно рассматривать как прямое по орбите с наклонностью, большей  $90^\circ$ . Это позволяет ограничиться рассмотрением только прямых движений.

Допустим, что между  $n$  и  $n'$  имеет место соотношение  $\frac{n}{n'} = \frac{2}{g}$ , где  $g \geq 1$  — целое число. Тогда для  $[F_1]$  получаем разложение вида

$$\sum_{j=-1, 0, +1} K(L_0, G_0, H_0) \cos(ql_0 + 2jg_0 + 2h_0). \quad (3.17)$$

Отсюда сразу видно, что  $\frac{\partial [F_1]}{\partial l_0}$  и  $\frac{\partial [F_1]}{\partial h_0}$  различаются только постоянным множителем и, следовательно, из первых трех уравнений (3.8) независимыми являются только два. В силу этого одну из величин  $l_0, h_0$  можно выбрать произвольно. Положим  $l_0 = 0$ . Тогда из (3.8), учитывая (3.17), получим

$$g_0 = k_1 \frac{\pi}{2}, \quad h_0 = k_2 \frac{\pi}{2} \quad (k_1, k_2 = 0, 1, 2, 3). \quad (3.18)$$

Значит, если  $l_0 = 0$ , а  $g_0$  и  $h_0$  удовлетворяют (3.18), то первые три уравнения (3.8) будут удовлетворены.

Теперь обратимся к последнему уравнению (3.8). Переходя к кеплеровским переменным, это уравнение можно переписать так (Батраков, 1955, стр. 116):

$$\frac{1-e^2}{e} \cdot \frac{\partial [F_1]}{\partial e} - \frac{1-2\sigma^2}{4\sigma} \cdot \frac{\partial [F_1]}{\partial \sigma} = 0. \quad (3.19)$$

Соотношение (3.19) представляет собой связь между эксцентриситетом и наклонностью порождающего решения, в окрестности которого возможно существование орбит третьего сорта.

Нас могут интересовать только такие порождающие решения, которые достаточно близки к кругам, так как только в этом случае, применяя разложение (1.15), можно получить более или менее точные результаты. Но если составить уравнение (3.19) для соизмеримостей  $2/1$  и  $2/3$ , то легко убедиться, что оно имеет вид

$$\frac{x_a(\sigma)}{e} + b(\sigma) + c(\sigma)e + \dots = 0$$

<sup>1</sup> Мы рассматриваем здесь только тот случай, когда в  $F_1$  имеются критические члены. Случай, когда в  $F_1$  критические члены отсутствуют, нуждается в дополнительном исследовании.



и при  $\kappa$  нулевого порядка относительно  $e$  удовлетворяется только сравнительно большими значениями  $e$ . Поэтому соизмеримости 2/1 и 2/3 мы рассматривать не будем, и вопрос о существовании в них решений третьего сорта оставим открытым. Обратимся к изучению других соизмеримостей.

$$\text{Соизмеримость } \frac{n}{n'} = \frac{1}{1}$$

Если, как мы условились выше, положить  $l_0 = 0$ , то функция  $[F_1]$  в этой соизмеримости имеет вид

$$\begin{aligned} [F_1] = & \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left\{ (1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) + \right. \\ & + \kappa (1 - \sigma^2)^2 \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2g_0 + 2h_0) + \frac{\kappa}{24} \sigma^4 e^4 \cos(2g_0 - 2h_0) + \\ & \left. + \kappa \sigma^2 (1 - \sigma^2) \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2h_0 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где  $g_0, h_0$  имеют значения (3.18). При помощи (3.20) из (3.19) получаем

$$\begin{aligned} 6(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + \kappa \{ (-4 + 7\sigma^2 - 3\sigma^4) \cos(2g_0 + h_0) + (9\sigma^2 - 9\sigma^4) \cos 2h_0 \} + \\ + e^2 \left\{ 9(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) - \frac{33}{5} \kappa (9 - 28\sigma^2 + 19\sigma^4) \cos(2g_0 + 2h_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \kappa \sigma^4 \cos(2g_0 - 2h_0) - \frac{9}{4} \kappa (1 - 56\sigma^2 + 56\sigma^4) \cos 2h_0 \right\} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) удовлетворяется малыми значениями  $e$  только в том случае, когда свободный член достаточно мал. Приравнявая этот свободный член нулю, получаем условие существования круговых порождающих решений в соизмеримости 1/1

$$6(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + \kappa \{ (-4 + 7\sigma^2 - 3\sigma^4) \cos(2g_0 + 2h_0) + (9\sigma^2 - 9\sigma^4) \cos 2h_0 \} = 0. \quad (3.22)$$

В зависимости от значений  $g_0, h_0$  могут иметь место четыре случая:

- 1)  $g_0 = h_0 = 0$ ;  $g_0 = \pi, h_0 = 0$ ;  $g_0 = 0, h_0 = \pi$ ;  $g_0 = \pi, h_0 = \pi$ ;
- 2)  $g_0 = 0, h_0 = \frac{\pi}{2}$ ;  $g_0 = \pi, h_0 = \frac{\pi}{2}$ ;  $g_0 = 0, h_0 = \frac{3}{2}\pi$ ;  $g_0 = \pi, h_0 = \frac{3}{2}\pi$ ;
- 3)  $g_0 = \frac{\pi}{2}, h_0 = 0$ ;  $g_0 = \frac{\pi}{2}, h_0 = \pi$ ;  $g_0 = \frac{3}{2}\pi, h_0 = 0$ ;  $g_0 = \frac{3}{2}\pi, h_0 = \pi$ ;
- 4)  $g_0 = \frac{\pi}{2}, h_0 = \frac{\pi}{2}$ ;  $g_0 = \frac{3}{2}\pi, h_0 = \frac{\pi}{2}$ ;  $g_0 = \frac{\pi}{2}, h_0 = \frac{3}{2}\pi$ ;  $g_0 = \frac{3}{2}\pi, h_0 = \frac{3}{2}\pi$ ,

для которых из (3.21) получаем

$$\kappa = \pm \frac{3}{2} \frac{1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4}{1 - 4\sigma^2 + 3\sigma^4}, \quad (3.23)$$

$$\kappa = \pm 3 \frac{1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4}{3\sigma^4 - \sigma^2 - 2}, \quad (3.24)$$

причем (3.23), (3.24) с верхним знаком относятся соответственно к случаям 1 и 3, а с нижним знаком — к случаям 2 и 4.

В табл. 1 даны значения  $\kappa$  в зависимости от  $\sigma^2$ , причем через  $\kappa_1$  обозначены  $\kappa$  из (3.23), а через  $\kappa_2$  — значения из (3.24). В обоих случаях взят верхний знак. На рис. 3, 4 представлены графики кривых  $\kappa = \kappa_1(\sigma^2)$ ,  $\kappa = \kappa_2(\sigma^2)$ . Графики зависимостей (3.23), (3.24) с нижним знаком получаются из графиков на рис. 3.4 поворотом плоскости чертежа вокруг оси  $\sigma^2$  на  $180^\circ$ .

Таблица 1

$\sigma^2$	$\kappa_1$	$\kappa_2$
0	1.5000	-1.5000
0.1	1.3095	-0.7971
0.2	0.9375	-0.2885
0.3	-1.0714	0.0739
0.4	2.5000	0.3125
0.5	1.5000	0.4286
0.6	0.9375	0.3947
0.7	0.2273	0.1220
0.8	-1.0714	-0.6818
0.9	-4.8529	-3.5106
1.0	$-\infty$	$-\infty$

Величина  $\kappa$  является мерой отклонения эллипсоида от эллипсоида вращения, круговое сечение которого совпадает с экваториальной плоскостью. Этому эллипсоиду вращения соответствует значение  $\kappa = 0$ . Как видно из рис. 3.4, в случаях 1, 3 круговые порождающие решения возможны при любых  $\kappa$ . Что же касается случаев 2, 4, то для них круговые порождающие решения возможны лишь при  $\kappa \leq 0.43 \dots$  для случая 2 и при  $\kappa \geq 0.43 \dots$  для случая 4. Если  $\sigma^2 < 0.5$ , то порождающее решение является прямым, при  $\sigma^2 > 0.5$  оно будет обратным.

Допустим теперь, что для некоторого  $\kappa$  имеется  $\sigma_0$ , соответствующее круговому порождающему решению. Тогда уравнение (3.19) дает возможность определить  $\sigma^2$  как голоморфную функцию  $e^2$ , обращающуюся в  $\sigma_0^2$  при  $e = 0$ . Для этого достаточно, чтобы частная производная по  $\sigma^2$  от левой части (3.22) была отлична от нуля. Получим сходящееся при достаточно малых  $e$  разложение

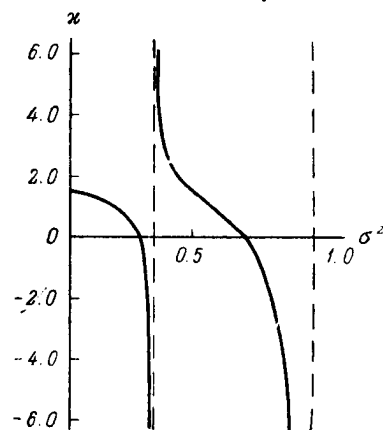


Рис. 3.

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_0^{(2)} e^2 + \sigma_0^{(4)} e^4 + \dots, \quad (3.25)$$

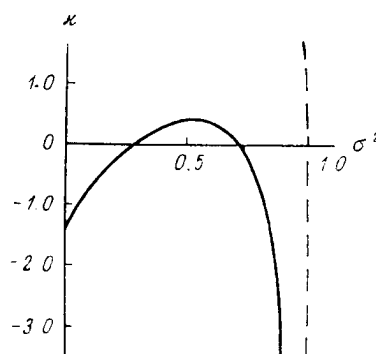


Рис. 4.

которое дает связь между наклонностью и эксцентриситетом для некруговых допустимых, порождающих решений.

Чтобы доказать существование периодических решений системы уравнений (3.2) в окрестности допустимых порождающих решений, остается проверить, что якобиан (3.12) в соизмеримости  $1/1$  отличен от нуля. Вычисление  $\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial L_0^2}$  показывает, что эта производная может обратиться в нуль при  $e = 0$  только в том случае, когда  $\kappa$ ,  $\sigma^2$  удовлетворяют соотношению

$$\kappa = \pm \frac{1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4}{(1 - \sigma^2)^2}, \quad (3.26)$$

<sup>1</sup> Допустимыми мы называем порождающие решения, удовлетворяющие (3.18) и (3.19).

где верхний знак соответствует случаю  $2g_0 + 2h_0 = (2k + 1)\pi$ , а нижний — случаю  $2g_0 + 2h_0 = 2k\pi$ . Точно также имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2}, & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0 \partial h_0} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial g_0}, & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0^2} \end{vmatrix} = Nz^2 e^2 \{ \sigma^2 (1 - \sigma^2)^3 \cos 2h_0 \cos (2g_0 + 2h_0) + A(\sigma^2) e^2 + \dots \}, \quad (3.27)$$

где  $N$  — постоянная, зависящая от  $L_0$ , а  $A(\sigma^2)$  — некоторая функция, зависящая от  $\sigma$ ,  $g_0$ ,  $h_0$ . При достаточно малых  $e$  определитель (3.27) может обратиться в нуль только в следующих случаях:

$$1) z = 0, \quad 2) e = 0, \quad 3) \sigma = 0, \quad 4) \sigma = 1. \quad (3.28)$$

Если эти случаи исключить и, кроме того, рассматривать  $z$ ,  $\sigma_0$ , не удовлетворяющие уравнению (3.26), то при достаточно малых  $e$  определитель (3.12) будет отличен от нуля, и можно сделать заключение о существовании в окрестности допустимого порождающего решения с наклонностью (3.25) периодических решений системы уравнений (3.2), обращающихся в порождающие при  $0 = 0$ .

В зависимости от порождающего решения эти периодические решения могут быть как прямыми, так и обратными.

Таким образом, существование периодических решений третьего сорта в соизмеримости  $1/1$  нашей задачи можно считать доказанным.

$$\text{Соизмеримость } \frac{n}{n'} = \frac{1}{2}$$

В этой соизмеримости имеем

$$\begin{aligned} [F_1] = & \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left\{ (1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) + \right. \\ & + z (1 - \sigma^2)^2 \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos (2g_0 + 2h_0) + \\ & \left. + \frac{77}{8} z \sigma^2 (1 - \sigma^2) e^4 \cos 2h_0 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Уравнение (3.19) принимает тогда вид

$$\begin{aligned} & 6 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) (1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + [17z (1 - \sigma^2)^2 + \\ & + z (-511 + 971\sigma^2 - 460\sigma^4) e^2] \cos (2g_0 + 2h_0) + \\ & + \frac{77}{2} (\sigma^2 - \sigma^4) e^2 \cos 2h_0 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

При  $e = 0$  уравнение (3.30) дает

$$6(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + 17z(1 - \sigma^2)^2 \cos(2g_0 + 2h_0). \quad (3.31)$$

Отсюда

$$z = \pm \frac{6}{17} \frac{1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4}{(1 - \sigma^2)^2}, \quad (3.32)$$

где верхний знак соответствует случаю  $2g_0 + 2h_0 = (2k + 1)\pi$ , а нижний — случаю  $2g_0 + 2h_0 = 2k\pi$  ( $k$  — целое число).

Равенство (3.32) определяет связь между параметром  $z$ , характеризующим форму эллипсоида, и наклонностью кругового порождающего решения. Значения  $z$  в зависи-

мости от значений  $\sigma^2$  приводятся в табл. 2, причем взят верхний знак. На рис. 5 дан график зависимости (3.32) с верхним знаком. График этой зависимости с нижним знаком может быть получен из рис. 5 поворотом плоскости чертежа на  $180^\circ$  вокруг оси  $\sigma^2$ .

Т а б л и ц а 2

$\sigma^2$	$\chi$
0	0.3529
0.1	0.2397
0.2	0.1103
0.3	-0.0360
0.4	-0.1961
0.5	-0.3530
0.6	-0.4412
0.7	-0.1961
0.8	1.7646
0.9	19.411
1.0	$\infty$

Из рис. 5 видно, что круговые порождающие решения существуют только при  $\chi \geq -0.44 \dots$  в случае  $2g_0 + 2h_0 = (2k+1)\pi$  и при  $\chi \leq 0.44 \dots$  в случае  $2g_0 + 2h_0 = 2k\pi$ . Если  $\chi, \sigma_0$  соответствуют круговому допустимому порождающему решению, то решение уравнения (3.30) можно представить в виде (3.25), который определит связь между  $\sigma$  и  $e$  некругового порождающего решения при малых  $e$ .

Для доказательства существования периодических решений в окрестности допустимых порождающих решений необходимо еще рассмотреть определитель (3.12).

Имеем

$$\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial L_0^2} = N_1 \{ 1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4 + B(\sigma, \chi) e^2 + \dots \},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0 \partial h_0} \\ \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0 \partial g_0} & \frac{\partial^2 [F_1]}{\partial h_0^2} \end{vmatrix} = N_2 \chi^2 e^2 \{ (1 - \sigma^2)^4 \cos(2g_0 + 2h_0) + C(\sigma, \chi) e^2 + \dots \}, \quad (3.33)$$

где  $N_1, N_2$  — постоянные, зависящие от  $L_0$ , а  $B(\sigma, \chi), C(\sigma, \chi)$  — некоторые непрерывные функции от  $\sigma, \chi, g_0, h_0$ .

Отсюда видно, что если выполнены условия  $\chi \neq 0, e \neq 0, \sigma_0 \neq 1$  и, кроме того,  $\sigma_0$  не является корнем уравнения

$$1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4 = 0,$$

то при достаточно малых  $e$  якобиан (3.12) отличен от нуля. Тем самым существование решений третьего сорта в окрестности допустимых некруговых порождающих решений в соизмеримости  $1/2$  можно также считать доказанным. В этой соизмеримости, как и в предыдущей, нельзя доказать существование решения третьего сорта в следующих двух случаях: 1) когда эллипсоид является эллипсоидом вращения ( $\chi = 0$ ), 2) когда порождающее решение является строго круговым ( $e = 0$ ).

Эти случаи можно рассматривать как вырожденные. В случае  $\sigma_0 = 1$  существование периодических решений искомого вида не исключено, но для доказательства необходимо дополнительное исследование, которого мы здесь проводить не будем.

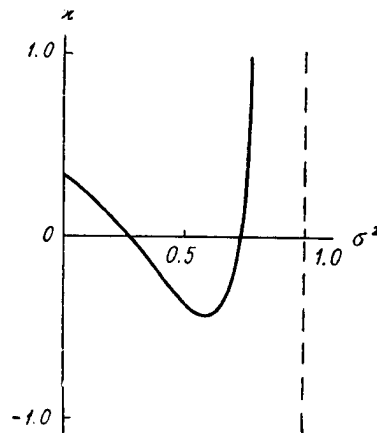


Рис. 5.

Соизмеримость  $\frac{n}{n'} = \frac{2}{5}$  и другие соизмеримости

В соизмеримости  $\frac{2}{5}$  имеем

$$[F_1] = \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left\{ (1 - 6\sigma^2 + 6\sigma^4) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) + \right. \\ \left. + \frac{845}{48} \chi (1 - \sigma^2)^2 e^3 \cos(2g_0 + 2h_0) + \dots \right\}, \quad (3.34)$$

и уравнение (3.19) принимает вид

$$6\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)(1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4) + \frac{845}{16}\kappa(1 - \sigma^2)^2 e \cos(2g_0 + 2h_0) + \dots = 0. \quad (3.35)$$

При  $e = 0$  получаем

$$1 - 5\sigma^2 + 5\sigma^4 = 0. \quad (3.36)$$

Приближенные значения корней (3.36) равны

$$\sigma_1^0 = 0.525732, \quad \sigma_2^0 = 0.850651.$$

Этим значениям корней соответствуют следующие наклонности порождающего кругового решения:

$$i_1^0 = 63^\circ 26' 06'', \quad i_2^0 = 116^\circ 33' 54''. \quad (3.37)$$

Допустимые некруговые порождающие решения, независимо от значений  $\kappa$ , должны теперь иметь наклон, близкий к значениям (3.37). Этот наклон определяется из (3.35) разложениями по степеням эксцентриситета

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_1^{02} + D_1 e + \dots, \\ \sigma_2^2 &= \sigma_2^{02} + D_2 e + \dots, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где  $D_1, D_2$  — коэффициенты, зависящие от  $\sigma_1^0, \sigma_2^0$  соответственно, а также от  $\kappa, g_0, h_0$ . В данном случае разложение (3.34) оказывается уже недостаточным для исследования якобиана (3.12), так как с принятой точностью этот якобиан тождественно равен нулю. Однако, продолжив это разложение до более высоких степеней эксцентриситета, нетрудно убедиться в том, что при достаточно малых  $e$ , отличных от нуля, и при  $\kappa \neq 0$  якобиан (3.12) будет отличен от нуля, и, следовательно, решения третьего сорта в данном случае существуют.

Точно такая же картина, как и в соизмеримости  $2/5$  будет иметь место и в остальных соизмеримостях  $1/3, 2/7, \dots$ . Во всех этих соизмеримостях решения третьего сорта, близкие к кругам, существуют и имеют наклонности, мало отличающиеся от (3.37). Таким образом, соизмеримость  $2/5$  является типической.

#### § 4. Решения второго сорта

Рассмотрим движение частицы в экваториальной плоскости. Так как движение является плоским, то  $z = 0$  и будем иметь

$$V_1 = \frac{\lambda x^2 + \mu y^2}{r^5}. \quad (4.1)$$

Введем вместо прямоугольных координат канонические элементы Делоне

$$\begin{aligned} L &= k \sqrt{M} \sqrt{a}, & l, \\ G &= k \sqrt{M} \sqrt{a(1 - e^2)}, & g, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $a$  — большая полуось,  $e$  — эксцентриситет,  $l$  — средняя аномалия, а  $g$  — расстояние перигелия от оси  $OX$  вращающейся системы координат. Если расстояние перигелия от оси  $Oz$  неподвижной системы координат обозначить через  $g'$ , то

$$g = -n't + g'. \quad (4.3)$$

Тогда уравнения движения частицы принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G},\end{aligned}\quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned}F &= F_0 + \theta F_1 + \theta^2 F_2 + \dots, \\ F_0 &= \frac{k^4 M^2}{2L^2} + n'G, \quad F_1 = \frac{vx^2 + \mu y^2}{r^5}, \dots\end{aligned}\quad (4.5)$$

Разложение  $F_1$  по степеням эксцентриситетов в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{\lambda + \mu}{2a^3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \left( 3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos l + \left( \frac{9}{2} e^2 + \frac{7}{2} e^4 \right) \cos 2l + \right. \\ &+ \frac{53}{8} e^3 \cos 3l + \frac{77}{8} e^4 \cos 4l + x \left[ \left( -\frac{1}{2} e + \frac{1}{16} e^3 \right) \cos(l + 2g) + \frac{1}{48} e^3 \cos(l - 2g) + \right. \\ &+ \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 \right) \cos(2l + 2g) + \frac{1}{24} e^4 \cos(2l - 2g) + \\ &+ \left( \frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3 \right) \cos(3l + 2g) + \left( \frac{17}{2} e^2 - \frac{115}{6} e^4 \right) \cos(4l + 2g) + \\ &\left. \left. + \frac{845}{48} e^3 \cos(5l + 2g) + \frac{533}{16} e^4 \cos(6l + 2g) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

При  $\theta = 0$  система (4.4) имеет порождающее решение

$$\begin{aligned}L &= L_0, & l &= nt + l_0, \\ G &= G_0, & g &= -n't + g_0,\end{aligned}\quad (4.7)$$

где  $L_0, G_0, l_0, g_0$  — произвольные постоянные и где  $n = \frac{k^4 M^2}{L_0^3}$ . Мы будем предполагать, что  $L_0 \neq G_0$ , т. е. порождающее решение не является круговым. Пусть  $n$  и  $n'$  соизмеримы между собой, тогда решение (4.7) является периодическим. Его период обозначим через  $T_0$ .

При  $\theta \neq 0$  можно написать

$$\begin{aligned}L &= L_0 + \beta_1 + \varphi_1, & l &= nt + l_0 + \gamma_1 + \eta_1, \\ G &= G_0 + \beta_2 + \varphi_2, & g &= -n't + g_0 + \gamma_2 + \eta_2,\end{aligned}\quad (4.8)$$

где  $\beta, \gamma$  — начальные отклонения, а  $\varphi, \eta$  — функции времени, постоянных  $\beta, \gamma$  и параметра  $\theta$ , обращающиеся в нуль при  $t = 0$ .

Среди всех решений (4.8) нам нужны периодические с периодом  $T = T_0 + \Delta T$ , где  $\Delta T$  — величина такого же порядка, как и  $\theta$ . Условия периодичности можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(T) &= 0, & \psi_1(T) &= n\Delta T + \eta_1(T) = 0, \\ \varphi_2(T) &= 0, & \psi_2(T) &= -n'\Delta T + \eta_2(T) = 0.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Раскладывая левые части (4.9) по степеням  $\beta, \gamma, \Delta T$ , получаем уравнения, которым должны удовлетворять эти величины в случае периодического решения. В силу существования интеграла Якоби, из которого возможно определение  $\varphi_1(T)$  в виде функции от остальных  $\varphi, \psi$ , уравнение  $\varphi_1(T) = 0$  является следствием остальных и его можно

исключить из рассмотрения. Кроме того, в силу независимости правых частей (4.4) от времени начала отсчета времени, можно выбрать так, что  $l_0 = \gamma_1 = 0$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \psi_2(T) &= \frac{\partial[F_1]}{\partial g_0} - \frac{\gamma_1}{T_0} \cdot \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_0^2} \int_0^{T_0} \frac{\partial^2 F_1}{\partial l_0 \partial g_0} t dt + \gamma_1 \frac{\partial^2[F_1]}{\partial g_0 \partial L_0} + \gamma_2 \frac{\partial^2[F_1]}{\partial g_0 \partial G_0} + \\ &+ \gamma_2 \frac{\partial^2[F_1]}{\partial g_0^2} + \frac{\Delta T}{T_0} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial g_0} \Big|_{t=0} + \frac{\theta}{T_0} \left\{ \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta \partial g_0} \right\} + \dots = 0, \\ \psi_1(T) &= n \frac{\Delta T}{T_0} - \gamma_1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_0^2} - \frac{\theta}{T_0} \cdot \frac{\partial^2 F_0}{\partial L_0^2} \int_0^{T_0} \int_0^t \frac{\partial F_1}{\partial l_0} dt dt - \theta \frac{\partial[F_1]}{\partial L_0} - \dots = 0, \\ \psi_2(T) &= -n \frac{\Delta T}{T_0} - \theta \frac{\partial[F_1]}{\partial G_0} - \dots = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где через  $\left\{ \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta \partial g_0} \right\}$  обозначена некоторая известная постоянная, зависящая от начальных значений порождающего решения (Батраков, 1955, стр. 124).

Для определения четырех неизвестных  $\gamma$ ,  $\Delta T$  имеем лишь три уравнения (4.10), и, следовательно, одно из этих неизвестных можно выбрать произвольно. Выберем  $\gamma_2 = 0$ , что равносильно выбору начального эксцентриситета решения в качестве произвольной постоянной.

Определение  $\gamma$ ,  $\Delta T$  как голоморфных функций  $\theta$ , обращающихся в нуль при  $\theta = 0$ , из уравнений (4.10), возможно только в том случае, когда

$$\frac{\partial[F_1]}{\partial g_0} = 0. \quad (4.11)$$

Так как функция  $F_1$  имеет вид

$$\sum K(L, G) \cos(il + 2jg) \quad \begin{pmatrix} i=0, 1 \\ j=-1, 0, 1 \end{pmatrix},$$

то единственными соизмеримостями, где появляются критические члены, являются соизмеримости вида (3.15). Следовательно, периодические решения второго сорта, как и решения третьего сорта, возможны только в этих соизмеримостях.<sup>1</sup> Полагая  $l_0 = 0$ , имеем

$$\frac{\partial[F_1]}{\partial g_0} = - \sum 2jK(L_0, G_0) \sin 2jg_0, \quad (4.12)$$

причем в силу свойств разложения (4.6) в правой части (4.12) все слагаемые, кроме одного, равны нулю. Отсюда единственным решением уравнения (4.11) будет

$$g_0 = \frac{k\pi}{2} \quad (k=0, 1, 2, 3). \quad (4.13)$$

Из последних двух уравнений (4.10) можно определить  $\gamma$ ,  $\Delta T$  как голоморфные функции  $\theta$ ,  $\gamma_2$ , обращающиеся в нуль, при  $\theta = \gamma_2 = 0$ . Подставляя их выражения через  $\theta$ ,  $\gamma_2$  в первое уравнение (4.10) и учитывая, что  $\gamma_2 = 0$ , получим уравнение, разрешимое относительно  $\gamma_2$ , если

$$\frac{\partial^2[F_1]}{\partial g_0^2} \neq 0. \quad (4.14)$$

<sup>1</sup> Если учитывать только те критические члены, которые входят в  $[F_1]$ .

Но мы уже отмечали, что разложение (4.12) сводится к одному члену. Следовательно, (4.14) при достаточно малых  $\epsilon$  выполняется и решения второго сорта существуют во всех соизмеримостях типа (3.15). Особыми будут случаи, когда эллипсоид является эллипсоидом вращения ( $\kappa=0$ ), а также, когда порождающее решение является строго круговым. В этих случаях  $\frac{\partial^2 [F_1]}{\partial g_0^2}$  тождественно равна нулю и определение  $\gamma_1$  невозможно. Эти случаи, как и в предыдущих параграфах, будут вырожденными, и периодические решения второго сорта в этих случаях не существуют. Исключением является лишь соизмеримость  $1/1$ , где при  $\kappa=0$  круговые порождающие решения возможны. Периодические решения в этом случае рассмотрены в работе В. К. Абалакина (1957).

### § 5. Решения первого сорта

Для того чтобы показать существование решений первого сорта в нашей задаче, введем вместо переменных Делоне канонические переменные Пуанкаре  $L, \lambda, \xi, \eta$  по формулам

$$\begin{aligned} L &= k \sqrt{M} \sqrt{a}, & \lambda &= l + g = (n - n')t + \bar{\lambda}, \\ \xi &= \sqrt{2(L - G)} \cos g, & \eta &= \sqrt{2(L - G)} \sin g. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L}, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} F &= F_0 + \theta F_1 + \theta^2 F_2 + \dots, \\ F_0 &= \frac{k^4 M^2}{2L^2} + n' \left( L + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right), & F_1 &= \frac{\lambda x + \mu y^2}{r^5}, \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Функции  $F_k$  разлагаются в ряды по степеням  $\xi, \eta$  вида

$$\sum K_{ijs}(L) \xi^i \eta^j \frac{\cos s\lambda}{\sin s\lambda},$$

причем нужно брать  $\cos s\lambda$  при  $j$  четном и  $\sin s\lambda$  — при  $j$  нечетном.

При  $\theta=0$  система (4.2) имеет порождающее решение

$$\begin{aligned} L &= L_0, & \lambda &= (n_0 - n')t + \lambda_0, \\ \xi &= 0, & \eta &= 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

представляющее движение с угловой скоростью  $n_0 - n'$  по кругу радиуса  $a_0$ , лежащему в экваториальной плоскости. Это порождающее решение является периодическим и имеет период  $T_0 = \frac{2\pi}{n_0 - n'}$ .

Будем искать решения системы (4.2) при  $\theta \neq 0$  периода  $T = T_0 + \Delta T$ , где  $\Delta T$  — величина такого же порядка, как и  $\theta$ , близкие к (5.4) и обращающиеся в (5.4) при  $\theta=0$ . Эти решения можно записать в виде

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \beta_1 + \varphi_1, & \lambda &= (n_0 - n') \frac{T_0}{T} t + \lambda_0 + \gamma_1 + \psi_1, \\ \xi &= \beta_2 + \varphi_2, & \eta &= \gamma_2 + \psi_2, \end{aligned} \quad (5.5)$$



где  $\beta, \gamma$  — начальные отклонения искомых решений от (5.4), а  $\varphi, \psi$  — функции времени с периодом  $T$ , обращающиеся в нуль при  $t=0$  и разлагающиеся по степеням  $\beta, \gamma, \theta$ . Условия периодичности

$$\varphi_i(T)=0, \psi_i(T)=0 \quad (i=1, 2) \quad (5.6)$$

дают уравнения, которым должны удовлетворять  $\beta, \gamma, \Delta T, \theta$ . При этом уравнение  $\varphi_1(T)$  является следствием трех остальных, так как система (4.2) имеет интеграл Якоби, разрешимый относительно  $L$ .

Ограничиваясь первыми степенями неизвестных и параметра  $\theta$ , выпишем остающиеся три уравнения в явном виде

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(T)}{T_0} &= \frac{\lambda(T) - \lambda(0) - 2n}{T_0} = (n_0 - n') \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{3k^4 M^2}{L_0^4} \beta_1 + \\ &+ \frac{30k^4 M^2}{L_0^4 (n_0 - n')} \sum_s K_{00s} \cos s\lambda - \theta \frac{\partial K_{000}}{\partial L_0} - \dots = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\varphi_2(T) = \xi(T) - \xi(0) = \xi_2 (\cos n'T_0 - 1) - \gamma_2 \sin n'T_0 + \theta F_\xi + \dots = 0,$$

$$\psi_2(T) = \eta(T) - \eta(0) = \xi_2 \sin n'T_0 + \gamma_2 (\cos n'T_0 - 1) + \theta F_\eta + \dots = 0,$$

где  $F_\xi, F_\eta$  — известные функции начальных значений порождающего решения, не равные одновременно нулю.

Пять величин  $\beta, \gamma, \Delta T$  связаны только тремя уравнениями (5.7), и, следовательно, две из этих величин можно выбрать произвольно. Так как правые части (5.2) не зависят от времени, то  $\gamma_1$  вместе с  $\lambda_0$  являются произвольными величинами, и можно положить  $\gamma_1 = \lambda_0 = 0$ . Кроме того, положим  $\beta_1 = 0$ . Тогда уравнения (5.7) определяют  $\Delta T, \beta_2, \gamma_2$  единственным образом как голоморфные функции  $\theta$ , обращающиеся в нуль при  $\theta = 0$ , если только отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} \cos n'T_0 - 1, & -\sin n'T_0 \\ \sin n'T_0, & \cos n'T_0 - 1 \end{vmatrix} = 2(1 - \cos n'T_0) \quad (5.8)$$

и, кроме того,  $n_0 \neq n'$ .

Но (5.8) обращается в нуль только при

$$\frac{n_0}{n'} = \frac{1+m}{m} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5.9)$$

Таким образом, периодические решения первого сорта существуют во всех случаях, кроме (5.9) и случая  $n_0 = n'$ . При этом мы предполагаем, что  $n' \neq 0$ .

Если же  $n' = 0$ , т. е. рассматривается случай покоящегося трехосного эллипсоида, то определитель (5.8) тождественно равен нулю, но одновременно будем иметь  $F_\xi = T_\eta = 0$ ; следовательно, необходимо провести дополнительные исследования.

Отметим, что определитель (5.8) не зависит от  $x$ , точно так же не зависит от  $x$  и коэффициент при  $\Delta T$  в первом уравнении (5.7). Следовательно, периодические решения первого сорта во вращающейся системе координат существуют и в случае  $x = 0$ , т. е. в случае эллипсоида вращения.

Подведем некоторые итоги. В работе рассматривается задача о периодических движениях частицы в поле тяготения трехосного эллипсоида. При этом предполагается, что эллипсоид мало отличается от сферы того же объема и его отклонения от этой сферы в направлении осей являются малыми первого порядка. Эллипсоид считается однородным.

В § 1 даны дифференциальные уравнения движения частицы в поле тяготения вращающегося эллипсоида. В эти уравнения, посредством равенств (1.9), введен малый

параметр  $\theta$ . Равенства (1.9) означают, что отношения  $\frac{\lambda}{\mu}$ ,  $\frac{\mu}{\nu}$ ,  $\frac{\nu}{\lambda}$  являются фиксированными. Проводится разложение пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов с точностью до членов четвертого порядка включительно.

В § 2 получено уравнение поверхности нулевых скоростей и определены координаты точек либрации.

В § 3 методом Пуанкаре доказывается существование решений третьего сорта в случае, когда имеют место соотношения  $\frac{n}{n'} = \frac{1}{1}$  или  $\frac{1}{2}$ , где  $n$  — среднее движение частицы, а  $n'$  — угловая скорость вращения эллипсоида. Изучаются условия существования почти круговых порождающих решений. Зависимость между параметром  $\lambda$ , характеризующим форму эллипса, и наклонностью круговых порождающих решений для решений третьего сорта представлена на рис. 3, 4, 5. В соизмеримостях  $\frac{n}{n'} = \frac{2}{i}$  ( $i = 5, 6, \dots$ ) наклонности почти круговых порождающих решений должны быть близки к  $63^\circ 26' 06''$  или же к дополнению этой величины до  $180^\circ$ .

В § 4 доказывается существование решений второго сорта во всех соизмеримостях.

В § 5 рассматривается вопрос о существовании решений первого сорта и доказывается, что они существуют при всех  $n$  и  $n'$ , кроме  $\frac{n}{n'} = \frac{1+k}{k}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и  $n = n'$ . Имеется также сомнительный случай  $n' = 0$ .

В заключение отметим, что выводы, сделанные в работе, справедливы и в том случае, когда гравитирующий эллипсоид не будет однородным. Необходимо лишь, чтобы слои одинаковой плотности располагались гомотетично, т. е. были бы ограничены эллипсоидами, подобными поверхностному эллипсоиду.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Абалакин В. К. 1957. К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида, Бюлл. ИТА, **6**, 8.  
 Батраков Ю. В. 1955. Периодические решения типа Шварцшильда в ограниченной задаче трех тел. Бюлл. ИТА, **6**, 2.  
 Дубошин Г. Н. 1945. О периодических движениях в системе спутников Сатурна. Труды ГАИШ, **15**, вып. 1.  
 Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, **2**, ОНТИ, М.—Л.  
 Cayley A. 1859. Tables of the developments of Functions in the theory of elliptic motion. Memoirs of the RAS, **29**, стр. 191—306.  
 Moulton F. 1920. Periodic orbits. Washington.  
 Poincaré H. 1892. Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, **1**. Paris.

Поступило в Редакцию  
15 июня 1956 г.

## Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 8 (81)

## К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида

В. К. Абалакин

Исследуется устойчивость точек либрации в случае движения частицы в поле тяготения вращающегося эллипсоида. Точки либрации, лежащие на продолжениях малой оси экваториального сечения эллипсоида, устойчивы в первом приближении; точки либрации, расположенные в направлении большой оси, неустойчивы. Найдены три семейства периодических орбит, размеры которых зависят от одного параметра.

ON THE STABILITY OF LIBRATION POINTS NEAR THE GRAVITATING ELLIPSOID IN ROTATION, by V. K. Abalakin. — In the present paper the stability of the libration points in the case of a particle moving under the gravitational attraction of a rotating ellipsoid has been discussed. The libration points which lie on the extensions of the minor axis of the equatorial section of the ellipsoid have been found to be stable by the first approximation while these disposing in direction of the major axis are unstable. Three families of periodic orbits are obtained, the sizes of which depending on one parameter. In addition the one-parametric family of asymptotic solutions has been also derived.

В работе „Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида“ (Батраков, 1957) были найдены положения относительного равновесия — точки либрации — в случае движения материальной частицы нулевой массы под действием притяжения вращающегося эллипсоида.

В настоящей статье мы ставим целью исследование устойчивости движения в точках либрации и получение периодических решений в окрестности этих точек. При этом мы будем считать положение относительного равновесия устойчивым в первом приближении, если система уравнений в вариациях такова, что соответствующее ей характеристическое уравнение имеет своими корнями чисто мнимые величины. Если же некоторые из корней характеристического уравнения имеют не равные нулю вещественные части, то положение относительного равновесия считается неустойчивым. Метод исследования в данной задаче такой же, что и в ограниченной задаче трех тел [см., например, в руководстве Мультон (Moulton, 1923)].

Уравнения движения материальной частицы в гравитационном поле эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг одной из главных осей, в данном случае вокруг оси  $OZ$ , могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где обозначено

$$2\Omega = \omega^2(x^2 + y^2) + 2k^2M\left(\frac{1}{r} + \frac{\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2}{r^5}\right) + \dots \quad (2)$$

Полуоси  $a$ ,  $b$  и  $c$  эллипсоида связаны с радиусом  $R$  сферы того же объема и той же средней плотности (сфера сравнения) соотношениями

$$\begin{aligned}a^2 &= R^2 + m\lambda, \\b^2 &= R^2 + m\mu, \\c^2 &= R^2 + m\nu,\end{aligned}$$

где  $m$  — некоторый числовой коэффициент, зависящий от распределения плотности эллипсоида; для однородного эллипсоида  $m = \frac{10}{3}$ . Параметры  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$ , входящие в (2), пропорциональны квадратам отклонений эллипсоида от сферы сравнения и удовлетворяют условию  $\lambda + \mu + \nu = 0$ .

Отклонения эллипсоида от сферы сравнения, а значит и величины  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$  считаем малыми, причем разности параметров  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  принимаем за величины того же порядка малости. Кроме того, можно отметить, что величины  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  могут характеризовать неоднородность эллипсоида при гомотетическом расположении слоев одинаковой плотности, благодаря чему в известной степени увеличивается общность рассматриваемой задачи. Значение остальных, входящих в (2) величин не нуждается в пояснениях.

В случае движения частицы в окрестности вращающегося эллипсоида существуют положения относительного равновесия  $L_1, \dots, L_4$  — точки либрации, лежащие на продолжениях главных осей эллипсоида  $2a$  и  $2b$  симметрично относительно его центра (Батраков, 1957). Координаты точек либрации  $L_1$  и  $L_3$  в наших обозначениях имеют вид

$$x_0 = \pm \left( a_0 + \frac{\lambda}{a_0} \right), \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

а координаты точек  $L_2$  и  $L_4$  определяются формулами

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \pm \left( a_0 + \frac{\mu}{a_0} \right), \quad z_0 = 0,$$

где  $a_0^3 = k^2 M \omega^{-2}$ .

В силу симметричного расположения точек либрации  $L_1$  и  $L_3$ ,  $L_2$  и  $L_4$  относительно начала системы координат и независимости их от способа обозначений координатных осей достаточно все рассуждения в дальнейшем провести для одной из точек, например, для точки  $L_1(x_0, 0, 0)$ .

Выберем точку либрации  $L_1$  за начало новой системы координат с осями, параллельными осям старой системы отсчета. Тогда система уравнений в вариациях (с точностью до малых первого порядка) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \xi \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y} + \zeta \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial z}, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} = \frac{\partial\Omega}{\partial y} + \xi \frac{\partial^2\Omega}{\partial y\partial x} + \eta \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} + \zeta \frac{\partial^2\Omega}{\partial y\partial z}, \\ \ddot{\zeta} = \frac{\partial\Omega}{\partial z} + \xi \frac{\partial^2\Omega}{\partial z\partial x} + \eta \frac{\partial^2\Omega}{\partial z\partial y} + \zeta \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}, \end{cases} \quad (3)$$

где обозначено  $\xi = x - x_0$ ,  $\eta = y$ ,  $\zeta = z$  и где при вычислениях частных производных  $\frac{\partial\Omega}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}$ , ... необходимо положить  $x = x_0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

Тогда тождественно имеем

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y} = \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0.$$

Вычисление производных второго порядка при указанных выше значениях  $x, y, z$  дает следующие выражения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} &= \omega^2 + 2(A + B\lambda), & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} &= \omega^2 - (A - 2B\mu), & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} &= -(A - 2B\nu), & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial x} &= 0,\end{aligned}$$

где для краткости обозначено

$$\left. \begin{aligned} A &= k^2 M \left( \frac{1}{x_0^3} + \frac{5\lambda}{x_0^5} + \dots \right), \\ B &= k^2 M \left( \frac{1}{x_0^5} + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Поэтому система (3) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} &= [\omega^2 + 2(A + B\lambda)]\xi, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} &= [\omega^2 - (A - 2B\mu)]\eta, \\ \ddot{\zeta} &= -(A - 2B\nu)\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Очевидно, что третье уравнение системы (5), независимое от первых двух, имеет решение

$$\zeta = C_1 \sin \sqrt{A - 2B\nu}t + C_2 \cos \sqrt{A - 2B\nu}t,$$

где  $\nu < \frac{A}{2B}$ .

Решение первых двух уравнений системы (5) будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= P e^{\alpha t}, \\ \eta &= R e^{\alpha t}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подстановка (6) в (5) дает следующие соотношения для определения постоянных  $\alpha, P$  и  $R$ :

$$\left. \begin{aligned} \{ \alpha^2 - [\omega^2 + 2(A + B\lambda)] \} P - 2\omega\alpha R &= 0, \\ 2\omega\alpha P + \{ \alpha^2 - [\omega^2 - (A - 2B\mu)] \} R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Система уравнений (7) может иметь ненулевые решения относительно  $P$  и  $R$  только в том случае, когда детерминант ее равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 - [\omega^2 + 2(A + B\lambda)] & -2\omega\alpha \\ +2\omega\alpha & \alpha^2 - [\omega^2 - (A - 2B\mu)] \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8), являющееся характеристическим уравнением системы первых двух дифференциальных уравнений из (5), при помощи (4) и равенства  $x_0 = a_0 + \frac{\lambda}{a_0}$  преобразуется к виду

$$\beta^4 + \left( 1 - \frac{4\lambda + 2\mu}{a_0^2} \right) \beta^2 + \frac{6(\mu - \lambda)}{a_0^2} = 0, \quad (9)$$

где положено  $\beta = \frac{\alpha}{\omega}$ .

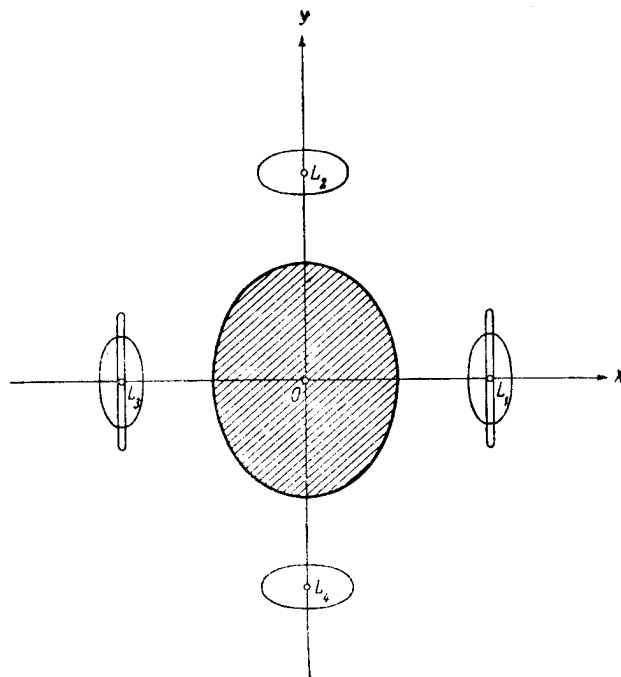
При  $\lambda < \mu$  уравнение (9) имеет четыре попарно сопряженных чисто мнимых корня. Если параметры  $\sqrt{|\lambda|}$  и  $\sqrt{|\mu|}$  принять за малые первого порядка, то с точностью до величин второго порядка малости эти корни имеют вид

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= +\frac{i}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}, & \zeta_2 &= -\frac{i}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}, \\ \zeta_3 &= +i, & \zeta_4 &= -i.\end{aligned}$$

Таким образом, при  $\lambda < \mu$  точка либрации  $L_1$  является устойчивым в первом приближении положением относительного равновесия; однако это соответствует тому критическому случаю, когда для строгого решения вопроса об устойчивости первого приближения недостаточно.

При  $\lambda > \mu$  уравнение (9) имеет два вещественных и два сопряженных чисто мнимых корня

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{1}{a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)}, \\ \zeta_2 &= -\frac{1}{a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)}, \\ \zeta_3 &= +i, & \zeta_4 &= -i.\end{aligned}$$



В этом случае точка либрации  $L_1$  неустойчива (Ляпунов, 1950, стр. 128); однако, ввиду наличия отрицательного вещественного корня, здесь имеет место условная устойчивость в смысле Ляпунова. Соответствующие условия, связывающие начальные данные, приведены ниже.

Вследствие симметричного расположения точек либрации  $L_1$  и  $L_3$  относительно начала координат можно сделать вывод о том, что устойчивость точки  $L_1$  при  $\lambda < \mu$  оз-

начает одновременно и устойчивость точки  $L_3$ . Так как наши рассуждения не зависят от обозначений осей координат, то при  $\lambda < \mu$  имеем неустойчивость точек либрации  $L_2$  и  $L_4$ : поворотом оси  $Ox$  на  $\frac{\pi}{2}$  мы приходим к случаю  $\lambda > \mu$ , когда точки либрации, лежащие на этой оси, неустойчивы. В этом, впрочем, легко убедиться непосредственными вычислениями.

Таким образом, мы получили, что при  $\lambda < \mu$  точки либрации  $L_1, L_3$  и  $L_2, L_4$  являются положениями соответственно устойчивого и неустойчивого равновесия. При  $\lambda > \mu$  устойчивостью обладают точки  $L_2$  и  $L_4$ , точки либрации  $L_1$  и  $L_3$  при этом условии неустойчивы.

В случае  $\lambda = \mu$ , соответствующем сфероиду, понятие „точки либрации“ теряет смысл.

Перейдем теперь к отысканию периодических решений в окрестности точек либрации  $L_1, \dots, L_4$ . В силу равноправности этих точек ограничимся рассмотрением одной из них, например  $L_1$ .

Как известно, система дифференциальных уравнений имеет периодические решения, если соответствующее ей характеристическое уравнение имеет, по крайней мере, одну пару чисто мнимых корней (Ляпунов, 1950, стр. 240—246, 259—261).

Поскольку система (5) удовлетворяет условиям существования периодических решений, то в окрестности точки  $L_1(x_0, 0, 0)$  существуют периодические решения, которые мы получим, выбирая определенным образом начальные данные — началь-

ные координаты  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  и компоненты скорости  $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$ . Так как при  $\lambda < \mu$  характеристическое уравнение (9) имеет две пары сопряженных чисто мнимых корней, то в данном случае существуют два семейства периодических решений, которые с принятой точностью имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= P_1 e^{i\omega_1 t} + P_2 e^{-i\omega_1 t}, \\ \eta &= R_1 e^{i\omega_1 t} + R_2 e^{-i\omega_1 t} \end{aligned} \right\}$$

и

$$\left. \begin{aligned} \xi &= P_3 e^{i\omega_2 t} + P_4 e^{-i\omega_2 t}, \\ \eta &= R_3 e^{i\omega_2 t} + R_4 e^{-i\omega_2 t} \end{aligned} \right\}$$

Их периоды равны соответственно  $\frac{2\pi a_0}{\omega \sqrt{6(\mu - \lambda)}}$  и  $\frac{2\pi}{\omega}$  с точностью до малых первого порядка.

При  $\lambda > \mu$  имеется одна пара чисто мнимых корней, и, следовательно, существует одно семейство периодических решений вида (с той же точностью)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= P_3 e^{i\omega_3 t} + P_4 e^{-i\omega_3 t}, \\ \eta &= R_3 e^{i\omega_3 t} + R_4 e^{-i\omega_3 t} \end{aligned} \right\}$$

с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$  (с точностью до малых первого порядка).

Подставив выражения  $A$  и  $B$  из (4) при  $x_0 = a_0 + \frac{\lambda}{a_0}$  в систему (7) и учитывая, что  $\xi = \frac{\lambda}{a_0}$ , запишем (7) в виде

$$\left. \begin{aligned} \left[ \xi^2 - 3 \left( 1 + \frac{2\lambda}{a_0^2} \right) \right] P - 2\xi R &= 0, \\ 2\xi P + \left[ \xi^2 + \frac{2(\lambda - \mu)}{a_0^2} \right] R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Последовательная подстановка в (10) значений  $\xi_1, \dots, \xi_4$  дает для случая  $\lambda < \mu$

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{2i}{3a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)} R_1, & P_2 &= +\frac{2i}{3a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)} R_2, \\ P_3 &= -\frac{i}{2} R_3, & P_4 &= +\frac{i}{2} R_4 \end{aligned}$$

и для случая  $\lambda > \mu$

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{2}{3a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)} R_1, & P_2 &= +\frac{2}{3a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)} R_2, \\ P_3 &= -\frac{i}{2} R_3, & P_4 &= +\frac{i}{2} R_4. \end{aligned}$$

Положим  $\xi = 0$  и  $\dot{\xi} = 0$ , тогда  $C_1 = C_2 = 0$ , т. е. движение материальной частицы происходит в плоскости. Для получения периодического решения долгого периода определим начальные данные условиями  $R_3 = R_4 = 0$ .

Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= P_1 e^{i\omega_1 t} + P_2 e^{-i\omega_1 t}, \\ \eta &= R_1 e^{i\omega_1 t} + R_2 e^{-i\omega_1 t} \end{aligned} \right\}$$

Подставляя выражения  $P_1$  и  $P_2$  через произвольные постоянные  $R_1$  и  $R_2$  и заменяя показательные функции тригонометрическими, получим

$$\xi = \frac{2}{3} q \Lambda_2 \cos \frac{\omega \beta_1}{i} t + \frac{2}{3} q \Lambda_1 \sin \frac{\omega \beta_1}{i} t,$$

$$\eta = \Lambda_1 \cos \frac{\omega \beta_1}{i} t - \Lambda_2 \sin \frac{\omega \beta_1}{i} t,$$

где обозначено  $q = \frac{1}{a_0} \sqrt{6(\mu - \lambda)}$ ,  $\Lambda_1 = R_1 + R_2$ ,  $\Lambda_2 = -i(R_1 - R_2)$ .

Исключая из выражений для  $\xi$  и  $\eta$  время  $t$ , получим уравнение орбиты периодического движения с периодом  $\frac{2\pi a_0}{\omega \sqrt{6(\mu - \lambda)}}$  в виде

$$\frac{\xi^2}{\frac{4}{9} q^2 C^2} + \frac{\eta^2}{C^2} = 1, \quad (11)$$

где  $C^2 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2$ .

Уравнение (11) представляет эллипс с полуосями  $\frac{2}{3} q C$  и  $C$ , параллельными координатным осям, и с эксцентриситетом  $e = 1 - \frac{2}{9} q^2$ .

Периодическое решение короткого периода получим, полагая  $R_1 = R_2 = 0$ . Тогда

$$\xi = -\frac{i}{2} R_3 e^{\omega \beta_3 t} + \frac{i}{2} R_4 e^{-\omega \beta_3 t},$$

$$\eta = R_3 e^{\omega \beta_3 t} + R_4 e^{-\omega \beta_3 t}.$$

Аналогично предыдущему случаю получаем

$$\xi = \frac{1}{2} \Lambda_3 \cos \omega t + \frac{1}{2} \Lambda_4 \sin \omega t,$$

$$\eta = \Lambda_3 \cos \omega t - \Lambda_4 \sin \omega t,$$

где  $\Lambda_3 = R_3 + R_4$ ,  $\Lambda_4 = -i(R_3 - R_4)$ .

Уравнение траектории этого периодического движения с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ , совпадающим с точностью до малых первого порядка с периодом вращения эллипсоида, имеет вид

$$\frac{\xi^2}{\frac{C^2}{4}} + \frac{\eta^2}{C^2} = 1, \quad (12)$$

где  $C^2 = \Lambda_3^2 + \Lambda_4^2$ .

Эллипс (12) имеет полуоси  $\frac{C}{2}$  и  $C$  и эксцентриситет  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

В случае  $\lambda > \mu$  получается только одно семейство периодических решений короткого периода, совпадающее с рассмотренным выше короткопериодическим семейством. Уравнение орбиты соответствующего периодического движения идентично уравнению (12).

Расположение периодических орбит при  $\lambda < \mu$  представлено на рисунке. Отметим, что размеры орбиты зависят от одной произвольной постоянной.

Можно заметить, что при  $\lambda > \mu$ , выбирая начальные условия так, чтобы выполнялось  $R_1 = R_3 = R_4 = 0$ , получим семейство асимптотических решений, имеющее с принятой точностью вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= P_2 e^{\omega \beta_2 t}, \\ \eta &= R_2 e^{\omega \beta_2 t} \end{aligned} \right\}$$



и соответствующее отрицательному вещественному корню  $\beta_2$  характеристического уравнения. Траектория этого асимптотического движения (с принятой точностью) есть прямая, проходящая через точку либрации и уравнение которой имеет вид (с той же точностью)

$$\xi = \frac{2}{3a_0} \sqrt{6(\lambda - \mu)} \tau.$$

Как уже было отмечено выше, в этом случае имеет место условная (в смысле Ляпунова) устойчивость соответствующих положений относительного равновесия.

Таким образом, в нашей статье получены следующие результаты:

1) доказана в первом приближении устойчивость движения материальной частицы в точках либрации, лежащих на продолжениях малой оси экваториального сечения эллипсоида;

2) в точках либрации, расположенных в направлении большой оси эллипсоида, движение частицы неустойчиво;

3) в окрестности устойчивых положений относительного равновесия существуют два семейства периодических орбит долгого и короткого периодов;

4) в окрестности неустойчивых положений относительного равновесия существуют одно семейство периодических орбит короткого периода и одно семейство асимптотических орбит.

Периодические движения в обоих случаях происходят по орбитам, близким к эллипсам, размеры которых зависят от одного существенного параметра.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Батраков Ю. В. 1957. Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида. Бюлл. ИТА, **6**, 8 (81).  
 Ляпунов А. М. 1950. Общая задача об устойчивости движения. 3-е изд., ГИТТЛ, М.—Л.  
 Moulton F. R. 1923. An Introduction to Celestial Mechanics. New York.

Поступило в Редакцию  
 15 июня 1956 г.

# Бюллетень Института Теоретической Астрономии

Т. VI

1957

№ 8 (81)

## О траекториях полета ракеты вокруг Луны

*М. С. Лисовская*

В работе указываются условия существования орбит ракет, охватывающих Землю и Луну и проходящих на произвольно малом расстоянии от Луны. Разработан метод графического интегрирования, с помощью которого построено 5 симметричных орбит указанного типа.

ÜBER DIE RAKETENBAHNEN, DIE DEN MOND UMFASSEN, von *M. S. Lissowskaja*. — In dieser Arbeit werden die Existenzbedingungen der Raketenbahnen, die die Erde und den Mond umfassen und neben dem letzteren einen willkürlich kleinen Minimalabstand haben, ausgesagt. Mittels der vom Author gegebenen grafischen Methode werden 5 solchen symmetrischen Raketenbahnen konstruiert.

### Введение

Целью настоящей работы является выяснение качественной картины траекторий, по которым может двигаться ракета, запускаемая с Земли или с искусственного спутника, облетающая на небольшом расстоянии Луну и возвращающаяся обратно.

Существует целый ряд работ, в которых рассматривается построение траекторий ракет.

Для ракеты, снабженной реактивным двигателем, разрешена общая задача о выборе направления мгновенных импульсов, сообщаемых двигателем при условии минимума расхода горючего. Так, например, выведены формулы, определяющие траекторию с минимальным расходом горючего, связывающую круговые орбиты вокруг двух планет (Lawden, 1955).

Что касается построения траектории ракеты, целиком предоставленной действию сил притяжения, задача решалась, как правило, без учета возмущений (Коой, 1950; Эно-Пельтри, 1950), а именно: в сферах действия Земли и Луны строились две невозмущенные круговые орбиты, причем переход с одной орбиты на другую фактически не рассматривался.

Лишь в нескольких работах были определены траектории полета ракеты методом численного интегрирования уравнений возмущенного движения.

В одной из них (Goldstein, Fröberg, 1952) решается наиболее легкая задача — полет на Луну без последующего возвращения на Землю. В недавно вышедшей работе Г. А. Чеботарева (Чеботарев, 1956) строится траектория полета вокруг Луны с возвращением на Землю без дополнительного импульса. Автор строит эту орбиту последовательными приближениями так, чтобы в результате удовлетворить двум условиям:

- 1) скорость ракеты в момент ее соединения с Луной принимается равной нулю;
- 2) траектория должна касаться поверхности Земли.

Первое условие гарантирует симметрию траектории (см. § 2), но при этом ограничивает минимальное расстояние ракеты от центра Луны (оно оказывается весьма значительным — 31 600 км).

Как будет показано в настоящей работе, это расстояние может быть сделано, вообще говоря, любым, без нарушения симметрии траектории, если не связывать себя нулевым значением скорости в момент соединения с Луной. Именно мы зададимся определенным (небольшим) расстоянием ракеты от центра Луны в момент соединения и будем

выбирать величину начальной скорости таким образом, чтобы траектория пересекала поверхность Земли или прошла вблизи нее.

В работе построено 6 орбит, охватывающих более или менее полно интересующую нас область движения. Из них 5 орбит построено особым методом графического интегрирования.

### § 1. Об условиях, которыми должна удовлетворять траектория ракет без расхода горючего

Наиболее простой (с вычислительной точки зрения) способ построения траектории ракеты, которая проходила бы на заданном расстоянии от Луны, состоит в сообщении ракете дополнительного импульса вблизи Луны, там, где ее движение относительно Луны становится невозмущенным.

Гораздо труднее выбрать начальные условия движения ракеты, если она на своем пути не получает дополнительного импульса.

Среди задач, которые будут поставлены при облете Луны, можно предвидеть фотографирование части Луны, которая не видна с Земли. При этом ракета должна приблизиться к Луне на некоторое минимальное расстояние  $\varepsilon$ .

Таким образом, наша задача будет решена, если траектория ракеты будет удовлетворять двум условиям:

1) ракета пересечет линию Земля—Луна со стороны невидимой части поверхности Луны на расстоянии  $\varepsilon$  от ее центра;

2) ракета вернется на Землю, т. е. пройдет на небольшом расстоянии от центра Земли.

В тот момент, когда будет выполняться первое условие, расстояние ракеты от центра Земли будет равно  $r_2 = a' + \varepsilon$ , где  $a'$  — среднее значение большой полуоси Лунной орбиты. (Движение Луны считаем круговым).

Зададим начальные условия движения ракеты. Пусть в начальный момент ракета находится на малом расстоянии  $r_1$  от центра Земли. Рассмотрим эллиптическое движение относительно Земли, определяемое минимальным расстоянием от центра Земли, равным  $r_1$ , и максимальным, равным  $r_2$ , где  $r_2 = a' + \varepsilon$ . Элементы эллипса  $a_0$  и  $e_0$  определяются из соотношений

$$\begin{aligned} r_1 &= a_0(1 - e_0), \\ r_2 &= a_0(1 + e_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть  $v_0$  — эллиптическая скорость, соответствующая расстоянию  $r_1$ . Сообщим эту скорость ракете в начальный момент.

Пока ракета не попадет в сферу действия Луны, она будет двигаться по эллиптической орбите с элементами  $a_0$  и  $e_0$ , определяемыми соотношениями (1).

Вблизи Луны движение ракеты становится невозмущенным относительно Луны. Скорость ее при этом с удалением от Земли увеличивается под влиянием Луны, в то время как эллиптическая скорость с удалением от Земли уменьшается.

Итак, в области тесного сближения с Луной истинная скорость больше эллиптической. Кроме того, очевидно, что  $r$  (расстояние от Земли) с течением времени возрастает. Учтя эти два обстоятельства, покажем, что для оскулирующей орбиты относительно Земли в рассматриваемый момент тесного сближения с Луной минимальное расстояние от Земли  $r_1$  будет, вообще говоря, больше, чем исходное расстояние  $r_1$ , являющееся минимальным для исходной эллиптической орбиты.

Действительно, как видно из соотношения  $v^2 = k^2 m_\tau \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a_{\text{оск.}}} \right)$ , при одновременном увеличении  $v$  и  $r$  большая полуось оскулирующих орбит  $a_{\text{оск.}}$  будет с течением времени увеличиваться; в частности,  $a_{\text{оск.}} > a_0$ .

Покажем теперь, что  $e_{\text{оск.}} < e_0$ . Как было сказано, нас интересует случай, когда ракета приблизится к Луне на минимальное расстояние  $\varepsilon$  при пересечении ею линии

Земля—Луна. Так как  $\varepsilon$  — минимальное расстояние от Луны, то скорость ракеты относительно Луны будет в этот момент перпендикулярна линии  $TLR$  (рис. 1).

Скорость Луны  $\bar{v}_L$  тоже перпендикулярна к линии  $TLR$ , следовательно, скорость ракеты относительно Земли, равная  $\bar{v}_R = \bar{v}_L + \bar{v}'_R$ , тоже перпендикулярна к этой линии. Тогда  $TR$  будет афелийным расстоянием для оскулирующей орбиты, соответствующей этому моменту времени. Расстояние  $TR$ , равное  $a + \varepsilon$  и, следовательно, равное  $r_2$ , будет равно

$$TR = r_2 = a_{\text{оск.}}(1 + e_{\text{оск.}}).$$

Для исходной эллиптической орбиты мы имели  $r_2 = a_0(1 + e_0)$ . Так как  $a_{\text{оск.}} > a_0$ , то будем иметь  $e_{\text{оск.}} < e_0$ .

Видим, что перигелийное расстояние для оскулирующей орбиты  $r'_1 = a_{\text{оск.}}(1 - e_{\text{оск.}})$ , действительно, будет больше  $r_1 = a_0(1 - e_0)$ .

Значит, для того чтобы могло быть  $r'_1 \approx r_1$  (т. е. для обеспечения возвращения ракеты на Землю) необходимо, чтобы после сближения с Луной последующие возмущения от Луны уменьшили бы в достаточной степени скорость ракеты.

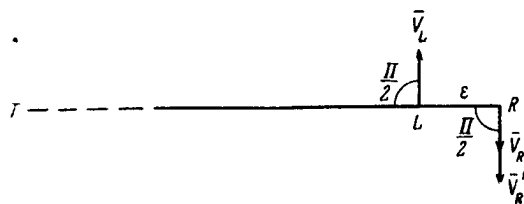


Рис. 1.

Обозначим через  $\theta$  угол между скоростью ракеты и ее радиусом-вектором. В зависимости от направления скорости ракеты вблизи Луны могут представиться четыре случая: 1)  $0 < \theta < 90^\circ$ , 2)  $90^\circ \leq \theta < 180^\circ$ , 3)  $180^\circ < \theta \leq 270^\circ$ , 4)  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  (скорость Луны образует с радиусом-вектором угол  $\vartheta = 90^\circ$ ).

Рассмотрим движение ракеты с момента  $t_0$ , когда она находится на линии Луна—Земля на расстоянии  $\Delta_0$  от центра Луны, где  $\Delta_0$  близко к минимальному расстоянию от центра Луны, равному  $\varepsilon$  (в идеальном случае  $\Delta_0 = \varepsilon$ ). Тогда углы будут близки к  $90$  или к  $270^\circ$ .

На рис. 2 представлен случай 2, на рис. 3 — случай 3, на рис. 4 — случай 1 и на рис. 5 — случай 4.

Рассмотрим изменение скорости ракеты  $v_R^0$ , начиная с момента  $t_0$ .

Если  $\Delta$  — расстояние ракеты от центра Луны, то ускорение, сообщаемое Луной, равно  $w = -\frac{k^2 m_L}{\Delta^2}$ . Пусть  $\bar{w}_0$  — ускорение, сообщаемое Луной в момент  $t_0$ . Тогда  $w_0 = -\frac{k^2 m_L}{\Delta_0^2}$ . Изменение скорости  $\bar{v}_R^0$  за малый промежуток времени  $\Delta t$  будет равно

$\Delta v_R^0 = \bar{w}_0 \cdot \Delta t$  и направлено к Луне. Построим для каждого случая скорости  $\bar{v}_R^0$ , равные  $\bar{v}'_R = \bar{v}_R^0 + \Delta \bar{v}_R^0$ . За время  $\Delta t$  Луна, движущаяся со скоростью  $\bar{v}_L$ , переместится в точку  $L_1$ , а ракета за этот же промежуток времени переместится в точку  $R_1$ , причем  $LL_1 = \bar{v}_L \cdot \Delta t$ , а  $RR_1 \approx \bar{v}'_R \cdot \Delta t$ .

Из построения видим, что в случае 2 (рис. 2) скорость ракеты продолжает увеличиваться (т. е.  $v'_R > v_R^0$  и т. д.), так как она в момент  $t_0$  образует острый угол с направлением на Луну, и с течением времени этот угол уменьшается.

В случае 3 (рис. 3) через малый промежуток времени скорость ракеты начнет образовывать тупой угол с направлением на Луну. Это поведет к тому, что скорость  $v_R$  начнет уменьшаться.

Из построения  $\bar{v}'_R$  для случая 1 (рис. 4) мы видим, что на малом промежутке времени (малом, так как  $\theta_0$  близко к  $90^\circ$ ) скорость ракеты уменьшается, но затем начинает увеличиваться в связи с тем, что угол между  $\bar{v}_L$  и направлением на Луну становится острым и в дальнейшем уменьшается.

Наконец, в случае 4 (рис. 5) скорость ракеты сразу же начинает уменьшаться.

Заметим, что случаи 1 и 2, с одной стороны, и случаи 3 и 4, с другой, отличаются величиной угла между скоростью ракеты и скоростью Луны. В случаях 1 и 2 этот угол острый, а в 3 и 4 — тупой.

Таким образом, в результате построения мы видим, что в случаях 3 и 4, т. е. когда угол между скоростями ракеты и Луны тупой, возмущения со стороны Луны после сближения благоприятствуют уменьшению скорости ракеты, т. е. возвращению ракеты на Землю.

В конечном счете вероятность возвращения ракеты на Землю с некоторого минимального расстояния  $\varepsilon$  от Луны определяется скоростью относительно Луны, с которой она

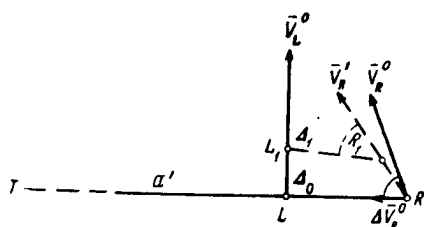


Рис. 2 (случай 2).

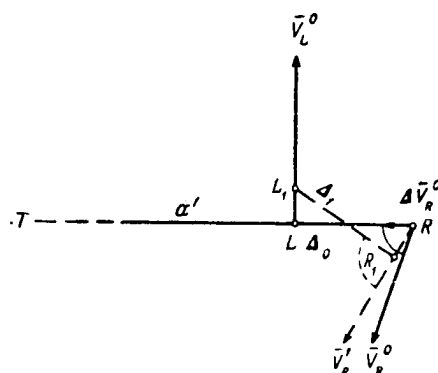


Рис. 3 (случай 3).

проходит вблизи последней. Можно сказать, что различие между разобранными случаями при фиксированном  $\varepsilon$  состоит в различной величине этой скорости.

Чем меньше  $\varepsilon$ , тем больше должна быть относительная скорость. Однако при решении задачи в первом приближении мы по существу ничего не знаем об оптимальной величине этой скорости и тем более о величине начальной скорости ракеты относительно Земли.

В первом приближении мы исходим из невозмущенной эллиптической орбиты с заданными перигелийным и афелийным расстояниями.

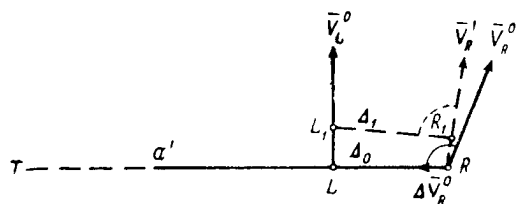


Рис. 4 (случай 1).

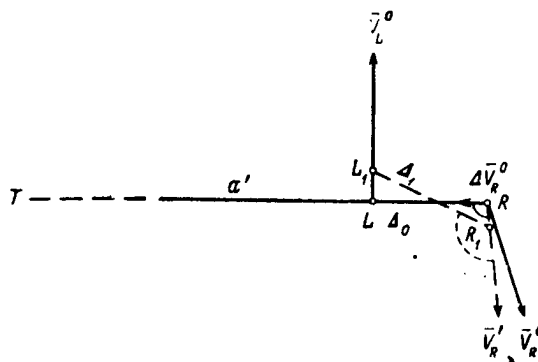


Рис. 5 (случай 4).

Дальнейшие приближения строим таким образом, чтобы величина и направление скорости ракеты относительно Луны оказались бы наиболее благоприятными (в указанном выше смысле) для возвращения на Землю.

## § 2. Об условиях существования симметричных орбит

В работе использована известная идея о симметричных траекториях, нашедшая свое применение в работах Копенгагенской школы при построении периодических орбит в задаче трех тел и примененная Г. А. Чеботаревым в задаче о ракетах (Чеботарев, 1956).

Пусть движение по орбите задается уравнениями  $x = f(t)$ ,  $y = \varphi(t)$ . Будем говорить, что орбита симметрична, если

$$\begin{aligned} f(t) &\equiv f(-t), \\ \varphi(t) &\equiv -\varphi(-t). \end{aligned}$$

Из этого определения следует, что траектория движения симметрична относительно оси  $x$ , а график скоростей симметричен относительно оси  $y$ .

Поэтому достаточно построить только половину орбиты (соответствующую, например,  $y > 0$  или  $y < 0$ ). Кроме того, симметричные орбиты имеют еще и то преимущество, что начальные и конечные координаты и скорости симметричны в указанном выше смысле. Это создает известные удобства, так как при своем возвращении ракета снова коснется орбиты спутника, с которой она была запущена, и сможет перейти на эту орбиту с помощью такого же по величине толчка, с каким она запускалась для полета вокруг Луны.

Пусть движение ракеты определяется следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= F(x, y, t), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \Phi(x, y, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Можно доказать, что если правые части уравнений (2) обладают свойством

$$\begin{aligned} F(x, -y, -t) &\equiv F(x, y, t), \\ \Phi(x, -y, -t) &\equiv -\Phi(x, y, t) \end{aligned} \quad (3)$$

и если в начальный момент  $\frac{dx}{dt} = y = 0$  (т. е. в начальный момент ракета находится на оси  $x$ , а скорость ее перпендикулярна оси  $x$ ), то траектория будет симметричной.

**Доказательство.**

Пусть

$$x = f(t) \text{ и } y = \varphi(t) \quad (4)$$

частное решение уравнений (2).

В соответствии с этим имеем тождества

$$\begin{aligned} \frac{d^2f(t)}{dt^2} &\equiv F[f(t), \varphi(t), t], \\ \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} &\equiv \Phi[f(t), \varphi(t), t]. \end{aligned}$$

Возьмем две следующие функции  $\xi = -f(-t)$  и  $\eta = -\varphi(-t)$ . Дифференцируя их дважды и принимая во внимание (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2f(-t)}{dt^2} = \frac{d^2f(-t)}{d(-t)^2} \equiv F[f(-t), \varphi(-t), -t] \equiv F[f(-t), -\varphi(-t), t] \equiv F(\xi, \eta, t), \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\frac{d^2\varphi(-t)}{dt^2} = -\frac{d^2\varphi(-t)}{d(-t)^2} \equiv -\Phi[f(-t), \varphi(-t), -t] \equiv \Phi[f(-t), -\varphi(-t), t] \equiv \Phi(\xi, \eta, t). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\xi$  и  $\eta$  также являются решением уравнений (2).

Для того чтобы это решение совпало с решением (4), необходимо и достаточно в силу единственности решения системы дифференциальных уравнений (2), чтобы их начальные условия совпадали:

$$x_0 = \xi_0, \quad y_0 = \eta_0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0. \quad (5)$$

При  $t=0$  имеем

$$\begin{aligned} x_0 &= f(0), \quad y_0 = \varphi(0), \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{df}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0, \\ \xi_0 &= f(0), \quad \tau_0 = \varphi(0), \quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{df}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае  $y_0 = \varphi(0) = 0$  и  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{df}{dt}\right)_0 = 0$  будет иметь место (5).

Но тогда  $f(-t) \equiv f(t)$  и  $\varphi(-t) \equiv -\varphi(t)$ .

Это означает симметрию кривой  $x = f(t)$ ,  $y = \varphi(t)$  относительно оси  $x$ .

### § 3. Особенности численного интегрирования дифференциальных уравнений задачи

При решении задачи вводим следующие упрощения:

- 1) рассматриваем движение ракеты под действием сил притяжения Земли, Луны и Солнца, пренебрегая возмущениями других тел Солнечной системы;
- 2) движение Луны и годичное движение Солнца рассматриваем в одной плоскости;
- 3) считаем движения Луны и Солнца круговыми;
- 4) массой ракеты пренебрегаем.

Систему координат выбираем следующим образом.

Начало помещаем в центр Земли. Оси сохраняют постоянное направление относительно неподвижных звезд.

Ось  $x$  направлена в начальное положение центра Солнца. Ось  $y$  составляет угол  $+\frac{\pi}{2}$  с осью  $x$ .

В нашей системе движения Луны и Солнца будут описываться уравнениями

$$\begin{aligned} x_L &= a' \cos(\vartheta_0 - n't), & x_S &= a'' \cos n''t, \\ y_L &= -a' \sin(\vartheta_0 - n't), & y_S &= a'' \sin n''t, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $a'$  и  $a''$  — средние расстояния до Луны и Солнца;  $n'$  и  $n''$  — соответствующие средние движения;  $\vartheta_0$  — угловое расстояние Луны от оси  $x$  в момент  $t=0$ .

Дифференциальные уравнения относительного движения ракеты записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2 m_T \frac{x}{r^3} + k^2 m_L \left( \frac{x_L - x}{\Delta_{RL}^3} - \frac{x_L}{r_L^3} \right) + k^2 m_S \left( \frac{x_S - x}{\Delta_{RS}^3} - \frac{x_S}{r_S^3} \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2 m_T \frac{y}{r^3} + k^2 m_L \left( \frac{y_L - y}{\Delta_{RL}^3} - \frac{y_L}{r_L^3} \right) + k^2 m_S \left( \frac{y_S - y}{\Delta_{RS}^3} - \frac{y_S}{r_S^3} \right), \end{aligned}$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $x_L$ ,  $y_L$ ,  $x_S$ ,  $y_S$  — декартовы координаты ракеты, Луны и Солнца,

$$\Delta_{RL}^2 = (x - x_L)^2 + (y - y_L)^2,$$

$$\Delta_{RS}^2 = (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$k^2$  — постоянная тяготения;  $m_T$ ,  $m_L$ ,  $m_S$  — массы Земли, Луны и Солнца.

Учитывая (7), имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 m_T \frac{x}{r^3} - k^2 m_L \left[ \frac{\cos(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} + \frac{x - a' \cos(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{RL}^3} \right] - k^2 m_S \left[ \frac{\cos n''t}{a''^2} + \frac{x - a'' \cos n''t}{\Delta_{RS}^3} \right],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2m_T \frac{y}{r^3} - k^2m_L \left[ -\frac{\sin(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} + \frac{y + a' \sin(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{RL}^3} \right] -$$

$$- k^2m_S \left[ \frac{\sin n''t}{a''^2} + \frac{y - a'' \cos n''t}{\Delta_{RS}^3} \right],$$

где

$$\Delta_{RL}^2 = [x - a' \cos(\vartheta_0 - n't)]^2 + [y + a' \sin(\vartheta_0 - n't)]^2,$$

$$\Delta_{RS}^2 = [x - a'' \cos n''t]^2 + [y - a'' \sin n''t]^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

При переносе начала координат в центр Луны с сохранением направления осей координат уравнения относительного движения принимают вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2m_L \frac{x}{r^3} - k^2m_T \left[ \frac{x + a' \cos(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{RT}^3} - \frac{\cos(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} \right] -$$

$$- k^2m_L \frac{\cos(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} - k^2m_S \left[ \frac{x + a' \cos(\vartheta_0 - n't) - a'' \cos n''t}{\Delta_{RS}^3} + \frac{\cos n''t}{a''^2} \right],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2m_L \frac{y}{r^3} - k^2m_T \left[ \frac{y - a' \sin(\vartheta_0 - n't)}{\Delta_{RT}^3} + \frac{\sin(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} \right] +$$

$$+ k^2m_L \frac{\sin(\vartheta_0 - n't)}{a'^2} - k^2m_S \left[ \frac{y - a' \sin(\vartheta_0 - n't) - a'' \sin n''t}{\Delta_{RS}^3} + \frac{\sin n''t}{a''^2} \right],$$
(8)

где  $x, y$  — координаты ракеты относительно Луны,

$$\Delta_{RT}^2 = [x + a' \cos(\vartheta_0 - n't)]^2 + [y - a' \sin(\vartheta_0 - n't)]^2,$$

$$\Delta_{RS}^2 = [x + a' \cos(\vartheta_0 - n't) - a'' \cos n''t]^2 + [y - a' \sin(\vartheta_0 - n't) - a'' \sin n''t]^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Формулами (8) пользуемся, когда влияние Луны становится преобладающим.

При численном интегрировании приведенных выше уравнений пользуемся следующими формулами метода квадратур, соответствующего методу Коуэлла (Субботин, 1937):

$$x_n = f_n^2 + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots,$$

$$f_0^2 = x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60480} f_0^4 + \dots,$$

$$f_{-1/2}^2 = \omega x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{12} f_0' - \frac{11}{720} f_0^3 + \dots,$$

где  $\omega$  — шаг интегрирования.

Формулы для  $y_n$  аналогичны.

При интегрировании уравнений движения ракеты вблизи Луны вводим подстановку Сундмана (Sundman, 1913)

$$dt = r du, \quad (9)$$

где  $u$  — новая независимая переменная интегрирования вместо  $t$ .

Эта подстановка значительно облегчает вычисления.



В формулах (8) члены  $k^2 m_L \frac{x}{r^3}$ ,  $k^2 m_L \frac{y}{r^3}$  сильно возрастают с убыванием  $r$ , что для сохранения точности потребует частого уменьшения шага.

С заменой независимой переменной по формуле (9) будем иметь уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{du^2} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dx}{du} - k^2 m_L \left( \frac{x}{r} \right) - r^2 \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2 y}{du^2} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dy}{du} - k^2 m_L \left( \frac{y}{r} \right) - r^2 \frac{\partial R}{\partial y},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 m_L \frac{x}{r^3}, \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 m_L \frac{y}{r^3}.\end{aligned}\tag{10}$$

В области тесного сближения с Луной влияние последней настолько сильно по сравнению с действием Земли и Солнца, что для приближенной оценки правых частей можно пользоваться формулами невозмущенного движения.

Оценим каждый член в правой части (10).

Члены  $r^2 \frac{\partial R}{\partial x}$ ,  $r^2 \frac{\partial R}{\partial y}$  уменьшаются по мере приближения к Луне. Члены  $k^2 m_L \left( \frac{x}{r} \right)$  и  $k^2 m_L \left( \frac{y}{r} \right)$  ограничены. Оценим выражения  $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dx}{du}$  и  $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{du} \cdot \frac{dy}{du}$ .

Из уравнения Кеплера имеем

$$(1 - e \cos E) dE = ndt,$$

$$rdE = nadu.$$

Сравнивая последнее равенство с (9), получаем  $du = \frac{dE}{na}$ . Но  $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dx}{dE}$  и  $\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dy}{dE}$  ограничены. Действительно

$$\frac{dx}{dE} = -a \sin E, \quad \frac{dy}{dE} = a \sqrt{1 - e^2} \cos E, \quad \frac{dr}{dt} = ae \sin E,$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dx}{dE} = \frac{ae \sin^2 E}{1 - e \cos E} = \frac{aey}{\sqrt{1 - e^2} \cdot r} \sin E,$$

где  $\left| \frac{y}{r} \right| < 1$ ,  $|\sin E| < 1$ .

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dE} \cdot \frac{dy}{dE} = \frac{ae \sqrt{1 - e^2} \cos E \sin E}{1 - e \cos E} = \frac{aey}{r} \cos E,$$

где  $\left| \frac{y}{r} \right| < 1$ ,  $|\cos E| < 1$ .

Видим, что после замены независимой переменной  $\frac{d^2 x}{du^2}$  и  $\frac{d^2 y}{du^2}$  становятся ограниченными и

$$\frac{d^2 x}{du^2} \approx -\frac{aey \sin E}{\sqrt{1 - e^2} \cdot r},$$

$$\frac{d^2 y}{du^2} \approx \frac{ae}{r} y \cos E.$$

Преобразуем теперь уравнения (10). Выразим  $\frac{dr}{du}$  через  $\frac{dx}{du}$ ,  $\frac{dy}{du}$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $r$ . Будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{du^2} &= \frac{x}{r^2} \left( \frac{dx}{du} \right)^2 + \frac{y}{r^2} \cdot \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{du} + r^2 \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \frac{d^2y}{du^2} &= \frac{y}{r^2} \left( \frac{dy}{du} \right)^2 + \frac{x}{r^2} \cdot \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{du} + r^2 \frac{d^2y}{dt^2}.\end{aligned}\quad (11)$$

Правые части уравнений (11) теперь содержат первые производные. Поэтому для численного интегрирования формула Коуэлла для непосредственного употребления теперь не годится. Сведя нашу систему двух уравнений к системе четырех уравнений 1-го порядка, мы можем воспользоваться затем соответствующей формулой квадратур. Но мы поступим несколько иначе, а именно: оставим в силе формулу Коуэлла, причем входящие в правую часть первые производные выразим через разности.

Будем иметь

$$\begin{aligned}\omega \left( \frac{dx}{du} \right)_n &= f_n^{-1} - \frac{1}{12} f'_n + \frac{11}{720} f''_n - \frac{191}{60480} f'''_n + \dots = ( )_f, \\ \omega \left( \frac{dy}{du} \right)_n &= g_n^{-1} - \frac{1}{12} g'_n + \frac{11}{720} g''_n - \frac{191}{60480} g'''_n + \dots = ( )_g, \\ f_n &= \omega^2 \left[ \frac{x}{r^2} ( )_f^2 + \frac{y}{r} ( )_f ( )_g + r^2 \frac{d^2x}{dt^2} \right], \\ g_n &= \omega^2 \left[ \frac{y}{r^2} ( )_g^2 + \frac{x}{r} ( )_f ( )_g + r^2 \frac{d^2y}{dt^2} \right], \\ f_n &= \omega^2 \left( \frac{d^2x}{du^2} \right)_n, \\ g_n &= \omega^2 \left( \frac{d^2y}{du^2} \right)_n.\end{aligned}$$

Начальные значения  $\left( \frac{d^2x}{du^2} \right)_0$ ,  $\left( \frac{d^2y}{du^2} \right)_0$ ,  $\left( \frac{dx}{du} \right)_0$ ,  $\left( \frac{dy}{du} \right)_0$  были вычислены по  $\left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_0$ ,  $\left( \frac{d^2y}{dt^2} \right)_0$ ,  $\left( \frac{dx}{dt} \right)_0$ ,  $\left( \frac{dy}{dt} \right)_0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $r_0$ , взятым из таблицы численного интегрирования по переменной  $t$ .

При интегрировании уравнений (11) несколько значений  $r^2 \frac{d^2x}{dt^2}$  и  $r^2 \frac{d^2y}{dt^2}$  были проинтерполированы для новых значений времени, соответствующих равным интервалам переменной  $u$ . При этом была использована формула Ньютона для неравных промежутков аргумента (Уиттекер и Робинсон, 1935). Если известны значения функций  $f(u_0)$ ,  $f(u_1)$ ,  $f(u_2) \dots f(u_k)$ , и разделенные разности  $k$ -го порядка исчезают или незначительны, то значение функции  $f(u)$  для некоторого промежуточного значения аргумента  $u$  может быть найдено по формуле

$$\begin{aligned}f(u) &= f(u_0) + (u - u_0)f(u_0, u_1) + (u - u_0)(u - u_1)f(u_0, u_1, u_2) + \\ &+ (u - u_0)(u - u_1)(u - u_2)f(u_0, u_1, u_2, u_3) + \dots + \\ &+ (u - u_0)(u - u_1) \dots (u - u_{k-2})f(u_0, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}),\end{aligned}$$

где  $f(u_0, u_1)$ ,  $f(u_0, u_1, u_2) \dots$  — разделенные разности. В нашем случае известны четыре значения аргумента, и разделенные разности 4-го порядка равны 0.

#### § 4. Исходная орбита

За единицы измерения приняты: экваториальный радиус Земли, равный 6378 км, сутки и масса Земли.

Приняты следующие значения астрономических постоянных: средний радиус Лунной орбиты  $a' = 60.270$  радиусов Земли; средний радиус Солнечной орбиты  $a'' = 23440$  радиусов Земли; масса Луны  $m_l = 0.012265$  массы Земли; радиус Луны  $R_l = 1738$  км; среднее движение Луны  $n' = 13.17643$ ; среднее движение Солнца  $n'' = 0.98561$ .

Ракета запускается с искусственного спутника, период обращения которого равен  $P_{сп.} = 2^h$ , или 0.083333 суток.<sup>1</sup> Радиус орбиты спутника соответственно равен  $P_{сп.} = 1.2673$  радиусов Земли (8083 км). Минимальное расстояние ракеты от центра Земли тоже будет равно  $r_1 = 1.2673$ . Максимальное расстояние от центра Земли принимаем

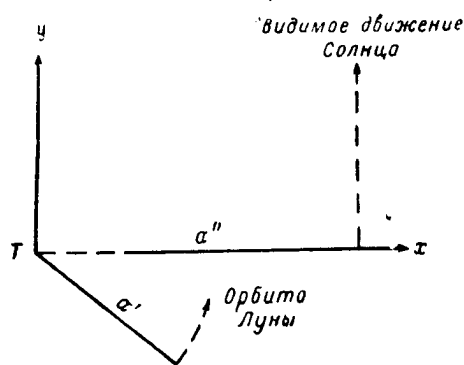


Рис. 6.

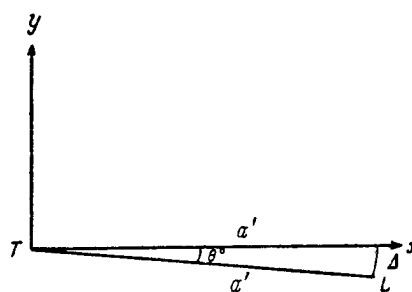


Рис. 7.

равным  $r_2 = a' + 0.3136$  (0.3136 составляет 2000 км, а минимальное расстояние от поверхности Луны составляет около 200 км).

Имеем  $r_2 = 60.5836$ ,  $r_1 = 1.2673$ .

По формуле (1) получим элементы эллиптической орбиты — большую полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ , период  $P$ :

$$a = 30.9259, \quad e = 0.95902, \quad P = 10.2071.$$

Начальная скорость ракеты  $v_0$  равна эллиптической скорости на расстоянии  $r_1 = 1.2673$ , а именно:  $v_0 = 133.70$ . Направления движения Луны и Солнца показаны на рис. 6.

Из двух возможных направлений начальной скорости  $v_0 = +\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$  и  $v_0' = -\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$  выбираем первое.

Определим угол  $\theta_0$ , который составляет радиус-вектор Луны с осью  $x$  в начальный момент. На рис. 7 угол  $\theta_0 = \angle RTL$  — угол, который составляет направление на Луну с осью  $x$  в тот момент, когда ракета пересекает ось  $x$ . Пусть  $\Delta$  есть радиус сферы действия Луны. Он может быть определен соотношением

$$\frac{k^2 m_T}{(TR)^2} = \frac{k^2 m_l}{\Delta^2} \quad (12)$$

(условие равенства ускорений, создаваемых протяжением Земли и Луны).

<sup>1</sup> Проект Брауна (Haskins, 1953).

Возьмем  $TR \approx a'$ . Тогда соотношение (12) позволит определить  $\Delta$  и из равнобедренного треугольника  $TRL$  — угол  $\theta_0$ . Будем иметь

$$\frac{k^2 m_T}{a'^2} = \frac{k^2 m_L}{\Delta^2},$$

отсюда  $\Delta = 6.6747$ ,  $\angle \theta_0 = 6.3486$ .

Угол  $\vartheta_0$  возьмем равным  $\vartheta_0 = n' \frac{P}{2} + \theta_0$ , где  $\frac{P}{2} = 5.1035$  — полупериод эллиптической орбиты.

Исходную орбиту, таким образом, строим с начальными условиями:

$$x_0 = 1.2673, \quad y_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 133.70, \quad \vartheta_0 = 73^\circ 59' 52''.$$

Вычисления ведутся с четырьмя десятичными знаками. Шаг выбираем так, чтобы четвертыми разностями можно было пренебречь. На разных участках интегрирования шаг меняется от  $\omega_0 = 0.001$  до  $\omega = 0.128$ . Всего было сделано около 200 шагов.

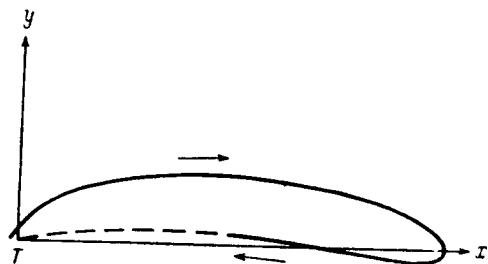


Рис. 8.

Прерывистой линией отмечена невозмущенная часть орбиты.

Общий вид исходной орбиты показан на рис. 8. Отметим, что вблизи Луны ракета движется относительно Луны по гиперболе, большая полуось которой имеет небольшой наклон к оси  $x$ . Элементы гиперболы:  $a = 0.5276$ ,  $e = 2.8116$ . Ракета проходит на минимальном расстоянии от Луны, равном  $0.9574$  (6100 км). Оно соответствует моменту  $t = 5.4628$ . Вблизи Луны скорость ракеты относительно Земли остается эллиптической, порядка скорости Луны (около 1.1 км). Элементы оскулирующей орбиты ракеты в конечный момент  $t = 7.23304$  следующие:  $a = 47.8698$ ,  $e = 0.9918$ . Ракета обязательно достигнет поверхности Земли, так как  $u = a(1 - e) = 0.3920$ . Скорость ракеты на поверхности Земли будет составлять около 11.169 км/сек.

## § 5. Метод графического интегрирования

Как было сказано во введении, наша задача состоит в выяснении качественной картины движения ракеты. Но так как не существует теории, с помощью которой можно было бы решить эту задачу в общем виде, то остается другой путь, а именно: исследование качественной картины движения на основании построения достаточно большого числа примеров орбит.

При решении дифференциальных уравнений возмущенного движения пользуются, как правило, методом численного интегрирования. Но, как известно, численное интегрирование — процесс трудоемкий. В некоторых задачах для сохранения точности в процессе интегрирования приходится менять шаг. При этом необходимое число шагов может стать очень большим.

При численном интегрировании исходной орбиты нам пришлось сделать около 200 шагов, причем шаг менялся более 10 раз. Однако цель данной работы не требует высокой точности. Мы постараемся найти метод, который кратчайшим путем повел бы к нашей цели — получению геометрической картины распределения интегральных кривых.

Таким методом является графическое интегрирование. Сущность его состоит в следующем.

1. Как известно, при численном интегрировании дифференциальных уравнений, мы разбиваем траекторию движения на малые участки. При этом шаг интегрирования мы выбираем таким образом, чтобы при данной точности разности определенного порядка были бы постоянными. В результате интегрирования получаем линию, которая с уменьшением шага приближается к действительной траектории движения.

В частности, если мы принимаем разности 1-го порядка равными нулю, то это значит, что на малом промежутке  $\Delta t$ , равном шагу интегрирования, мы считаем ускорение постоянным.

2. Введем в рассмотрение вектор ускорения  $\bar{w}$ , вектор изменения скорости  $\Delta v$ , вектор скорости  $\bar{v}$ , вектор перемещения  $\Delta S$ . Так как на графике можно изображать направления, то мы сможем строить эти вектора, откладывая в определенном масштабе их численные величины. При этом для каждого вектора  $r$ ,  $\bar{v}$  масштаб может быть своим.

Тогда вместо двух дифференциальных уравнений движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, y, t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \Phi(x, y, t)$$

мы можем интегрировать одно уравнение движения в векторной форме

$$\bar{w} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}(r, t),$$

где  $r$  — радиус-вектор ракеты.

Отсюда становится ясной последовательность операций, необходимых для графического метода:

- 1) пусть для некоторого момента  $t_i$  известны вектора  $\bar{w}_i$ ,  $\bar{v}_i$ ;
- 2) определяем изменение скорости  $\Delta v_i$  за малый промежуток времени  $\Delta t$ , на котором  $\bar{w}_i$  считаем постоянным. Будем иметь  $\Delta \bar{v}_i = \bar{w}_i \Delta t$ ;
- 3) скорость в момент времени  $t_i + \Delta t = t_{i+1}$  составит  $\bar{v}_{i+1} = \bar{v}_i + \Delta \bar{v}_i$ ;
- 4) вектор перемещения  $\Delta \bar{S}_i$ , соответствующий промежутку времени  $\Delta t_i$ , будет равен  $\Delta \bar{S}_i \approx \bar{v}_{i+1} \Delta t_i$ ;

- 5) в момент  $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$  радиус-вектор  $\bar{r}_{i+1}$  будет равен  $\bar{r}_{i+1} = \bar{r}_i + \Delta \bar{S}_i$ .

Далее все операции повторяются сначала в той же последовательности, т. е. по  $r_{i+1}$  находим  $\bar{w}_{i+1}$ , затем находим  $\Delta \bar{v}_{i+1}$ ,  $\bar{v}_{i+2}$ ,  $\Delta \bar{S}_{i+1}$  и т. д.

В нашем случае  $\bar{w} = \bar{F} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$ , где:  $\bar{w}_1 = -\frac{A_1}{r^2} r^0$ ;  $\bar{w}_2 = -\frac{A_2}{\Delta^2} \Delta^0$ ;  $A_1$ ,  $A_2$  — константы;  $r$ ,  $\Delta$  — расстояния ракеты соответственно до центра Земли и до центра Луны,  $r^0$ ,  $\Delta^0$  — соответствующие орты, показывающие, в каком направлении надо откладывать на графике отрезки  $\frac{A_1}{r^2}$  и  $\frac{A_2}{\Delta^2}$ .

Таким образом, мы видим, что при графическом интегрировании количество работы значительно уменьшается: во-первых, за счет того, что фактически мы имеем дело не с двумя, а с одним (векторным) уравнением. Кроме того, вместо вычисления выражений типа  $\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$ , ... нам нужно только измерить на чертеже  $r$ ,  $r_1$ , ... и вычислить  $r^{-2}$ ,  $r_1^{-2}$ , ...

Графический метод используется нами при построении симметричных траекторий ракет. Он дает готовую качественную картину, наглядное представление о характере траекторий в отдельности в зависимости от начальных условий движения и картину всего семейства в целом.

Точность результата при интегрировании графическим методом зависит как от числа шагов, так и от выбора масштаба. Для одного и того же числа шагов можно подобрать такой масштаб, что точность результата будет удовлетворительной.

Для выяснения точности графического метода мы построили „орбиту сравнения“, а именно: мы проинтегрировали графическим методом часть исходной орбиты, заключенную в сфере действия Луны с тем же шагом, что и при численном интегрировании исходной орбиты.

При этом был выбран следующий масштаб: для расстояний в 1 см — 0.2 радиусов Земли, для скоростей в 1 см — 0.5 радиус Земли/сутки, для ускорений в 1 см — 0.5 радиус Земли/сутки<sup>2</sup>.

В табл. 1 даны координаты орбиты сравнения параллельно с координатами, полученными численным интегрированием. Графическое интегрирование орбиты сравнения велось с точностью до двух десятичных знаков (напомним, что при численном интегрировании точность равнялась четырем десятичным знакам).

Таблица 1

$t$	Координаты, полученные численным интегрированием		Координаты, полученные графическим интегрированием	
	$x$	$y$	$x$	$y$
5.67304	58.3664	-2.4192	58.37	-2.42
5.71304	57.8334	-2.3793	57.83	-2.38
5.75304	57.2988	-2.3308	57.30	-2.32
5.79304	56.7636	-2.2756	56.77	-2.25
5.83304	56.2256	-2.2149	56.24	-2.18
5.87304	55.6848	-2.1504	55.70	-2.10
5.91304	55.1402	-2.0826	55.16	-2.03
5.95304	54.5914	-2.0118	54.62	-1.96
6.03304	53.4802	-1.8632	53.50	-1.78
6.11304	52.3484	-1.7068	52.37	-1.60
6.19304	51.1937	-1.5447	51.22	-1.42
6.27304	50.0143	-1.3775	50.06	-1.22
6.43304	47.5731	-1.0314	47.67	-0.87
6.59304	45.0091	-0.6736	45.10	-0.50
6.75304	42.3043	-0.3070	42.38	-0.20
6.91304	39.4384	0.0658	39.46	0.00
7.07304	36.3850	0.4428	36.35	0.58
7.23304	33.1096	0.8201	33.04	0.90

При построении орбиты сравнения ошибка для минимального расстояния от центра Земли  $r_1 = a(1 - e)$  составила 0.04 единицы измерения, т. е. около 240 км, ошибка в скорости  $v_p^2 = k^2 m_T \left(2 - \frac{1}{a}\right)$  — около 0.005 км/сек., где  $v_p$  — скорость ракеты на поверхности Земли.

Такой результат можно считать для наших целей удовлетворительным.

## § 6. Графическое построение симметричных орбит

Будем строить описанным выше графическим методом симметричные траектории движения ракеты.

Определим неподвижную систему координат следующим образом. Начало поместим в центр Земли. Ось  $x$  направим в точку, которую занимает центр Луны в начальный момент движения ракеты. Покажем, что при таком выборе системы координат правые части дифференциальных уравнений движения будут удовлетворять первому условию симметрии траекторий [§ 2, формулы (3)].

Действительно, в нашем случае дифференциальные уравнения движения ракеты относительно Земли имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, y, t) = -k^2 m_L \left[ \frac{x - a' \cos n' t}{\Delta_{RL}^3} + \frac{\cos n' t}{a'^2} \right] - k^2 m_T \frac{x}{r^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \Phi(x, y, t) = -k^2 m_L \left[ \frac{y - a' \sin n' t}{\Delta_{RL}^3} + \frac{\sin n' t}{a'^2} \right] - k^2 m_T \frac{y}{r^3},$$

где  $\Delta_{RL}^2 = (x - a' \cos n' t)^2 + (y - a' \sin n' t)^2$  (притяжением Солнца пренебрегаем).

Видим, что при замене  $t$  на  $-t$  и  $y$  на  $-y$  будет выполняться условие (3). Тогда для симметрии траектории ракеты должно выполняться еще второе условие — относительно начальных координат и скоростей. Поэтому возьмем в начальный момент  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = y_0 = 0$ .

Построим несколько траекторий, проходящих на одном и том же минимальном расстоянии от центра Луны, равном  $\Delta_0 = 1$  радиусу Земли (6378 км), которое в то же время равно минимальному расстоянию от центра Луны для исходной орбиты. Тогда в начальный момент будем иметь  $x_0 = a' - \Delta_0$ .

При интегрировании исходной орбиты оказалось, что на минимальном расстоянии от центра Луны, равном 1 радиусу Земли, скорость ракеты направлена под тупым углом к скорости Луны, что подтверждает рассуждения, приведенные в § 1 относительно условий, благоприятствующих возвращению ракеты на Землю.

Поэтому при построении симметричных траекторий мы будем выбирать начальные скорости ракеты  $v_{0i} = |\dot{y}_{0i}|$  направленными противоположно скорости Луны, т. е.  $y_{0i} < 0$  (рис. 9), но различными по величине. Строим пять симметричных траекторий со скоростями  $v_{0i}$ , равными в наших единицах  $v_{01} = 3 (= 0.222 \text{ км/сек.})$ ,  $v_{02} = 6 (= 0.444 \text{ км/сек.})$ ,  $v_{03} = 7.5 (= 0.554 \text{ км/сек.})$ ,  $v_{04} = 9 (= 0.666 \text{ км/сек.})$ ,  $v_{05} = 10.5 (= 0.775 \text{ км/сек.})$ .

Построение выполняем в таком же масштабе, с той же точностью, приблизительно с тем же (немного меньшим) числом шагов, что и в орбите сравнения. Поэтому можно ожидать, что ошибки построенных орбит будут близки к ошибкам орбиты сравнения.

Построение исходной орбиты показало, что в непосредственной близости от Луны шаг интегрирования  $\omega = 0.01$  является достаточно малым. Тем более этот шаг будет удовлетворительным при менее точном графическом методе интегрирования, где точность ограничивается двумя десятичными знаками (при численном интегрировании четырьмя десятичными знаками).

Построение осуществляется по принципу, изложенному в § 5 (см. графики 1—5). Интегрирование ведется до того момента, когда движение ракеты становится невозмущенным относительно Земли.

В табл. 2 помещены основные характеристики симметричных траекторий,

при этом введены следующие обозначения:  $v_0$  — начальная скорость ракеты, соответствующая минимальному расстоянию от центра Луны, равному 1 радиусу Земли (6378 км);  $v_1$  — скорость ракеты в момент  $t = 0.84$ , когда притяжение Луны становится незначительным;  $a, e$  — большая полуось и эксцентриситет, соответствующие этому моменту;  $r_1$  — минимальное расстояние от центра Земли;  $v_{r_1}$  — скорость ракеты на этом расстоянии;  $\Delta_0$  — минимальное расстояние от поверхности Земли;  $v_{\Delta_0}$  — соответствующая скорость.

Из полученных результатов можно заключить, что в промежутке от  $v_0 = 6$  до  $v_0 = 10.5$  находится множество орбит, для которых наибольшее минимальное расстояние от поверхности Земли составляет 10 000 км, а минимальное расстояние от центра Луны составляет 6378 км (радиус Земли). Все орбиты со скоростями от  $v_0 = 3$  до  $v_0 = 7.5$  образуют петлю, а именно: кривая пересекает сама себя в двух точках по разные стороны от Земли. С увеличением скорости  $v_0$  точки самопересечения орбит приближаются к Земле. Наконец, некоторой скорости  $v_0$ , заключенной в интервале  $7.5 < v_0 < 9$ , будет соответствовать орбита, для которой обе точки самопересечения сливаются в одну, совпадающую с центром Земли. (Соответствующая невозмущенная орбита является вырожденным эллипсом с  $e = 1$ , т. е. прямой линией).

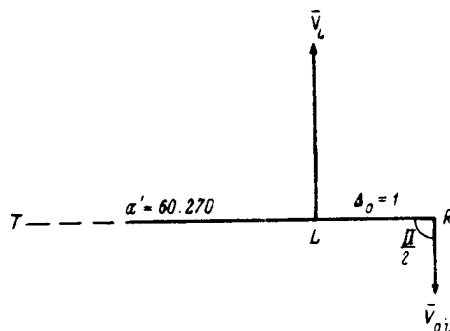


Рис. 9.

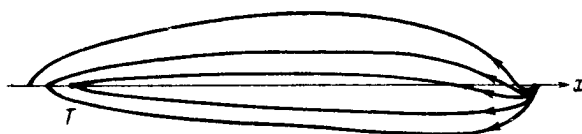


Рис. 10.

Таблица 2

№№ орбит	Единицы: радиус Земли, сутки					$\Delta_0$ (в км)	$v_{r_1}$ (в км/сек.)	$v_{\Delta_0}$ (в км/сек.)	Тип
	$v_0$	$v_1$	$a$	$e$	$r_1$				
1	3	13.45	48.100	0.9115	4.2568	21000	5.52	—	II
2	6	10.12	35.932	0.9236	2.7432	10000	6.48	—	II
3	7.5	9.27	34.423	0.9833	0.5731	—	—	11.147	II
4	9	8.70	33.647	0.9918	0.2759	—	—	11.537	I
5	10.5	8.80	34.037	0.9510	1.6678	4000	8.59	—	I

Орбиты со скоростями  $v_0=9'$  и  $v_0=10.5$  пересекают сами себя в одной точке, причем Земля оказывается в замкнутой части траектории.

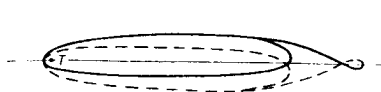


Рис. 11.



Рис. 12.

На рис. 10 изображены полутраектории всех симметричных орбит. Стрелками ограничена часть траектории, пройденная графическим интегрированием.

На рис. 11 изображена траектория типа II, на рис. 12 — траектория типа I. Симметричные полутраектории изображены прерывистой линией.

### Заключение

Учитывая, что при построении симметричных траекторий минимальное расстояние ракеты от Луны взято малым, по произвольным, и обобщая результаты построения, мы можем сделать следующие выводы.

1. Возможно построение семейства орбит без дополнительного импульса, проходящих на любом малом расстоянии от Луны, как касающихся поверхности Земли, так и проходящих вблизи ее поверхности.

2. Построенные симметричные траектории зависят от двух существенных параметров: от скорости ракеты в сфере действия Луны  $v_0$  (а) и от минимального расстояния ракеты от центра Луны  $\varepsilon$  (б). Рассмотрим каждую из этих зависимостей.

а) Фиксируем  $\varepsilon$  (в нашем случае  $\varepsilon=1$  радиусу Земли). Повидимому, при  $v_0 \ll 3$  ракета будет настолько сильно увлекаться притяжением Луны, что возвращение на Землю станет невозможным. Очевидно, тот же результат получится и при  $v_0 \gg 10.5$ , так как при этом скорость ракеты относительно Земли будет приближаться к гиперболической.

б) Фиксируем  $v_0$  таким образом, чтобы при  $\varepsilon=1$  радиусу Земли осуществлялось возвращение ракеты (в нашем случае  $v_0$  направлено в сторону, противоположную скорости Луны, и по величине заключено в интервале  $6 \leq v_0 \leq 10.5$ ). Очевидно, что при уменьшении  $\varepsilon$  влияние Луны возрастает, и при достаточно малом  $\varepsilon$  возвращение ракеты на Землю станет невозможным. При достаточно большем  $\varepsilon$  взятая скорость  $v_0$  почти не испытает возмущений от Луны (в сторону уменьшения), поэтому будет близка к гиперболической, т. е. такой случай оказывается также неблагоприятным с точки зрения возможности возвращения на Землю.

Из этих рассуждений следует, что если мы задаемся целью построить траекторию ракеты, возвращающуюся на Землю, то между  $\varepsilon$  и  $v_0$  должна существовать обратная



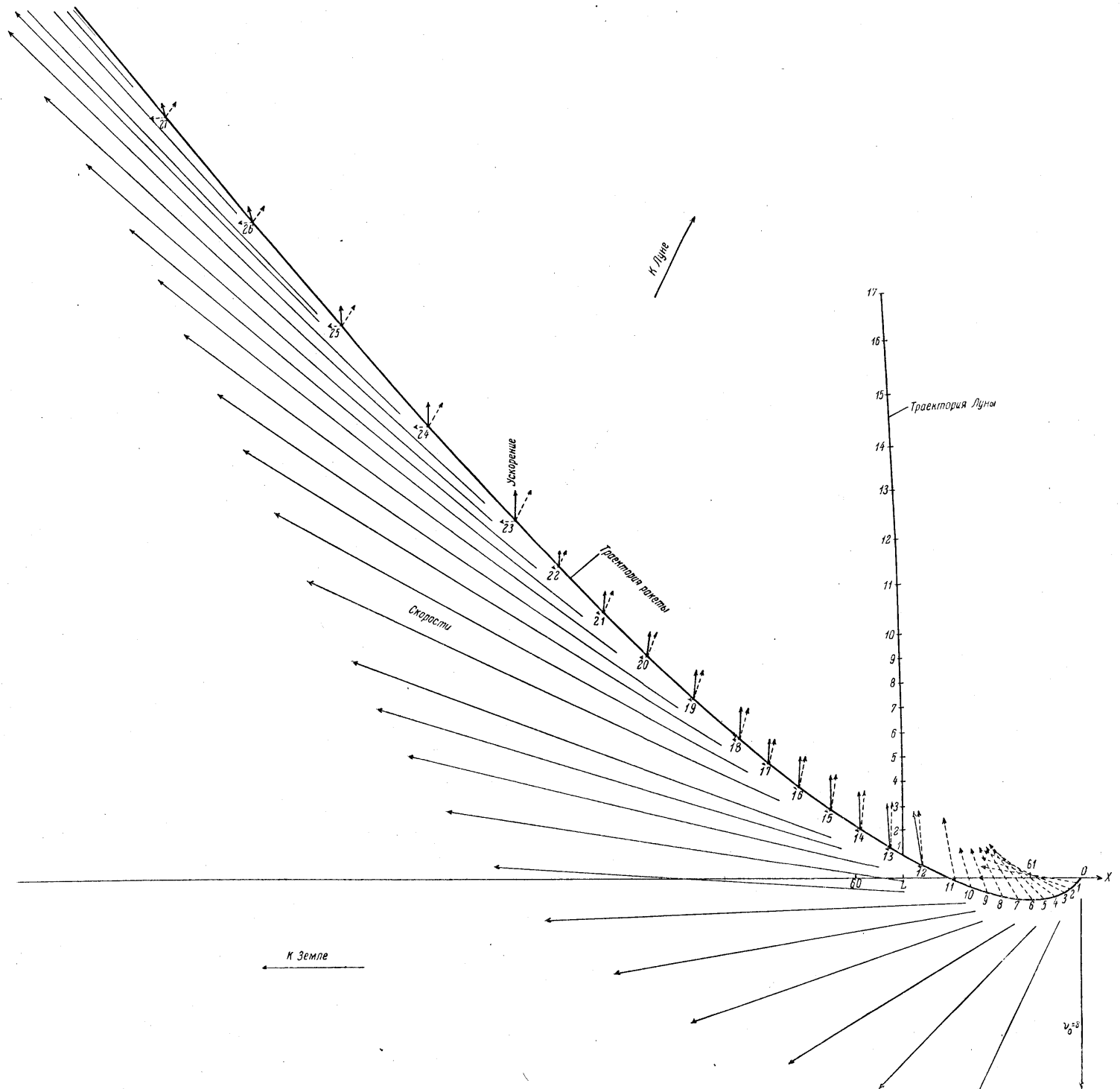


График № 1. Графическое построение симметричной траектории  $V_0 = 3$  (0.22 км/сек.).

Sanitized Copy Approved for Release 2010/02/26 : CIA-RDP80T00246A035600060001-0

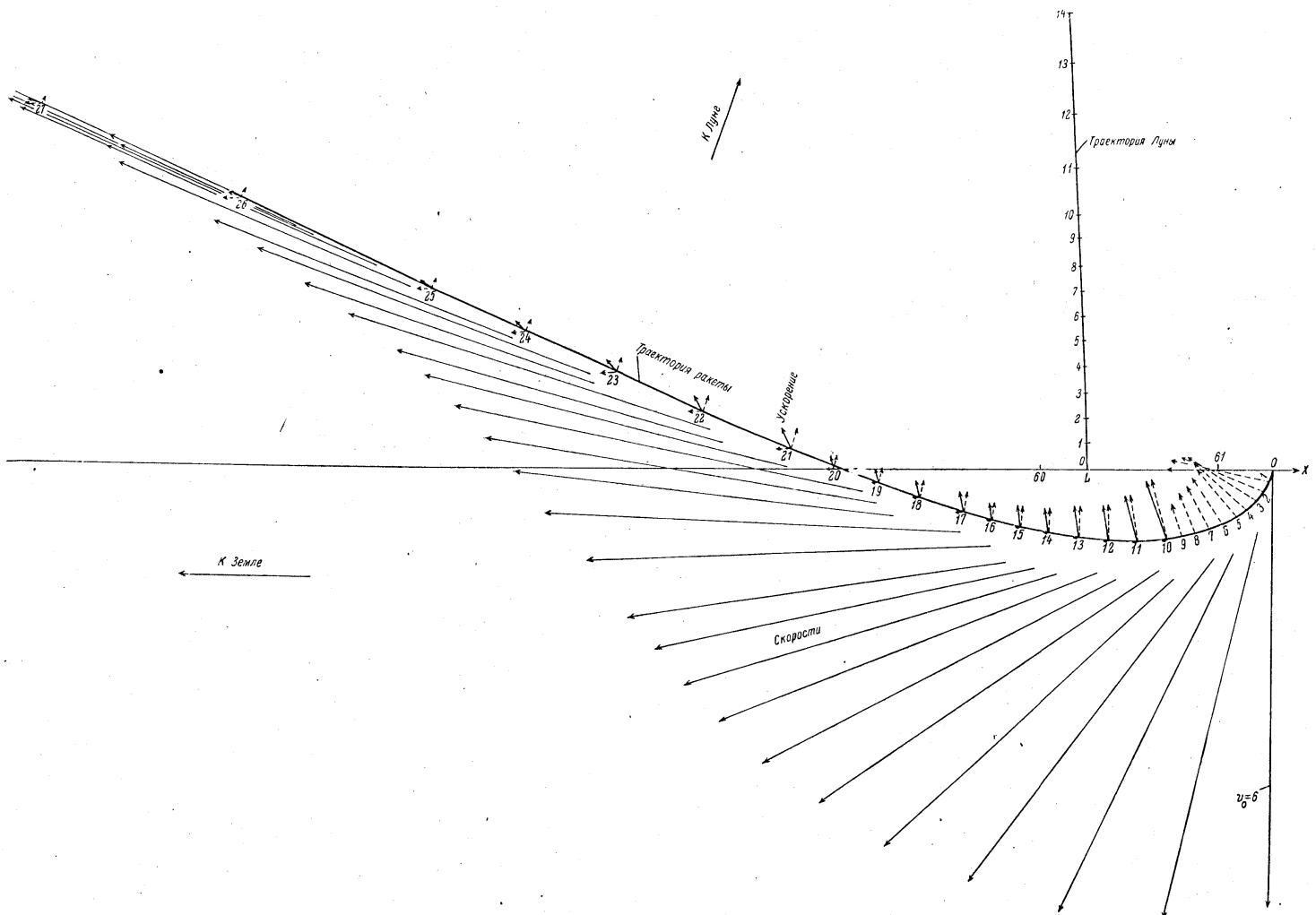
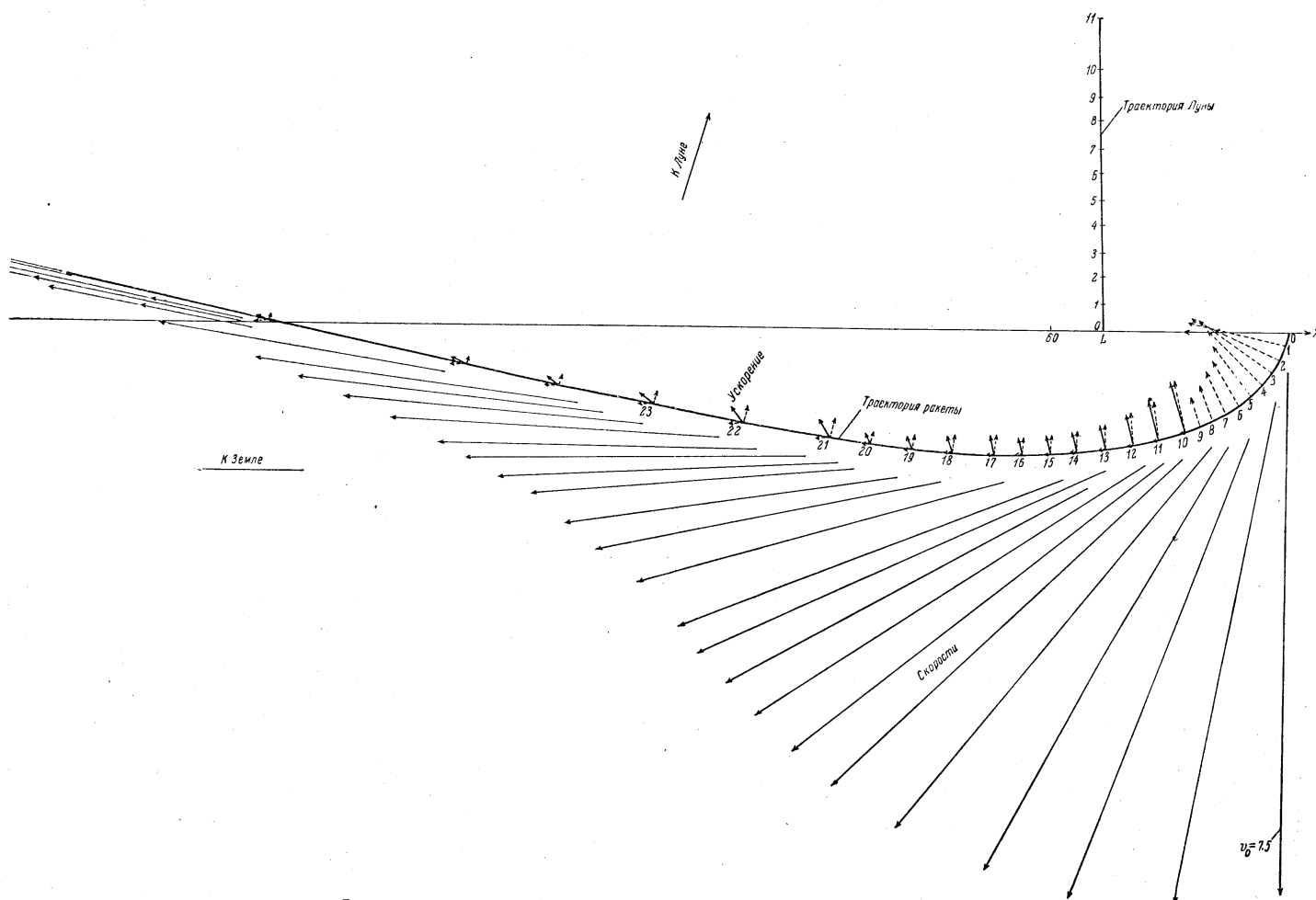


График № 2. Графическое построение симметричной траектории  $V_0 = 6$  (0.44 км/сек.).

Sanitized Copy Approved for Release 2010/02/26 : CIA-RDP80T00246A035600060001-0



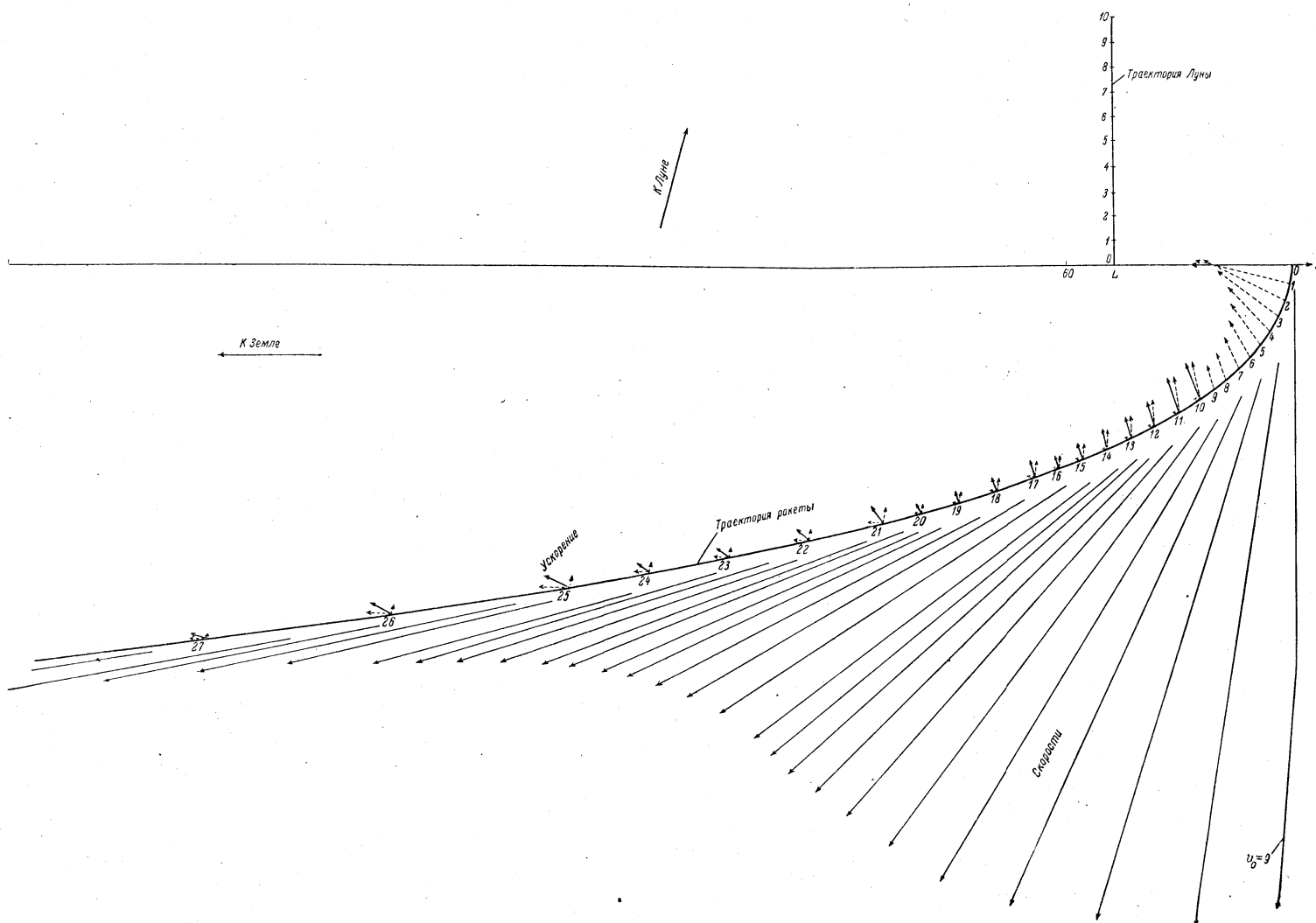


График № 4. Графическое построение симметричной траектории  $V_0 = 9$  (0.66 км.сек.).

Sanitized Copy Approved for Release 2010/02/26 : CIA-RDP80T00246A035600060001-0

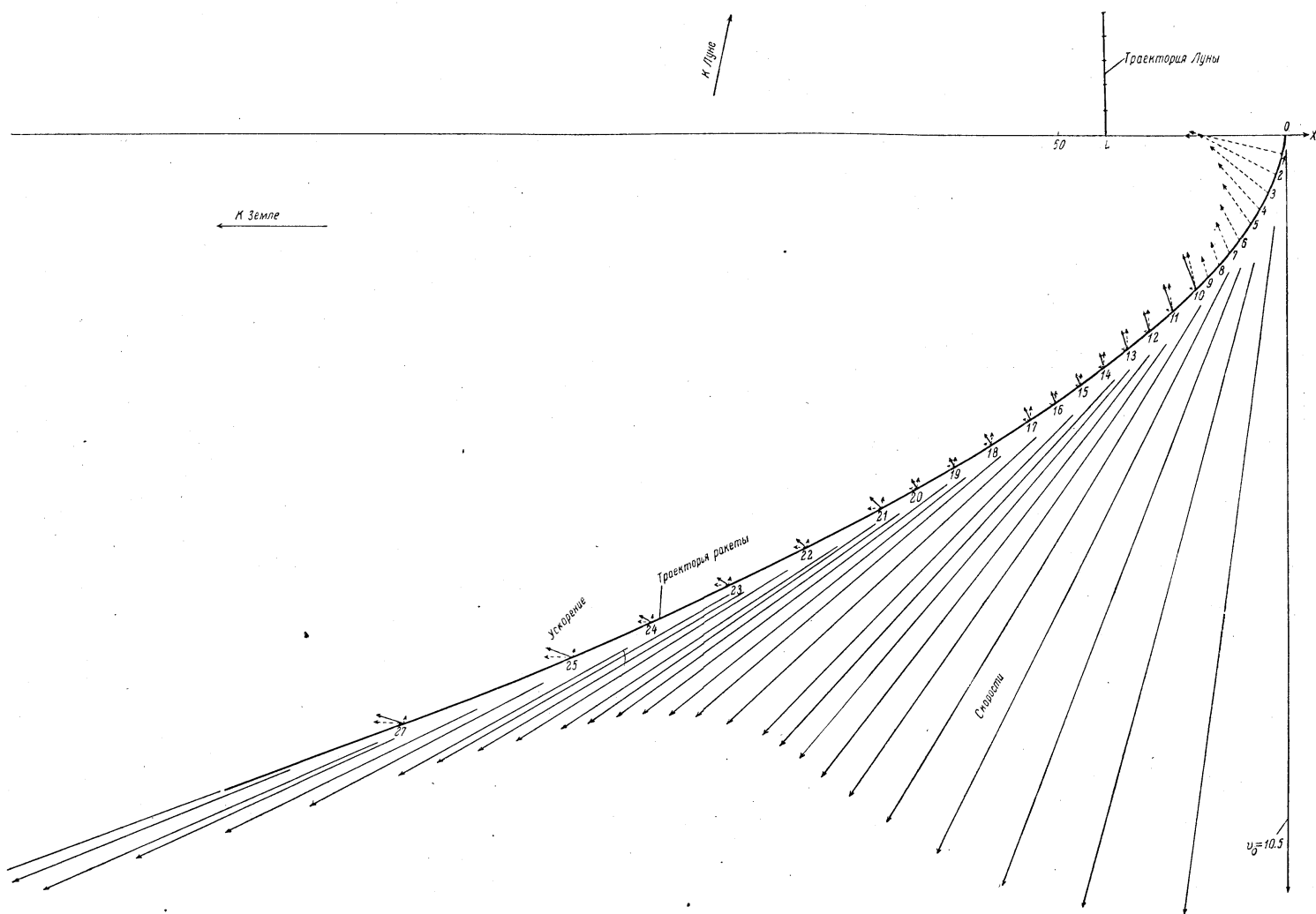


График № 5. Графическое построение симметричной траектории  $V_0 = 10.5$  (0.77 км/сек.).

Sanitized Copy Approved for Release 2010/02/26 : CIA-RDP80T00246A035600060001-0

зависимость. С увеличением  $\varepsilon$  следует уменьшить  $v_0$ , так что при некотором  $\varepsilon = \varepsilon_0$   $v_0 = 0$ , а при  $\varepsilon > \varepsilon_0$  скорость  $v_0$  следует направить в сторону движения Луны.

Орбита, построенная Г. А. Чеботаревым (Чеботарев, 1956), соответствует этому частному случаю  $v_0$  ( $\varepsilon_0 = 31\,600$  км).

3. Построенные орбиты могут быть двух типов: орбиты пересекающие себя в одной точке (тип I) и пересекающие себя в двух точках (тип II). Угловая скорость на орбитах I типа в начальный момент (т. е. в сфере действия Земли) противоположна по знаку угловой скорости Луны. Угловая скорость ракеты на орбитах типа II направлена одинаково с угловой скоростью Луны.

4. Орбиты типа II при одинаковых по величине с орбитами типа I начальных скоростях являются более выгодными, так как:

а) для орбит типа II представляется возможность использования скорости суточного вращения Земли (в какой мере — это зависит от угла между радиусом-вектором и скоростью в начальный момент);

б) кроме того, если иметь в виду задачу фотографирования невидимой части поверхности Луны, то на одинаковом с орбитой типа I минимальном расстоянии от центра Луны ракета движется по орбите типа II с меньшей скоростью (в нашем случае орбите типа I соответствует скорость относительно Луны, равная  $7.5 + 13 = 20.5$ , а орбите типа II — скорость  $9 + 13 = 22$  в наших единицах, т. е. для орбит типа I скорость относительно Луны на 0.14 км/сек. больше, чем для орбиты типа II).

#### ЛИТЕРАТУРА

- Коош. 1950. Динамика ракет.  
 Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, II.  
 Уиттекер Е. Т. и Г. Н. Робинсон. 1935. Математическая обработка наблюдений.  
 Чеботарев Г. А. 1956. Симметричная траектория ракеты для полета вокруг Луны. Бюлл. ИТА, 6, 7 (80).  
 Эно-Пельтри, 1950. Космические полеты.  
 Goldstein A., C. E. Fröberg. 1952. A Collision path from the Earth to the Moon in the restricted problem of three bodies.  
 Haskins E. 1953. A mathematical interpretation of crossing the last frontier.  
 Lawden D. E. 1954. Fundamentals of space navigation. Journ. of the Brit. Interpl. Soc. 13, 2, 87—101.  
 Lawden D. E. 1955. Optimal transfer between circular orbits about two planets, Astronaut. Acta, 1, 2.  
 Sundman K. F. 1913. Mémoire sur le problème des trois corps. Acta Mathematica, 36.

Поступило в Редакцию  
 11 июля 1956 г.

**Бюллетень Института Теоретической Астрономии**

**Т. VI** **1957** **№ 8 (81)**

## Постоянная лунного параллакса

*Ф. Х. Перлин*

В статье дается краткий обзор результатов определения постоянной лунного параллакса, а также вывод численного значения этой величины в соответствии с новыми данными о некоторых фундаментальных постоянных астрономии.

*DIE KONSTANTE DER MONDPARALLAXE, von F. H. Perlin. — Es wird kurze Zusammenstellung der Ergebnisse einer Bestimmung der Konstante der Mondparallaxe gegeben, sowie der numerische Werth dieser Grösse, entsprechend den neuen Daten für einige fundamentale Konstanten der Astronomie.*

### Введение

Постоянными астрономии принято называть величины, полученные прямо или косвенно из наблюдений и составляющие численную основу редуционных вычислений, как, например, прецессионные постоянные, постоянная солнечного параллакса и т. д. Некоторые из этих величин связаны между собой определенными соотношениями, вытекающими из теоретических соображений. Постоянная лунного параллакса, методам определения и численному значению которой посвящена настоящая работа, относится к астрономическим постоянным, в значительной степени зависящим от элементов, характеризующих фигуру и размеры Земли. Вопрос о постоянной лунного параллакса является одним из дискуссионных вопросов. Во-первых, употребляемое теперь значение этой величины недостаточно согласуется с другими современными данными о некоторых фундаментальных постоянных. Во-вторых, значение этой постоянной, полученное из астрономических наблюдений, недостаточно хорошо совпадает со значением, полученным из теоретических соотношений, основанных на свойствах гравитации. Новые данные о фундаментальных постоянных, связанных с Землей, полученные в последние годы (Жонголович, 1952, 1956) позволяют ввести некоторые уточнения в принятое теперь значение постоянной лунного параллакса.

### § 1. Краткий исторический обзор определений постоянной лунного параллакса

Определение постоянной лунного параллакса, как и других астрономических постоянных, имеет длинную историю. Мы остановимся кратко лишь на главнейших работах, характеризующих состояние вопроса в настоящее время.

Один из методов определения постоянной лунного параллакса, получивший название теоретического или динамического метода, основан на гравитационной теории, позволяющей установить соотношение между параллаксом Луны, ее средним суточным движением, размерами Земли и силой тяжести на ее поверхности (см. дальше § 2).

Мысль об использовании тождества земной гравитации с силой, обуславливающей движение Луны вокруг Земли, для определения параллакса Луны была высказана Иоганном Генрихом Ламбертом еще в середине XVIII в.<sup>1</sup> Первое известное численное

<sup>1</sup> Как сообщает Зейдель (Seidel, 1859), Ламберт предложил такую задачу в качестве конкурсной в одном из писем к секретарю Берлинской академии.

значение постоянной лунного параллакса, полученное этим методом, принадлежит Лапласу (Laplace, 1844, III, стр. 285—286). Со времени Лапласа все таблицы Луны от Бюрга (Bürg) до Брауна (Brown E. W.) основаны на значениях постоянной параллакса, полученных динамическим методом.

В табл. 1 приводятся значения постоянной экваториального горизонтального параллакса Луны ( $\pi_{\odot}$ ),<sup>1</sup> выведенные этим методом Ганzenом, Адамсом, Ньюкомбом, Брауном, Де-Ситтером и Клеменсом, а также принятые при этих выводах значения массы Луны, сжатия Земли, ее среднего радиуса и ускорения силы тяжести на ее средней широте.<sup>2</sup>

Таблица 1

Автор	$1/m$	$1/\alpha$	$g_1$ (в см·сек. <sup>-2</sup> )	$R_1$ (в м)	$\pi_{\odot}$	Источники
Ганзен.	80	300	979.772	6370063	3422.25	Данные приведены и обработке Ньюкомба (Newcomb, 1882, стр. 79).
Адамс.	80	300	979.772	6370063	3422.28	
Ньюкомб.	81.45	293.5	979.770	6371004	3422.68	Newcomb, 1895, стр. 192—194.
Браун.	81.53	294	979.743	6370843	3422.70	Newcomb, 1912, стр. 42.
						Brown, 1915, стр. 516.
Де-Ситтер.	81.53	296.75	979.770	6371260	3422.68	De-Sitter, 1938, стр. 213—231.
Клеменс.	81.79	296.202	979.770	6371248	3422.76	Clemence, 1948, стр. 169—179.

Здесь  $m$  — масса Луны в единицах массы Земли;  $\alpha$  — сжатие Земли;  $R_1$  — средний радиус Земли (в м);  $g_1$  — ускорение силы тяжести на средней широте (в см. сек.<sup>-2</sup>);  $\pi_{\odot}$  — постоянная экваториального горизонтального параллакса Луны.

Другой метод<sup>3</sup> определения экваториального горизонтального параллакса Луны, который иногда называется тригонометрическим методом, основан на сравнении склонений Луны, полученных из соответственных меридианных наблюдений Луны в двух пунктах земной поверхности, достаточно отдаленных по широте. Такие наблюдения выполнялись неоднократно на мысе Доброй Надежды и соответственно в Гринвиче, а также на некоторых других европейских обсерваториях.

В 1751—1753 гг. Лакей (Lacaille) выполнил на мысе Доброй Надежды ряд наблюдений, послуживших затем материалом для вывода постоянной лунного параллакса целому ряду астрономов (Lacaille, Laland, Du Séjour, Гришов).<sup>4</sup> Эти же наблюдения Лакей были переработаны в 1837 г. Олуфсеном (Olufsen, 1837) совместно с наблюдениями Брайля в Гринвиче, Кассини в Париже, Лаланда в Берлине и Зенотти в Болонье. В 1838 г. была опубликована Хендерсоном (Henderson, 1838) обработка новых наблю-

<sup>1</sup> Современные авторы дают вместо величины  $\pi_{\odot}$  — постоянной параллакса Луны — величину  $\pi'_{\odot} = \frac{\sin \pi_{\odot}}{\sin 1''}$  и называют  $\pi'_{\odot}$  постоянной синуса параллакса Луны. Эти две величины необходимо различать, так как  $\pi_{\odot} = \sin \pi_{\odot} + \frac{\sin \pi_{\odot}}{6} \dots$  и  $\pi'_{\odot} = \frac{\sin \pi_{\odot}}{\sin 1''} = \pi_{\odot} - 0.157$ .

<sup>2</sup> Ньюкомб, как и Ганзен и Адамс, называют средней геоцентрическую широту, синус которой равен  $1/\sqrt{3}$ . Де-Ситтер и Клеменс понимают под средней широтой географическую широту, синус которой равен  $1/\sqrt{3}$ .  $R_1$  и  $g_1$  соответственно этим двум определениям средней широты совпадают с точностью до величин второго порядка малости относительно сжатия.

<sup>3</sup> Более общий метод определения параллакса Луны может, очевидно, заключаться в определении обоих топоцентрических координат Луны в различных пунктах земной поверхности. Разрабатываемая в настоящее время методика фотографического определения таких координат повысит точность определения параллакса Луны из наблюдений.

<sup>4</sup> Интересно отметить работу акад. А. Н. Гришова (1761), использовавшего работу Лакей для определения параллакса Луны по соответствующим наблюдениям в Петербурге.



дений, выполненных в течение 1832—1833 гг. в Гринвиче, Кембридже и на мысе Доброй Надежды. Последующие соответственные наблюдения, поставленные с целью определения постоянной лунного параллакса, были выполнены в 1830—1837 гг. и в 1856—1861 гг. и обработаны Брином (Breen 1864) и Стоуном (Stone, 1866). Все наблюдения обрабатывались по формулам сферической астрономии, выведенным в предположении, что поверхность Земли точно представляет собой сжатый эллипсоид.<sup>1</sup> Мы приводим в табл. 2 значения постоянной экваториального горизонтального параллакса Луны, полученные тригонометрическим методом Олуфсеном, Хендерсоном, Брином и Стоуном при двух предположениях о сжатии Земли ( $\alpha = 1/293.5$ ,  $\alpha = 1/300$ ), в обработке Харкнесса (Harkness, 1891, 20—21).

Т а б л и ц а 2

Автор	$\pi_{\odot}$ ( $\alpha = 1/293.5$ )	$\pi_{\odot}$ ( $\alpha = 1/300$ )	Источники	Примечания
Олуфсен.	3423".28	3422".91	Olufsen, 1837.	Наблюдения выполнены в Гринвиче, Париже, Берлине, Болонье и на мысе Доброй Надежды в 1751—1753 гг. (53 наблюдения).
Хендерсон.	3422.85	3422.46	Henderson, 1838, стр. 283—294	Наблюдения выполнены в Гринвиче, Кембридже и на мысе Доброй Надежды в 1832—1833 гг.
Брин.	3423.08	3422.70	Breen, 1864, стр. 115—178	Наблюдения выполнены в Гринвиче, Кембридже и на мысе Доброй Надежды в 1830—1837 гг. (123 наблюдения).
Стоун.	3423.08	3422.71	Stone, 1866, стр. 11—16.	Наблюдения выполнены в Гринвиче и на мысе Доброй Надежды в 1856—1861 гг. (239 наблюдений).

Сравнение значений  $\pi_{\odot}$ , полученных тригонометрическим методом, со значением, полученным динамическим методом, при одной и той же величине сжатия, как, например, значение Стоуна (табл. 2,  $\alpha = 1/293.5$ ) со значением Ньюкомба (табл. 1,  $\alpha = 1/293.5$ ), показывает довольно большое расхождение (0".4). Это может быть объяснено как ошибками наблюдений, так и неточностью принятых при вычислении величин, связанных с фигурой и размерами Земли.

В 1906—1910 гг. был поставлен ряд наблюдений на обсерваториях в Гринвиче и на мысе Доброй Надежды для получения более точного значения постоянной параллакса Луны. Чтобы уменьшить ошибку отсчетов, наблюдался не лунный край, а кратер Mösting A. Дискуссия этих наблюдений была выполнена и опубликована в 1911 г. Кроммелином (Crommelin, 1911, стр. 526—540). Обработка наблюдений производилась по формулам для эллипсоидальной Земли, но была также учтена высота пунктов наблюдения над уровнем моря. Полученный Кроммелином результат представлен в виде поправки к среднему параллаксу Ганзена (к постоянной синуса параллакса  $\pi'_{\odot} = \frac{\sin \pi_{\odot}}{\sin 1''}$ ), который следует принять равным 3422".11, так как параллакс, взятый для соответствующих моментов наблюдения из „Berliner Jahrbuch“ основан именно на этом значении постоянной (Bauschinger, 1919, стр. 872; De-Sitter, 1927, § 10). Кроммелин получил следующий результат:

$$d\pi'_{\odot} = 0.49 - 0.057 \left( \frac{1}{\alpha} - 293.5 \right).$$

Он провел также сравнение величин  $\pi'_{\odot}$ , полученных из наблюдений кратера Mösting A при разных значениях  $\alpha$ , с величинами, полученными при тех же значениях  $\alpha$

<sup>1</sup> Подробное изложение этого метода можно найти, например, в „Руководстве к сферической астрономии“ А. Шидловского (1866), т. 1, стр. 220—225.

динамическим методом, и пришел к выводу, что наилучшее согласие достигается при  $\frac{1}{\alpha} = 294.4$ . Этот именно вывод побудил Брауна принять при вычислении постоянной синуса горизонтального экваториального параллакса Луны динамическим методом сжатие Земли, равным  $1/294$ . Однако значение  $\alpha = 1/294$ , при котором согласовались значения  $\pi'_{\odot}$ , полученные разными методами, существенно отличается от той величины, которая получается из современных гравиметрических и других астрономо-геодезических исследований. Кроммелин (Crommelin, 1911) указывает как на одну из возможных причин такого расхождения на трехосность Земли и отличие сжатия гринвичского меридиана, на котором производились наблюдения, от среднего сжатия Земли.<sup>1</sup>

В дальнейшем вопросом о согласовании значений постоянной лунного параллакса, полученных разными методами, занимались Ламберт (Lambert, 1928), Де-Ситтер (De-Sitter, 1927) и Джеффрис (Jeffreys, 1948).

Работы Де-Ситтера и Ламберта в этом вопросе почти идентичны по содержанию. Мы приведем численные данные Де-Ситтера, так как на них основана дальнейшая дискуссия Джеффриса. Де-Ситтер, как и Ламберт, вводит в рассмотрение различные поправки к постоянной параллакса, полученной Кроммелином, в частности поправки за отклонение геоида от эллипсоида; он дает следующее выражение для разности между значениями  $\pi'_{\odot \text{набл.}}$ , полученным из наблюдений, и  $\pi'_{\odot \text{динам.}}$ , вычисленным динамическим методом:

$$\pi'_{\odot \text{набл.}} - \pi'_{\odot \text{динам.}} = -0''.12 + 0''.06 - 0''.18 dR_1 + 1''.16 dg_1 - \\ 0''.044d\left(\frac{1}{\alpha}\right) - 0''.170d\left(\frac{1}{m}\right) - 0''.422h_1 - 0''.301h_2 - 0.0104\varepsilon_1 + 0.0138\varepsilon_2 + 0.0168h,$$

где  $dR_1$ ,  $dg_1$ ,  $d\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ,  $d\left(\frac{1}{m}\right)$  — небольшие изменения к принятым при вычислении  $\pi'_{\odot \text{динам.}}$  значениям:  $R_1 = 6371.238$  км,  $g_1 = 979.770$  см·сек.<sup>-2</sup>,  $\frac{1}{\alpha} = 296.96$ ,  $\frac{1}{m} = 81.53$ , а  $h_1$ ,  $h_2$  — поправки к принятым радиусам Земли в Гринвиче и на мысе Доброй Надежды (в км);  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  — поправки за уклонение отвесных линий в пунктах наблюдений (в сек. дуги);  $h$  — поправка к принятому селеноцентрическому расстоянию наблюдаемого кратера Mösting A. Вероятная ошибка наблюдаемого значения  $\pm 0''.06$  выведена из невязок и может считаться хорошим критерием точности наблюдений, так как распределение невязок находится в хорошем согласии с нормальным законом распределения ошибок. По подсчетам Де-Ситтера можно, например, объяснить разность  $\pi'_{\odot \text{набл.}} - \pi'_{\odot \text{динам.}}$  понижением геоида в Гринвиче на 400 м или же на Мысе — на 280 м, но более вероятным он считает объяснение такой разности систематическими ошибками в наблюдаемом положении кратера Mösting A.

По мнению Ламберта, можно отнести разность  $\pi'_{\odot \text{набл.}} - \pi'_{\odot \text{динам.}}$  за счет случайных ошибок наблюдаемого значения в сочетании с ошибками в данных, принятых при вычислении  $\pi'_{\odot \text{динам.}}$ . Как на одну из возможных причин такой разности, Ламберт указывает неучтенное уклонение отвеса в пунктах наблюдений и на то, что сжатие гринвичского меридиана отлично от среднего сжатия Земли. Следует, однако, заметить, что Де-Ситтер и Ламберт не располагали данными о положении геоида относительно эллипсоида, принятого при обработке наблюдений, и их оценки влияния отклонения геоида от эллипсоида на величину  $\pi'_{\odot \text{набл.}}$  весьма приближенны.

Произведенное Джеффрисом (Jeffreys, 1948) исследование внешнего гравитационного поля Земли позволило ему оценить влияние величин  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  на наблюдаемое зна-

<sup>1</sup> Такое же предположение высказал впоследствии Ламберт (Lambert, 1928). Но по подсчетам самого Ламберта, чтобы объяснить существующую разность  $\pi'_{\odot \text{динам.}}$  и  $\pi'_{\odot \text{набл.}}$ , достаточно предположить, что сжатие гринвичского меридиана равно 0.003465, по современным данным о трехосности Земли (Жонголович, 1952, § 14) сжатие Гринвичского меридиана равно 0.003386.

чение  $\pi'_\zeta$ . По оценке Джеффриса, влияние всех этих членов выражается очень малой величиной — 0'008.

Джеффрис принимает следующие поправки к значениям Де-Ситтера (см. стр. 569 настоящей работы):  $dR_1 = -0.301 \pm 0.116$ ,<sup>1</sup>  $dg_1 = -0.014 \pm 0.002$ ,  $d\left(\frac{1}{\alpha}\right) = +1.14 \pm 0.36$ ,  $d\left(\frac{1}{m}\right) = -0.261 \pm 0.025$  и получает соответственно:  $\pi'_{\zeta \text{ динам.}} = 3422'422 \pm 0'024$ ,  $\pi'_{\zeta \text{ набл.}} = 3422'34 \pm 0'09$  (в  $\pi'_{\zeta \text{ набл.}}$  не учтены поправки за отклонение геоида от эллипсоида).

Разность  $\pi'_{\zeta \text{ набл.}} - \pi'_{\zeta \text{ динам.}}$  не выходит теперь за пределы средней ошибки, при этом изменения в  $R_1$  и  $\frac{1}{m}$  уменьшили ее, а изменения в  $\frac{1}{\alpha}$  увеличили. Джеффрис предлагает принять для постоянной экваториального горизонтального параллакса Луны значение  $\pi'_\zeta = 3422'419$  — уравновешенное среднее  $\pi'_{\zeta \text{ набл.}}$  и  $\pi'_{\zeta \text{ динам.}}$ . Это значение соответствует  $\frac{1}{\alpha} = 297.10$ ,  $\frac{1}{m} = 81.279$ , экваториальному радиусу Земли  $R_1 = 6378.099$  км, ускорению силы тяжести на экваторе  $g_0 = 978.0373$  см·сек.<sup>-2</sup>

## § 2. Динамический метод определения постоянной лунного параллакса

Движение Луны вокруг Земли подвержено сильному возмущающему действию Солнца. Поэтому, прежде чем говорить о методах определения постоянной лунного параллакса необходимо строго определить само понятие этой постоянной.

Мы будем называть постоянной синуса экваториального горизонтального параллакса Луны ( $\sin \pi_\zeta$ ) постоянный член в полном разложении синуса возмущенного параллакса, Луны ( $\sin \Pi_\zeta$ ). Этот член выражается различно в разных теориях Луны. Например, в теории Луны Ганзена вычисления ведутся с аномалистическим средним движением и среднее расстояние Луны в теории Ганзена отличается от среднего расстояния, определяемого другими теориями, где вычисления ведутся с сидерическим средним движением. В наиболее современной теории движения Луны, теории Хилла—Брауна, возмущения Луны от действия Солнца учитываются относительно так называемой вариационной орбиты.

Вариационную орбиту можно определить как периодическое решение уравнений движения Луны, если в них пренебречь членами, зависящими от наклонности, эксцентриситета солнечной орбиты и параллакса Солнца, и положить равным нулю эксцентриситет лунной орбиты. Вследствие большого возмущающего действия Солнца на движение Луны для вариационной орбиты не существует большой полуоси в ее обычном понимании и нельзя применить к Луне третий закон Кеплера. В вариационной орбите рассматривают аналог большой полуоси — некоторую постоянную величину  $a$  — общий множитель прямоугольных координат Луны (Субботин, 1937, гл. XVIII). В теории Хилла—Брауна постоянный член в разложении синуса возмущенного экваториального горизонтального параллакса Луны равен

$$\sin \pi_\zeta = \frac{R_0}{a}, \quad (1)$$

где  $R_0$  — экваториальный радиус Земли.

Введем в рассмотрение величину  $a$ , формально удовлетворяющую третьему закону Кеплера

$$n^2 a^3 = fM(1 - m); \quad (2)$$

здесь  $n$  — наблюдаемое среднее суточное движение Луны;  $M$  — масса Земли, включая массу атмосферы;  $m$  — масса Луны в единицах массы Земли;  $f$  — постоянная тяготения.

<sup>1</sup> Все значения Джеффриса даются со средними ошибками.

Величина  $a$ , формально удовлетворяющая третьему закону Кеплера для Луны, связана с величиной  $a$  — аналогом большой полуоси — числовым соотношением (3), установленным в теории Брауна (Brown, 1908):

$$\frac{1}{a} = -1.00090768 \frac{1}{a} \quad (3)$$

Соотношения (1), (2) и (3) позволяют выразить постоянную экваториального горизонтального параллакса Луны через среднее движение Луны, массу Земли и ее экваториальный радиус. Подставим  $\frac{1}{a}$  из (3) в (1)

$$\sin \pi_{\odot} = \frac{1.00090768}{a} R_0$$

или, полагая  $\delta = 0.00090768$ ,

$$\sin^3 \pi_{\odot} = \frac{(1 + \delta)^3 R_0^3}{a^3} \quad (4)$$

Пользуясь соотношением (2) получим

$$\sin^3 \pi_{\odot} = \frac{(1 + \delta)^3 R_0^3 a^2}{fM(1 + m)} \quad (5)$$

Величину  $fM$  можно выразить через силу тяжести на поверхности Земли. Фигура Земли и ее внутреннее строение весьма сложны и до сих пор мало исследованы. Поэтому речь идет не о действительной Земле, а о некотором идеальном теле, которым заменяют Землю в астрономических вычислениях. Выбор такого тела определяется полученными из наблюдений (астрономо-геодезических, гравиметрических) данными о фигуре и внутреннем строении Земли. Де-Ситтер в своей системе астрономических постоянных, исходя из решения проблемы Клеро до членов второго порядка включительно, принимает в качестве модели Земли тело вращения, фигура которого не является строгим эллипсоидом. Это приводит к введению принятой фигуры от строго эллипсоидальной и зависящих от той или иной гипотезы о внутреннем строении Земли. С достаточным приближением можно рассматривать Землю как материальное тело, ограниченное уровенной поверхностью эллипсоидальной формы. Мы будем исходить из решения проблемы Стокса, не требующей никаких предположений о распределении масс внутри Земли, рассматривая Землю как материальное тело с внешней уровенной поверхностью в виде общего двухосного земного эллипсоида.<sup>1</sup>

Если ограничиться членами второго порядка малости относительно сжатия, то величина  $fM$  для двухосного эллипсоида выразится следующим образом (Жонголович, 1949):

$$fM_1 = g_0 R_0^2 \left( 1 - x + \frac{3}{2} q - \frac{15}{14} xq \right),$$

где  $g_0$  — ускорение силы тяжести на экваторе;  $q$  — отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести на экваторе;  $M_1$  — масса Земли без массы атмосферы;  $M = M_1(1 + \sigma)$ ,  $\sigma = 8.65 \cdot 10^{-7}$  — масса атмосферы в долях массы Земли.

С принятой точностью имеем

$$fM = g_0 R_0^2 \left( 1 - x + \frac{3}{2} q - \frac{15}{14} xq + \sigma \right). \quad (6)$$

После подстановки  $fM$  из (6) в (5) получим, сохраняя члены второго порядка малости,

$$\sin^3 \pi_{\odot} = \frac{R_0}{g_0} \cdot \frac{a^2 (1 + \delta)^3}{(1 + m)} \left( 1 - x + \frac{3}{2} q + x^2 + \frac{9}{4} q^2 - \frac{27}{14} xq - \sigma \right). \quad (7)$$

<sup>1</sup> Относительно определения такого эллипсоида см.: Жонголович, 1952, 1956.

Полученное выражение  $\sin^3 \pi_{\zeta}$  совпадает с аналогичным выражением Де-Ситтера (De-Sitter, 1938) до членов, характеризующих отклонение принятой им модели Земли от модели, принятой здесь.

Продифференцируем равенство (7), считая  $q$  неизменной величиной. Пренебрегая величинами выше второго порядка малости относительно сжатия, мы получим после некоторых элементарных преобразований следующее выражение для поправки  $d\pi_{\zeta}$  в зависимости от возможных поправок к значениям исходных величин:

$$d\pi_{\zeta} = \frac{\operatorname{tg} \pi_{\zeta}}{3R_0} dR_0 - \frac{\operatorname{tg} \pi_{\zeta}}{3g_0} dg_0 + \frac{\operatorname{tg} \pi_{\zeta}}{3} \left(1 + \frac{1}{m}\right) d\left(\frac{1}{m}\right) - \frac{\operatorname{tg} \pi_{\zeta}}{3} \left(\frac{1}{z}\right)^2 d\left(\frac{1}{z}\right) \quad (8)$$

где  $dR_0$ ,  $dg_0$ ,  $d\left(\frac{1}{m}\right)$ ,  $d\left(\frac{1}{z}\right)$  — небольшие изменения в принятых значениях  $\frac{1}{m}$ ,  $R_0$ ,  $g_0$ ,  $\frac{1}{z}$ .

### § 3. Численное значение постоянной лунного параллакса, полученное с учетом новых данных о некоторых фундаментальных постоянных астрономии

Формула (7) предыдущего параграфа позволяет получить постоянную синуса экваториального горизонтального параллакса Луны, если известны некоторые величины, входящие в ее правую часть. Рассмотрим их подробнее, стараясь уточнить их значения по современным данным.

#### а) Среднее сидерическое движение ( $n$ )

Средняя долгота Луны для эпохи 1900, Январь 0, Гринвичский полдень по Брауну  $\lambda_{\zeta} = 270^{\circ}26'11''.71 + 481267^{\circ}53'26''.06T +$  вековые и периодические члены,

где  $T$  считается в юлианских столетиях от 1900, Январь 0, Гринвичский полдень.

Средняя долгота Луны получена из наблюдений, отнесенных к астрономическому времени, неравномерному вследствие неравномерности вращения Земли, и должна быть приведена к эфемеридному времени, в котором строится теория движения Луны. По современным данным, учитывающим неравномерность вращения Земли (Загребин, 1951) значение  $\lambda_0$ , по Брауну, должно быть исправлено на величину

$$\Delta\lambda = -8''.72 - 26''.75T \dots,$$

что дает для  $\lambda_{\zeta}$  значение  $\lambda_{\zeta} = 270^{\circ}26'02''.99 + 481267^{\circ}52'59''.31T$ , и, следовательно, среднее сидерическое движение Луны в юлианское столетие в 36 525 эфемеридных суток равно

$$\frac{1732564379''.31}{5025.75} \quad (\text{часть, обусловленная прецессией})^1$$

$$\frac{1732559353''.56}{1732559353''.56}$$

Отсюда среднее суточное движение получается равным

$$n = 47434''.889899$$

или

$$n = \frac{47434.889899 \times \sin 1''}{86400} \frac{\text{радиан}}{\text{сек. эфем. времени}}.$$

#### б) Масса Луны в единицах массы Земли ( $m$ )

Масса Луны определяется двумя методами:

- 1) по наблюдаемому лунному неравенству в долготе Солнца;
- 2) по постоянной нутации, когда определена постоянная прецессии.

Принятое в таблицах Луны Брауна и в системе астрономических постоянных Де-Ситтера значение  $\frac{1}{m} = 81.53$  получено первым методом Хинксом из обработки появлений Эроса в 1900—1901 гг.

<sup>1</sup> Для общей прецессии по долготе принято значение Ньюкомба. Исследования последних десятилетий указывают на поправку к этой величине примерно в  $1''$ . На искомую величину среднесуточного движения эта поправка мало скажется.

Клеменс (Clemence, 1948) получил вторым методом  $\frac{1}{m} = 81.79$ . Теоретические соотношения, которыми пользуются при определении массы Луны по постоянной нутации, получены в предположении, что Земля находится в гидростатическом равновесии. Расхождение между значением постоянной нутации, выведенным из неоднократных и хорошо согласующихся между собой наблюдений, и значением, полученным из теоретических соотношений, когда определены постоянная прецессии и масса Луны, показывает, что предположение о гидростатическом равновесии не оправдывается. Поэтому, в настоящее время наиболее надежным методом определения величины  $m$  следует считать метод, основанный на наблюдаемом лунном неравенстве. Джеффрис (Jeffreys, 1948) принял  $\frac{1}{m} = 81.269$ , величину, полученную по постоянной лунного неравенства Спенсера Джонса  $L = 6''.4378^1$  при постоянной параллакса Солнца  $\pi_{\odot} = 8''.790$  и постоянной синуса параллакса Луны  $\pi'_{\odot} = 3422''.526$  (значение Де-Ситтера, De-Sitter, 1938). Новое значение  $\pi'_{\odot} = 3422''.419$ , полученное Джеффрисом (Jeffreys, 1948) приводит к значению  $\frac{1}{m} = 81.278$ .

Рабе (Rabe, 1950) обработал наблюдения оппозиций Эроса с 1926 по 1945 гг. с учетом эфемеридного счета времени и получил новое значение для массы Земля + Луна

$$\frac{1}{m_{\text{З+Л}}} = 328\,452 \pm 43$$

и соответственно этому параллакс Солнца<sup>2</sup>

$$\pi_{\odot} = 8''.79835 \pm 0''.00039.$$

Постоянная лунного неравенства, выведенная Рабе из обработки наблюдений Эроса в 1930—1931 гг.

$$L = 6''.4356 \pm 0''.0028.$$

Принимая для  $L$  среднее из полученного им значения и значения Спенсера Джонса, Рабе вывел  $\frac{1}{m} = 81.375 \pm 0''.026$ , при этом параллакс Солнца принят равным  $\pi_{\odot} = 8''.7984$  и параллакс Луны  $\pi'_{\odot} = 3422''.526$ .

Вывод массы Луны по лунному неравенству требует предварительного определения параллаксов Солнца и Луны. Н. И. Идельсон (1942) вывел соотношение, позволяющее определить  $\frac{1}{m}$  по наблюдаемому лунному неравенству в долготе Солнца и параллактическому неравенству в долготе Луны независимо от параллаксов Солнца и Луны. Действительно, постоянная лунного неравенства и параллактическое неравенство (по Брауну) равны соответственно:

$$L = \frac{m}{1+m} \cdot \frac{\pi_{\odot}}{\pi'_{\odot} \sin 1''},$$

$$P = 49853''.2 \cdot \frac{\pi_{\odot}}{\pi'_{\odot}} \cdot \frac{1-m}{1+m},$$

откуда

$$\frac{1}{m} = 4.13744 \frac{P}{L} + 1.$$

Мы воспользуемся этим соотношением для определения  $\frac{1}{m}$ . Параллактическое неравенство лучше всего определяется из покрытий. Примем

$$P = 125''.023 \pm 0''.058 \text{ (вероятная ошибка).}$$

<sup>1</sup> По наблюдениям Эроса 1930—1931 гг. в переработке Джеффриса.

<sup>2</sup> По формуле Де-Ситтера, связывающей массу системы Земля + Луна с параллаксом Солнца (De-Sitter, 1938).

Это значение  $P$  получено Спенсером Джонсом (Spenser Jones, 1930, стр. 71--104), переработавшим на основании теории Брауна значение Ньюкомба, выведенное из наблюдений покрытий с 1753 по 1906 гг. При  $L = 6''.437 \pm 0.002$  (среднее из значений Спенсера Джонса и Рабе) мы имеем  $\frac{1}{m} = 81.360 \pm 0.055$ , значение, близкое к полученному Рабе.

в) Сжатие Земли ( $\chi$ ), экваториальная постоянная силы тяжести ( $g_0$ ), экваториальный радиус Земли ( $R_0$ )

И. Д. Жонголович (1952) получил на основе обширного гравиметрического материала новые данные о фигуре Земли и ее гравитационном поле. По определению И. Д. Жонголовича, сжатие общего земного эллипсоида  $\chi = \frac{1}{296.61}$  (второй вариант), экваториальная постоянная силы тяжести  $g_0 = 978.0573$ , причем абсолютное значение силы тяжести в Потсдаме принято равным  $981.274 \pm 0.003$  см. сек.<sup>-2</sup>.

Новые абсолютные определения силы тяжести в Америке и Англии, а также анализ определения, выполненного Кюненом и Фуртвенглером в Потсдаме, показали, что принятое для Потсдама значение должно быть уменьшено (Казанский, 1948; Berroth, 1949, Jeffreys, 1948; Woollard, 1950). Хотя в настоящее время нельзя еще с полной уверенностью дать точное значение, однако из всех указанных определений следует, что принятое значение необходимо уменьшить приблизительно на 12 мгл. Приняв поэтому для Потсдама  $g_n = 981.262$  см.сек.<sup>-2</sup>, мы получим соответственно  $g_0 = 978.045$  см.сек.<sup>-2</sup>.

Кроме того, И. Жонголович (1956) показал, как из различных астрономо-геодезических данных можно получить размеры общего земного эллипсоида и получил для большой полуоси этого эллипсоида значение  $R_0 = 6378075$  м.

г) Параметр центробежной силы ( $q$ )

$$q = \frac{\omega^2 R_0}{g_0},$$

где  $\omega$  — скорость вращения Земли. Среднее значение  $\omega$  за последние 2000 лет равно  $1\ 299\ 548''.2042053$  (Clemence, 1948) в эфемеридные сутки или  $0.0000729211514$  радиан в секунду эфемеридного времени. С принятыми нами значениями  $R_0$  и  $g_0$  имеем  $q = 0.00346767$ .

Таким образом, мы рассмотрели все величины, входящие в правую часть выражения (7) и приняли для них следующие значения:

$$n = \frac{47434.8899}{86400} \sin 1'' \frac{\text{радиан}}{\text{сек. эфем. времени}},$$

$$\delta = 0.00090768,$$

$$\sigma = 8.65 \cdot 10^{-7},$$

$$\frac{1}{m} = 81.36 \pm 0.06,$$

$$R_0 = 6378.08 \text{ км} \pm 0.04,$$

$$g_0 = 978.045 \pm 0.003 \text{ см.сек.}^{-2}$$

$$\frac{1}{\chi} = 296.61 \pm 0.57.$$

С этими значениями мы получим по формулам (7) и (8) .

$$\pi'_{\zeta \text{ дугам.}} = 3422''453 \pm 0.014 \quad (*)$$

и

$$d\pi_{\zeta} = 0''179dR_0 - 1''167dg_0 + 0''170d\left(\frac{1}{m}\right) - 0''013d\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

где  $R$  выражено в километрах, а  $dg_0$  — в см·сек.<sup>-2</sup>

Наблюдаемое значение  $\pi'_{\zeta}$ , выведенное Кроммелином из наблюдений кратера Mösting A и рассчитанное по формулам для эллипсоидальной Земли, должно быть также исправлено. Исправления должны быть внесены как за сжатие общего земного эллипсоида, так и за уклонение эллипсоида от геоида. В работе И. Д. Жонголовича „Об определении размеров общего земного эллипсоида“ (1956) указаны формулы и метод, которым можно получить превышение геоида над общим земным эллипсоидом и абсолютные уклонения отвесных линий в пунктах наблюдений. Пользуясь этим, мы получим для Гринвича и мыса Доброй Надежды соответственно

$$\begin{aligned} h_1 &= +0.058 \text{ км} \\ h_2 &= +0.090 \text{ км} \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{превышения геоида над общим земным эллипсоидом,} \\ \varepsilon_1 = +3''.2 \\ \varepsilon_2 = -4''.5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{меридиальные составляющие уклонений} \\ \text{отвесных линий.}^1 \end{array}$$

Коэффициенты дифференциальных поправок к наблюдаемому значению  $\pi'_{\zeta}$ , вызванных небольшими изменениями в принятых значениях радиусов Земли и широт пунктов наблюдения, выведены Де-Ситтером (De-Sitter, 1927) и выражаются следующим образом:

$$d\pi'_{\zeta \text{ набл.}} = -0''422h_1 - 0''301h_2 - 0.0104\varepsilon_1 + 0.0138\varepsilon_2.$$

Учитывая эти поправки и поправку за принятое нами сжатие общего земного эллипсоида, мы получим следующую величину  $\pi'_{\zeta}$  по наблюдениям кратера Mösting A в обработке Кроммелина:

$$\pi'_{\zeta \text{ набл.}} = 3422''47 \pm 0.09. \quad (**)$$

Полученные разными методами значения (\*) и (\*\*), уточненные в соответствии с современными данными о форме и размерах Земли, находятся в хорошем согласии друг с другом. Можно считать, что с ошибкой, не превосходящей одной сотой доли секунды дуги, значение постоянной синуса экваториального горизонтального параллакса Луны будет  $\pi'_{\zeta} = 3422''46$ , что даст постоянную собственно параллакса Луны, равную  $\pi_{\zeta} = 3422''62$ .

Автор выражает глубокую благодарность проф. И. Д. Жонголовичу, под чьим руководством выполнена настоящая работа.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Гришов А. Н. (Grischov A. N.). 1761. Investigatio parallaxeos Lunae observationibus abiquot auno 1752. Petropoli et in Promontorio Bonae Spei ex compacto habitis innixa. Novi Commentarii Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae. 6.  
Жонголович И. Д. 1949. О редукциях силы тяжести. Труды ЦНИИГАиК, вып. 68.  
Жонголович И. Д. 1952. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Труды ИТА, 3.  
Жонголович И. Д. 1956. Об определении размеров общего земного эллипсоида. Труды ИТА, 6.  
Загребин Д. В. 1951. Об учете эмпирического члена при составлении лунной эфемериды. Бюлл. ИТА, 5, 1 (64).

<sup>1</sup> Уклонения взяты в смысле: астрономическая широта — геодезическая.



- Идельсон Н. И. 1942. Фундаментальные постоянные астрономии и геодезии. Приложение к „Астрономическому ежегоднику на 1942 г.“, стр. 411—476.
- Казанский И. А. 1948. Соображения об установлении осредненного значения абсолютной силы тяжести для мировой гравиметрической съемки. Труды ЦНИИГАиК, вып. 51.
- Субботин М. Ф. 1937. Курс небесной механики, II.
- Шидловский А. 1866. Руководство к сферической астрономии.
- Bauschinger J. 1919. Bestimmung und Zusammenhang der astronomischen Konstanten. Encykl. d. math. Wiss., 6, 2, Heft 7.
- Berroth A. 1949. Das fundamental System der Schwere in Lichte neuer Reversionpendelmessungen. Bull. geodesique, 19.
- Breen H. 1864. On the Constant of the Horizontal Equatorial Parallax, as deduced from Observations made at the Cambridge Observatory and the Royal Observatories of Greenwich, Edinburgh and the Cape of Good Hope. Mem. Astr. Soc., 32.
- Brown E. W. 1908. Theory of the Motion of the Moon. Mem. Astr. Soc., 58.
- Brown E. W. 1915. The Elements of the Moon orbit. M. N., 75.
- Clemence G. M. 1948. On the system of astronomical constants. A. J. 53, 1170.
- Crommelin A. 1911. Determination of the Moon's Parallax from Meridian Observations of the crater Mösting A at the Royal Observatories Greenwich and the Cape of Good Hope in the Years 1906—1910. M. N., 71.
- Harkness W. 1891. The solar parallax and its related constants, including the figure and density of the Earth.
- Henderson T. 1838. The Constant Quantity of the Moon's Equatoreal Horizontal Parallax, deduced from Observations made at Greenwich, Cambridge and the Cape of Good Hope in 1832 and 1833. Mem. Astr. Soc., 10.
- Jeffreys H. 1948. On the figures of the Earth and Moon. (Third paper). M. N. 5 Geophys. Suppl., 7.
- Lambert W. D. 1928. The figure of the Earth and parallax of the Moon. A. J., 38, 908.
- Laplace. 1844. Mecanique céleste, III.
- Newcomb S. 1882. A. Transformation of Hansen's Lunar Theory compared with the Theory of Delaunay. Astr. Pap. 1, Washington.
- Newcomb S. 1895. The Elements of the four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy. Suppl. Amer. Eph. 1897, Washington.
- Newcomb S. 1912. Researches on the Motion of the Moon, part II. Astr. Pap., 9, 1.
- Olufsen. 1837. Untersuchungen über den Werth der Mondparallaxe, den in die aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts angestellten correpondierenden Beobachtungen abgeleitet werden kann. A. N., 14, 326.
- Rabe E. 1950. Derivation of fundamental astronomical constants from the observations of Eros during 1926—1945. A. J., 55, 1184.
- Seidel L. 1859. Aus einem schreiben des Herrn Professor Seidel an den Herausgeber. A. N., 50, 1193.
- De-Sitter W. 1927. On the most probable values of some astronomical constants. B. A. N., 4, 129.
- De-Sitter W. 1938. On the system of the astronomical constants. B. A. N., 8, 307.
- Spenser Jones H. 1930. A. Revision of Newcomb's occultation Memoir. M. N., 90.
- Stone E. J. 1866. Constant of Lunar Parallax. Mem. Astr. Soc., 34.
- Woollard G. P. 1950. The Gravity meter as a geodetic instrument. Geophysics, 15, 1.

Поступило в Редакцию  
2 июня 1956 г.

Утверждено к печати  
Институтом теоретической астрономии  
Академии наук СССР

Технический редактор М. Е. Зендель.  
Корректоры Н. П. Исаева и Л. К. Калуженина

Рисо АН СССР №18—2В. Подписано к печати 5/III 1957 г. М. 12210. Бумага  $84 \times 108^{1/16}$ . Бум. л.  $2^{1/4}$ .  
Печ. л. 7.38. Уч.-изд. л. 8.18 + 3 вкл. (1.24 уч.-изд. л.) Тираж 1000. Заказ 885. Цена 6 р. 05 к.

1-я Тип. Изд. АН СССР, Ленинград, В-34, 9 л., л. № 12.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
И. Д. Жонголович. Потенциал земного притяжения . . . . .	505
Ю. В. Баграков. Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трех- осного эллипсоида . . . . .	524
В. К. Абалакин. К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида . . . . .	543
М. С. Лисовская. О траекториях полета ракеты вокруг Луны . . . . .	550
Ф. Х. Перлин. Постоянная лунного параллакса . . . . .	556

---

6 p. 05 к.